Erciyes Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
Cilt 33, Sayı 1, 2017

ErciyesUniversity
Journal of Natural and Applied Sciences
Volume 33, Issue 1, 2017

İmpalsif Diferansiyel Denklemler Hakkında

Bahatdin Daşbaşı

Cumhuriyet Üniversitesi, Bilgisayar Teknolojileri Bölümü

(Alınış / Received: 23.06.2016, Kabul / Accepted: 26.12.2016, Online Yayınlanma/ Published Online: 21.04.2017)

Anahtar Kelimeler
Diferansiyel Denklem,
Dinamik Sistem,
Darbe Etkisi

Öz: Gelişimleri boyunca kısa süreli dış etkilere maruz kalan gerçek dünyadaki birçok süreç ve olgu vardır. Çalışılan süreç ve olguların toplam süresiyle kıyaslandığında bu süreler ihmal edilirler. Böylece, bu dış etkilerin ''anlık'' olduğu yani darbeler biçiminde olduğu varsayılır. Böyle anlık gelişen dinamik durumların araştırılması mekanik, kontrol teorisi, farmakokinetik, epidemiyoloji, popülasyon dinamikleri, ekonomi ve ekoloji gibi farklı bilimlerin bir konusudur. İmpalsif (darbe etkili) diferansiyel denklemler bu türden dinamiklerin doğasını anlamak için karşımıza çıkmaktadır. Dolayısıyla bu denklemler saf bir olgu olarak çalışılabilir. Bu çalışmada ani etkilere maruz kalan bazı süreç ve olgular tanıtıldı ve impalsif diferansiyel denklemlerin kısa bir tarihçesi verilerek genel karakterizasyonu anlatıldı.

About the Impulsive Differential Equations

Keywords
Differential Equation,
Dynamic System,
Impulse Effect

Abstract: There are many processes and phenomena in the real world, which are subjected during their development to the short-term external influences. Their duration is negligible compared with the total duration of the studied phenomena and processes. Therefore, it can be assumed that these external effects are ''instantaneous'', i.e. they are in the form of impulses. The investigation of such instant developing dynamical states is a subject of different sciences: mechanics, control theory, pharmacokinetics, epidemiology, population dynamics, economics, ecology, etc., Therefore, these equations can study as a pure phenomenon. In this study, it is introduced some of the processes and phenomena exposed to instant impact and described it's general characterization by giving a brief history of impulsive differential equations

1. Giriş

Dış etkenler sebebiyle bazı süreçler anlık değişimlere maruz kalmaktadır. Adi diferansiyel denklemler bu süreçlerin modellenmesinde yeterli olamamaktadır. Sisteme dışarıdan bir etki yapıldığı zaman, bu etki sürecin durumunda impals olarak adlandırılan anlık değişimlere sebep olmaktadır [1]. Bu tür darbelere maruz kalan süreçler birçok bilim dalının araştırma konusu olduğundan dolayı bu süreçlerle ilgili birçok örnek verilebilir [2-6]. Bunlar: vuruş etkilerine maruz kalan bir amortisör, açıktan kapalı duruma geçişindeki vana kapağının hızındaki değişim, dış impalsif etki durumunda sarkaç sistemindeki dalgalanmalar, bir saat mekanizmasının vuruş modeli, titreşimli vuruş sistemleri, elektromekanik sistemlerin gevşeme salınımları, elektronik şemalar, impalsif etkilere maruz kalan iniş çıkışlı osilatör, otomatik kontrollü dinamik bir sistem, belirli bir sıvı yoğunluğundan başka bir sıvı yoğunluğuna geçen katı nesnenin durumu, radyal ivme kullanan uydu yörüngenin kontrolü, bir katalizin kaldırılması yada eklenmesiyle kimyasal bir reaksiyonun hızının değişimi, hücresel sinir ağlarındaki bozukluklar, izole edilen popülasyonların dinamiklerindeki impalsif dış müdahale optimizasyon problemleri, impalsif etkilerin bir sonucu olarak popülasyonlardaki ölümler, av-avcı tipi popülasyon dinamiklerindeki impalsif dış müdahale optimizasyon problemleri, kapalı pazar ürün fiyatlarındaki değişim vb. şeklinde verilebilirler. Bu durumlardaki impalsif diferansiyel denklemlerin model sistemleri biçimindeki matematiksel elemanların kullanımı, doğal ve bir kurala bağlıdır [7].

dasbasi_bahatdin@hotmail.com.

2. İmpalsif Diferansiyel Denklemlerin Genel Yapısı

Bu kısımda bu denklemlerin kısa bilimsel bir tarihçesi verilmiş daha sonra bu denklemlerin matematiksel yapısı açıklanmıştır.

2.1. İmpalsif Diferansiyel Denklemlerin Kısa Bilimsel Tarihçesi

İmpalsif diferansiyel denklemlerin matematiksel teorisi iki ana doğrultuda gelişmiştir. Birincisi, S. Zavalishchin, A. Sesekin, S. Drozdenko, A. Halanay, D. Veksler, S. Pandit ve S. Deo tarafından yapılan çalışmalarda görülür. Genelleştirilmiş fonksiyonlar (Dirac delta fonksiyonu tipi) impalsif etkileri tanımlayan temel matematiksel araçlardırlar. İmpalsif etkinin anları bu yazarların çalışmalarındaki problemlerde önceden belirlenir. Bundan dolayı impalsif etki bölgesinin her anında, çözümlerin değerlerine bağlı olarak impalsif anlarının dinamik olarak belirlendiği modelleme sistemleri için uygun değildir.

''Sıçrama'' süreçlerinin araştırmalarındaki ikinci doğrultu, çözümlerin kararlılığı için 1960' larda Milman ve Myshkis tarafından elde edildiler [8]. Ayrıca A. Samoilenko, N. Perestyuk and P. Zabrejk gibi matematikçiler bu matematiksel teorinin gelişimine katkı sağlamışlardır.

Seksenlerin başından itibaren uygulamalarıyla impalsif diferansiyel denklemlerin temel ve kalitatif teorisi üzerinde bilimsel araştırmaları sürdüren çeşitli matematik grupları oluşturuldu. Bunlardan bazıları R. Agarval, D. Bainov, P. Eloe, J. Henderson, V. Lakshmikantham, J. Nieto, S. Ntouyas, D. O'Regan, N. Perestyuk, M. Pinto, A. Samoilenko [9-13] şeklindedirler.

2.2. İmpalsif Diferansiyel Denklemlerin Sistemlerinin Genel Karakterizasyonu

M, belirli bir evrim sürecinin düzlem uzayı, yani bu sürecin tüm muhtemel sonuçlarının seti ve x(t) ise t anında bu sürecin durumunu temsil eden bir noktayı göstersin. Sürecin sınırlı boyuttadır yani, sabit bir t anındaki durumunun ifadesi için n tane parametre sayısı gereklidir. Bu varsayımlar altında sabit bir t anında x(t) noktası, R^{n} öklidyen uzayının n-boyutlu bir vektörü olarak yorumlanabilir ve M ise R^{n} in bir seti olarak dikkate alınabilir. $\mathbb{R}$ reel eksen ve M düzlem uzayının, $Mx\mathbb{R}$ topolojik ürünü, bu düşünceler altında evrim sürecinin genişletilmiş düzlem uzayı olarak adlandırılır. Sürecin evriminin kanunu a, b ve c vasıtasıyla aşağıdaki şekilde tanımlandığı varsayılır.

a) $\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x \in M, \quad t \in \mathbb{R}$ (1)

biçiminde verilen diferansiyel denklem sistemi,

b) Genişletilmiş düzlem uzayında verilen Γ_t seti ve

c) $\Gamma_t^{\mathrm{l}} = A_t\Gamma_t$ olacak şekilde $A_t\colon \Gamma_t \to \Gamma_t^{\mathrm{l}}$ operatörü

şeklindedirler. Süreç aşağıda takip edildiği şekliyle işler: Temsil edilen bir $P_t(t,x(t))$ noktası bir (t_0,x_0) noktasından başlar ve (1) denklemin sisteminin $x(t) = x(t,t_0,x_0)$ çözümü vasıtasıyla belirlenen $\{t,x(t)\}$ eğrisi boyunca hareket eder. Bu eğri boyunca hareket $(t,x(t))$ noktasının Γ_t setiyle karşılaştığı (Γ_t setinin bir noktasına çarptığı) $t = t_1 > t_0$ zamanına kadar sürer. $t = t_1$ çarpma zamanında P_t noktası, anlık bir şekilde A_t operatörü vasıtasıyla $P_{t_1} = (t_1,x(t_1))$ konumundan $P_{t_1}^+ = A_{t_1}P_{t_1} = (t_1,x^+(t_1)) \in \Gamma_{t_1}^{\mathrm{l}}$ konumuna transfer edilir. Daha sonra (1) denklemin sisteminin $x(t) = x(t,t_1,x^+(t_1))$ çözümü vasıtasıyla belirlenen $\{t,x(t)\}$ eğrisi boyunca hareket tanımlanır. Gösterilen eğri boyunca hareket P_t noktasının Γ_t setiyle tekrar karşılaştığı bir $t_2 > t_1$ zamanına kadar sürer. Bu zamanda P_t noktası anlık bir şekilde A_t operatörünün hareketi altında $P_{t_2}(t_2,x(t_2))$ konumundan $P_{t_2}^+ = A_{t_2}P_{t_2} = (t_2,x^+(t_2))$ konumuna sıçrar ve Γ_t setiyle yeni bir kontak kurana kadar (1) denklem sisteminin $x(t) = x(t,t_2,x^+(t_2))$ çözümü vasıtasıyla tanımlanan eğri boyunca daha ileri doğru hareket ederek süreç bu şekilde daha ileriye doğru devam eder.

Bu sürecin evriminin karakterize ettiği $a-c$ ilişkilerinin koleksiyonu darbe hareketiyle diferansiyel denklemlerin bir sistemi ve genişletilmiş düzlem uzayındaki bir P_t noktasının $\{t,x(t)\}$ yörüngesi ise bir integral eğrisi olarak adlandırılır. Ayrıca bu eğriyi tanımlayan $x = x(t)$ fonksiyonu bu sistemin bir çözümü olarak söylenir. İmpalsif diferansiyel denklemlerin bir sistemi, yani yukarıdaki $a-c$ ilişkilerinin koleksiyonu daha kompakt bir formda şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad (t,x) \notin \Gamma_t \\ &\Delta x|_{(t,x)\in\Gamma_t} = A_t x - x \end{aligned} \tag{2}$$

Böylece (2) denklemin sisteminin bir $x = \varphi(t)$ çözümü, Γ_t setinin dışında (1) denklemini sağlar. Genel olarak t noktası Γ_t setine karşılık geldiği anlarda x deki değişim;

$$\Delta x = x(t+0) - x(t-0) = A_t\varphi(t-0) - \varphi(t-0) \tag{3}$$

şeklinde ifade edilir. A_t operatörünün sabit noktalarında değişim yoktur. Ayrıca bu çözüm, Γ_t noktalarında birinci çeşit süreksizliğiyle sahip bir fonksiyondur.

(2) denkleminin çözümleri muhtemelen aşağıdaki üç tipten biridir.

i) Çözümler anlık değişikliklere maruz kalmazlar; Bu durumda (1) denklem sisteminin integral eğrisi Γ_t setini kesmez ya da A_t operatörünün sabit noktalarında keser.

ii) Çözümler sınırlı bir şekilde birçok anlık değişikliklere maruz kalırlar; Bu durumda integral eğrisi A_t operatörünün sabit bir noktası olmayan sınırlı bir şekilde birçok noktada Γ_t setini keser.

iii) Çözümler sayılabilir birçok anlık değişikliklere maruz kalırlar; Bu durumda A_t operatörünün sabit bir noktası olmayan sayılabilir birçok noktada integral eğrisi Γ_t setini keser.

İntegral eğrilerinin Γ_t nin sayılabilir birçok noktası boyunca geçen çözümler arasında, Γ_t seti vasıtasıyla emilen çözümlerin, yani belirli bir $t_1 > t_0$ zamanıyla başlayan Γ_t de kalan çözümlerin ya da bir birikim noktasına sahip olan çözümlerin ayrılması gerekir. Belirli bir $t_1 > t_0$ zamanıyla başlayan Γ_t seti vasıtasıyla emilen bir yörünge boyunca hareket, (t_1, x_1) konumundan $(t_1, A_{t_1}x_1)$ konumuna daha sonra $(t_1, A_{t_1}^2 x_1)$'e daha sonra $(t_1, A_{t_1}^3 x_1)$ konumuna ve böylece devam eden P_t noktası olarak temsil edilen noktanın ardışık geçişlerinden oluşur. Γ_t de bir birikim noktasına sahip olan bir yörünge boyunca hareket, zaman belirli bir $t_1 > t_0$ anına yaklaştıkça, sayılabilir birçok kez Γ_t setine ayrılan ve karşılaşan bir harekettir. Dolayısıyla bu hareket $t = t_1$ anına genişletilemez.

Darbe eylemiyle sistemin düşüncesi adi diferansiyel denklemlerdeki gibi aynı problemlere sahiptir. Ancak, bazı özel problemler de ortaya çıkar. Bu problemlerin karakterleri A_t operatörünün özelliklerine büyük ölçüde bağlıdır. Örneğin, eğer A_t operatörü $1-1$ olduğu varsayılmazsa, o zaman P_t ile temsil edilen noktanın Γ_t setiyle kontak kurduğu zamanlarda, çeşitli noktalara anlık bir şekilde ayrılabilmesi sebebiyle, hareketin çalışmalarıyla alakalı problemlerle karşılaşılır. Eğer A_t operatörü $1-1$ ve örten olduğu kabul edilmezse, o zaman bağımsız bir şekilde hareket eden noktaların anlık bir şekilde Γ_t setiyle kontak kurduğu zamanlarda tek bir noktaya birleşme nedeniyle alakalı problemleri dikkate alınabilir (yani farklı anlarda Γ_t setiyle kontak kurduğunda P_t ile temsil edilen noktanın aynı noktaya karşılık gelebilmesi).

Eğer bazı $\gamma_t \subset \Gamma_t$ için $A_t\gamma_t$ setinin boş olduğu varsayılırsa benzer özel problemler ortaya çıkar. Bu varsayım ölümlü sistemlerin dikkate alınmasını sağlar: γ_t ye çarpan, temsil edilen bir P_t noktası A_t operatörü vasıtasıyla boş bir sete transfer edilir yani nokta ölür ve γ_t , yörüngelerin ölüm seti olarak ifade edilir. Bu tipten sistemler için $t_0 \leq t \leq T$ zamanında ölümün olasılığı olan hareketli bir noktanın ortalama yaşam zamanı problemlerini akla getirmek doğaldır.

Maalesef P_t ile temsil edilen noktanın Γ_t setine temas ettiğinde iki ardışık zaman arasındaki bir sürecin evrimini tanımlayan diferansiyel denklemlerin sistemlerinin geniş bir değişimi ve Γ_t setleri ile $A_t\colon \Gamma_t \to \Gamma_t^1$ dönüşümleri, spesifik özelliklerine göre darbe hareketiyle diferansiyel denklemlerin sistemlerinin derin bir sınıflandırılmasını yapmaya imkan vermez. Darbe hareketinin karakterine bağlı olarak denklem sistemlerinin üç önemli farklı sınıflandırma şekli aşağıdaki şekliyle ayırt edilebilir:

- Sistemler sabit zamanlarda darbe hareketine maruz kalabilirler,
- Sistemler, sunulan bir P_t noktası genişletilmiş düzlem uzayının verilen bir $t = \tau_i(x)$ yüzeylerine çarptığı zamanlarda darbe hareketine maruz kalabilirler ya da
- Süreksiz dinamik sistemler olabilirler.

Böylece Γ_t seti ve A_t operatörüne bağlı olarak değişen darbe hareketiyle bir sistemdeki yörüngeler ve hareketleride değişir [14].

3. Tartışma ve Sonuç

İmpalsif diferansiyel denklemler, anlık değişimlerin sürecin daha iyi analizine katkı sağladığı birçok bilim dalı ve özel konularda gittikçe yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Dolayısıyla bu denklemler temel alınarak ortaya atılan problemler adi diferansiyel denklemlerden çok daha zengin dinamik davranışlar sergilemektedir.

Kaynakça

[1] Aruğaslan, D., Yolcu, Ş. 2015. Bazı Skaler İmpalsif Diferansiyel Denklem Modellerinde Kararlılık Analizi. Gaziosmanpaşa Bilimsel Araştırma Dergisi, 11, 70-82.

[2] Bainov, D. D., Dishliev, A. B., Stamova, I. M. 1996. Lipschitz quasistability of impulsive differential–difference equations with variable impulsive perturbations. J. Comput. Appl. Math., 70, 267-277.

[3] Dishlieva, K. G. 2011. Differentiability of solutions of impulsive differential equations with respect to the impulsive perturbations. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 12, 3541-3551.

[4] Dishlieva, K. G. 2012. Continuous dependence of the solutions of impulsive differential equations on the initial conditions and barrier curves. Acta Mathematica Scientia, 32, 1035-1052.

[5] Lakshmikantham, V., Bainov, D., Simeonov, P. S. 1989. Theory of Impulsive Differential Equations. World Scientific, vol. 6, 288 s.

[6] Samoilenko, A., Perestyuk, N. 1987. Differential equations with impulsive perturbations. Kiev, 291 s.

[7] Dishlieva, K. G. 2012. Impulsive Differential Equations and Applications. J. Applied Comput. Math., 1(e117), 1-6.

[8] Milman, V., Myshkis, A. 1960. On the stability of motion in the presence of impulses. Siberian Math. J. 1, 233-237.

[9] Agarwal, R., Regan, O. D. 2005. A multiplicity result for second order impulsive differential equations via the Leggett Williams fixed point theorem. Appl. Math. Comput., 161, 433-439.

[10] Enchohra, M., Henderson, J., Ntouyas, S. 2006. Impulsive differential equations and inclusions.: In: Contemporary Mathematics and its Applications. 1st, Hindawi Publishing Corporations, 366 s.

[11] Eloe, P., Henderson, J. 1997.A boundary value problem for a system of ordinary differential equations with impulse effects. Rocky Mountain J. Math., 27, 785-799.

[12] R Naulin, R., Pinto, M. 1997. Quasi-Diagonalization of Linear Impulsive Systems and Applications. J. Math. Anal. Appl., 208, 281-297.

[13] J J Nieto, J. J., Regan, O. D. 2009. Variational approach to impulsive differential equations. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 10, 680-690.

[14] Perestyuk, N. A., Plotnikov, V. A., Samoilenko, A. M., Skripnik, N. V. 2011. Differential Equations with Impulse Effects.: De Gruyter, 40, 310 s.