Erciyes Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
Cilt 33, Sayı 1 , 2017

Erciyes University
Journal of Natural and Applied Sciences
Volume 33, Issue 1, 2017

Para-Kenmotsu Manifoldların Warped Çarpım Hemislant Alt Manifoldlarının Varlık Problemi

Saadet DOĞAN, Müge KARADAĞ

İnönü Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, MALATYA

(Alınış / Received: 18.06.2016, Kabul / Accepted: 21.02.2017, Online Yayınlanma / Published Online: 21.04.2017)

Anahtar Kelimeler
Para-Kenmotsu Manifoldlar,
Warped Çarpım Altmanifold,
Doubly Warped Çarpım Altmanifold,
Hemi-slant Altmanifold

Öz: Bu çalışmada para-kenmotsu manifoldlar ele alınmış ve bu manifoldların öncelikle warped çarpım hemi-slant alt manifoldlarının varlık problemi incelenmiştir. Warped çarpım hemi-slant alt manifoldunun varlığı karakteristik vektör alanının konumuna göre iki farklı durum için incelenmiştir. Benzer şekilde hemi-slant warped çarpım alt manifoldlarının da varlık problemi bu iki durum için araştırılmış, sonrasında ise bu incelemeler doubly warped çarpım hemi-slant ve proper hemi-slant warped çarpım alt manifoldların varlığına genişletilerek karakteristik vektör alanının konumuna göre çalışılmış ve bir takım sonuçlara ulaşılmıştır.

The Existence Problem of the Warped Product Hemi-slant Submanifolds of Para-Kenmotsu Manifolds

Keywords
Para-kenmotsu Manifolds
Warped Product Submanifold,
Doubly Warped Product Submanifold,
Hemi-slant Submanifold

Abstract: In the present paper, we investigate existence problem of warped product hemi-slant submanifold of para-kenmotsu manifold for two positions of characteristic vector field. Similarly we study existence problem hemi-slant warped product submanifold of para-kenmotsu manifold for two positions of characteristic vector field. Later we extend these problems doubly warped product hemi-slant submanifolds and proper hemi-slant doubly warped product submanifolds of para-kenmotsu manifolds for two positions of characteristic vector field. We find some results about these problems.

1. Giriş

1995'te B.B. Sinha ve K.L.Sai Prasad para-kenmotsu manifold kavramını tanımlamış ve bu manifoldların eğriliklerini çalışmışlardır[7] 1996'da K.K. Dube ise "Study of curvatures of para-kenmotsu manifold" isimli makalesinde para-kenmotsu manifoldların eğrilikleri ile ilgili incelemelerde bulunmuştur[2].S. Kumar ve K K Dube ise para-kenmotsu manifoldların genelleştirilmis CR-alt manifoldlarını araştırmışlardır[4].2006'da B. Sahin "Nonexistence of warped product semi-slant submanifolds of Kaehler manifold" isimli makalesinde Kaehler manifoldların warped çarpım semi-slant altmanifoldları için varlık problemini incelemiştir [8]. Benzer şekilde 2008'de de K.A. Khan, V.A. Khan ve Siraj Uddin'de kosimplektik manifoldların warped çarpım altmanifoldları için varlık problemi üzerinde çalışma yapmıştır [3]. M. Atçeken ise 2010'da Kenmotsu manifoldlarda warped çarpım semi-slant altmanifoldları araştırmıştır[1].

Biz bu makalede para-kenmotsu manifoldlar için warped çarpım hemi-slant alt manifoldların varlığını inceledik.

saadetdoganmat@gmail.com

2. Materyal ve Metot

M, m-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. Eğer *M* üzerinde;

$$\varphi^2 = I - \eta \otimes \xi, \quad \eta(\xi) = 1, \quad \eta \circ \varphi = 0, \quad \varphi\xi = 0, \; rank\varphi = m-1 \tag{2.1}$$

şartını sağlayan bir φ (1;1) tensör alanı, ξ vektör alanı ve η 1-formu varsa *M* ye hemen

hemen parakontakt manifold denir[7].

($M^m, \varphi, \xi, \eta, g$) bir hemen hemen parakontakt manifold olsun. Eğer $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{2.2}$$

ise (φ, ξ, η, g) ye *M* üzerinde bir hemen hemen parakontakt Riemann yapı denir [7].

Bir hemen hemen parakontakt Riemann manifoldu eğer, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X \varphi)Y = -g(X, \varphi Y)\xi - \eta(Y)\varphi X \tag{2.3}$$

şartını sağlarsa bu manifolda bir parakenmotsu manifold denir[7].

Bir ($M^m, \varphi, \xi, \eta, g$) bir parakenmotsu manifoldu için

$$\nabla_X \xi = X - \eta(X)\xi \tag{2.4}$$

eşitliği geçerlidir[7].

($\overline{M}^m, \varphi, \xi, \eta, g$) bir parakenmotsu manifoldu ve *M* de $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. $\forall X \in T_xM$ için φX ve T_xM arasındaki açı $\theta(X)$ ile gösterilsin. $\theta(X)$ e *X in* Wirtinger açısı denir. Eğer $\theta(X)$ sabitse yani; $x \in M$ ve $X \in T_xM, \xi_x$ in seçiminden bağımsız ise *M* ye slant altmanifold denir. Slant immersiyonun wirtinger açısı θ ya slant immersiyonun slant açısı denir. Eğer θ = 0 ise *M* ye invaryant altmanifold, θ = $\pi/2$ ise *M* ye anti-invaryant altmanifold denir. Eğer bir *M* slant altmanifoldu ne invaryant ne de anti-invaryant ise bu manifolda proper slant altmanifold denir [5].

(N_1, g_1) ve (N_2, g_2) iki Riemann manifoldu ve f, N_1 üzerinde pozitif tanımlı bir fonksiyon olsun. N_1 ve N_2 nin warped çarpımı, $N_1 \times_f N_2 = (N_1 \times N_2, g)$ ile gösterilir. Burada,

$$g = g_1 + f^2 g_2 \tag{2.5}$$

dir. Eğer *f* sabitse $N_1 \times_f N_2$ warped çarpım manifolduna aşikar warped çarpım manifoldu denir. $X \in \chi(N_1)$ ve $V \in \chi(N_2)$ olmak üzere bir warped çarpım manifoldu üzerinde

$$\nabla_X V = \nabla_V X = (X \ln f)V \tag{2.6}$$

formülü geçerlidir [6].

M= $N_1 \times_f N_2$ warped çarpım manifoldunda N_1, *M* nin total geodezik, N_2, *M* nin total umbilik alt manifoldudur.

$(\overline{M}^m, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir parakenmotsu manifoldu ve N_θ ve $N_\perp$, $\overline{M}$ nin sırasıyla proper-slant ve anti-invaryant altmanifoldları olsun. $M = N_\perp \times_f N_\theta$ manifolduna $\overline{M}$ nin warped çarpım hemi-slant altmanifoldu, $M = N_\theta \times_f N_\perp$ manifolduna ise $\overline{M}$ nin proper hemi-slant warped çarpım altmanifoldu denir .

(N_1, g_1) ve (N_2, g_2) iki Riemann manifoldu ve f_1 ile f_2 sırasıyla N_1 ve N_2 üzerinde pozitif diferensiyellenebilir manifoldlar olsun. N_1 ve N_2 nin doubly warped çarpım manifoldu ${}_{f_2}N_1 \times_{f_1} N_2$ ile gösteriliyor olup bu manifold

$$g = f_2^{\,2} g_1 + f_1^{\,2} g_2 \tag{2.7}$$

metriğiyle donatılmıştır. Bir doubly warped çarpım manifoldu üzerinde $X \in \chi(N_1)$ ve $V \in \chi(N_2)$ için

$$\nabla_X V = (X \ln f_1)V + (V \ln f_2)X \tag{2.8}$$

formülü geçerlidir [9].

Eğer bir $M = {}_{f_2}N_1 \times_{f_1} N_2$ doubly warped çarpım manifoldu üzerinde f_1 ya da f_2 den hiçbiri sabit değilse M ye aşikar olmayan doubly warped çarpım altmanifoldu denir. N_1 ve N_2, M nin total umbilik altmanifoldlarıdır [9].

Bu durumda ${}_{f_2}N_\perp \times_{f_1} N_\theta$ manifolduna $\overline{M}$ nin doubly warped çarpım hemi-slant altmanifoldu, ${}_{f_2}N_\theta \times_{f_1} N_\perp$ manifolduna $\overline{M}$ nin proper hemi-slant doubly warped çarpım altmanifoldu denir.

3. Bulgular

Teorem 3.1: $\overline{M}$ bir para-Kenmotsu manifold olsun. Bu durumda $\overline{M}$ nin $\xi \in \chi(N_\theta)$ olacak şekilde bir warped çarpım hemi-slant altmanifoldu yoktur.

İspat: $\forall X \in \chi(N_\theta)$, $Z \in \chi(N_\perp)$ için,

$$\nabla_X Z = \nabla_Z X = (Z \ln f)X \tag{3.1}$$

ile tanımlanıyor olup $\xi \in \chi(N_\theta)$ için

$$\nabla_\xi Z = \nabla_Z \xi = (Z \ln f)\xi \tag{3.2}$$

olur. Bunun yanı sıra (2.4) nolu denklemden,

$$\overline{\nabla}_Z \xi = Z - \eta(Z)\xi$$

olup $Z \in \chi(N_\perp)$ ve $\xi \in \chi(N_\theta)$ için $\eta(Z) = 0$ olduğu ve Gauss denklemi göz önünde bulundurulursa

$$\nabla_Z \xi + h(Z, \xi) = Z$$

elde edilir. Bu son denklem teğet ve normal bileşenlerine ayrıştırılırsa,

$$\nabla_Z \xi = Z \tag{3.3}$$

ve $h(Z,\xi)=0$ olur. (3.2) ve (3.3) nolu denklemlerden $Z(\ln f)\xi = Z$ olup bu denklemin her iki tarafı bir $\xi \in \chi(N_\theta)$ ile metrik çarpıma tabi tutulursa $Z(\ln f)=0$ bulunur. Öyleyse *f* sabittir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2: $\overline{M}$ bir para-Kenmotsu manifold olsun. Bu durumda $\overline{M}$ nin $\xi \in \chi(N_\theta)$ olacak şekilde bir hemi-slant warped çarpım altmanifoldu yoktur.

İspat: Benzer yolla görülebilir.

Teorem 3.3: $\overline{M}$ bir para-Kenmotsu manifold olsun. Bu durumda $\overline{M}$ nin $\xi \in \chi(N_\theta)$ olacak şekilde doubly warped çarpım hemi-slant altmanifoldu yoktur.

İspat: $\overline{M}$ bir para-Kenmotsu manifold olsun. $\xi \in \chi(N_\theta)$ ve $X \in \chi(N_\perp)$ için

$$\nabla_X \xi = X(\ln f_1)\xi + \xi(\ln f_2)X \tag{3.4}$$

ve $\overline{\nabla}_X \xi = X - \eta(X)\xi$ olup Gauss denkleminden

$$\nabla_X \xi + h(X,\xi) = X$$

elde edilir. Bu son denklem teğet ve normal bileşenlerine göre ayrıştırılırsa

$$\nabla_X \xi = X \tag{3.5}$$

ve $h(X,\xi)=0$ bulunur. (3.4) ve (3.5) karşılaştırıldığında her $X \in \chi(N_\perp)$ için

$$X(\ln f_1)=0 \tag{3.6}$$

ve

$$\xi(\ln f_2)=1 \tag{3.7}$$

elde edilir. (3.6) dan f_1 sabittir. Öyleyse ispat tamamdır.

Teorem 3.4: $\overline{M}$ bir para-Kenmotsu manifold olsun. Bu durumda $\overline{M}$ nin $\xi \in \chi(N_\perp)$ olacak şekilde doubly warped çarpım hemi-slant altmanifoldu yoktur. (f_2 sabit çıkar).

İspat: Teorem 3.2 dekiyle benzer yolla görülür.

Teorem 3.5: $\overline{M}$ bir para-Kenmotsu manifold olsun. Bu durumda $\overline{M}$ nin $\xi \in \chi(N_\theta)$ olacak şekilde proper hemi-slant doubly warped çarpım altmanifoldu yoktur. (f_1 sabit çıkar).

İspat: Teorem 3.2 dekiyle benzer yolla görülür.

Teorem 3.6: $\overline{M}$ bir para-Kenmotsu manifold olsun. Bu durumda $\overline{M}$ nin $\xi \in \chi(N_\perp)$ olacak şekilde proper hemi-slant doubly warped çarpım altmanifoldu yoktur. (f_2 sabit çıkar).

İspat: Teorem 3.2 dekiyle benzer yolla görülür.

4. Tartışma ve Sonuç

Tüm bu teoremler göz önünde bulundurulduğunda bir para-kenmotsu manifoldu için aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır.

- $\xi \in \chi(N_\theta)$ olacak şekilde bir warped çarpım hemi-slant altmanifoldu yoktur.

- $\xi \in \chi(N_\theta)$ olacak şekilde bir hemi-slant warped çarpım altmanifoldu yoktur.
- $\xi \in \chi(N_\theta)$ olacak şekilde doubly warped çarpım hemi-slant altmanifoldu yoktur.
- $\xi \in \chi(N_\perp)$ olacak şekilde doubly warped çarpım hemi-slant altmanifoldu yoktur.
- $\xi \in \chi(N_\theta)$ olacak şekilde proper hemi-slant doubly warped çarpım altmanifoldu yoktur.
- $\xi \in \chi(N_\perp)$ olacak şekilde proper hemi-slant doubly warped çarpım altmanifoldu yoktur.

Teşekkür

İnönü Üniversitesi B.A.P kapsamında hazırlamış olduğumuz " Bazı Özel Kenmotsu Yapıların Geometrisi Üzerine" adlı projemizin uzantısı olarak yazdığımız bu makaleye katkılarından dolayı İnönü Üniversitesi B.A.P birimine teşekkürlerimizi sunarız.

Kaynakça

[1] Atçeken, M., Warped product semi-slant submanifolds in Kenmotsu Manifold, Turkish J Math, 34(2010),425-432

[2] Dube, K.K., Study Of Curvatures Of Para-Kenmotsu Manifold, Nepali Math. Sci.

Rep., 15, No.1-2 (1996), 83-88

[3] Khan, K.A., Khan V.A., Udin, S., Warped product submanifolds of cosymplectic manifolds, Balkan J Geo & Its Appl, 13 (2008), 55-65

[4] Kumar, S., Dube, K.K., Generalized CR- Submanifolds of Para Kenmotsu manifolds. Journal of The Tensor Society of India, Vol 10(2006)

[5] Lotta, A., Slant Submanifolds In Contact Geometry, Bull. Math. Soc. Roum. 39(1996), 183-198

[6] O'Neill, B., Bishop, R.L., Manifolds Of Negative Curvature, Trans. Amer. Math.

Soc. 145 (1969,) 1-49.

[7] Sinha, B.B., Prasad, K.L.S., A Class of Almost Para-contact Metric Manifold, Bull. Call. Math. Soc., 87 (1995), 307-312

[8] Şahin,B.,Nonexistence of warped product semi-slant submanifolds of Kaehler manifold, Geometriae Dedicata, 195(2006), 195-202

[9] Ünal, B., Doubly warped products, Diff. Geo. Appl., 15(2001),253-263.