Çoklu Unutma Faktörleri ile Uyarlı Kalman Filtresi İçin İyileştirme

Cenker Biçer*[1], Levent Özbek[2]

[1]Kırıkkale Üniversitesi Fen Edb. Fak. İstatistik Bölümü
[2]Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü

(Alınış / Received: 13.11.2016, Kabul / Accepted: 22.03.2017, Online Yayınlanma / Published Online: 21.04.2017)

Anahtar Kelimeler
Dinamik Sistemler,
Durum Tahmini,
Kalman Filtresi,
Unutma Faktörü,
Uyarlı Kalman Filtresi

Öz: Kalman filtresi dinamik sistemlerde durum tahmin probleminin çözümü için kullanılan popüler bir tahmin yöntemidir. Fen, mühendislik, ekonomi, askeri vb. olmak üzere birçok alandan probleme kolayca uygulanabilir. Sistem karakteristikleri doğru olarak bilindiği sürece Kalman filtresi en iyi tahmin performansı ile çalışır. Ancak sistem karakteristiklerinin kısmen bilindiği durumlarda veya yanlış bilindiği durumlarda filtrenin tahmin performansında ciddi kayıplar olması kaçınılmazdır. Kalman filtresindeki performans kaybı probleminin üstesinden gelebilmek için şu ana kadar çok sayıda çalışma yayınlanmıştır. Bir kısım araştırmacı tarafından Sistem karakteristiklerinin kısmen veya tamamen hatalı bilinmesi durumunda, filtrelemede bazı güçlendirmelerin yapılmasını sağlayacak unutma faktörü ile uyarlanmış Kalman Filtresi tanıtılmıştır. “Adaptive estimation of multiple fading factors in Kalman filter for navigation applications” (AEMFFKF) bu çalışmalardan bir tanesidir.
Bu çalışmada, çoklu unutma faktörüyle uyarlı Kalman filtresi incelenmiş ve AEMFFKF yönteminde belirlenemeyen unutma faktörlerini belirleyebilmek için adaptif bir tahmin algoritması önerilmiştir. Ayrıca yapılan simülasyon çalışmasıyla Kalman filtresinin performansı ile uyarlı filtrenin tahmin performansı karşılaştırılmıştır.

Improvement for the Adaptive Kalman Filter with Multiple Fading Factors

Keywords
Dynamical Systems,
State Estimation,
Kalman Filter,
Fading Factors,
Adaptive Kalman Filter

Abstract: TheKalman filter is most popular estimation technique for solving state estimation problems of dynamical systems and it has been the most frequently used algorithm in applications from different areas such as science, military and economics etc. The Kalman filter works best with predictive performance as long as system characteristics are known correctly. However, the performance of the Kalman filter will dramatically decrease when system characteristics are either unknown or partially known. Numerous studies have been published so far to get over the problem of performance loss in the Kalman filter. Some researchers introduced a fading factor to improve the performance of the Kalman filter under unknown or partially known initial information. “Adaptive estimation of multiple fading factors in Kalman filter for navigation applications” (AEMFFKF) is one of these studies.
In this paper, adaptive fading Kalman filter with the multiple forgetting factors is considered and an adaptive estimation algorithm is proposed to determine forgetting factors which can not be determined in the AEMFFKF. In addition, A Monte Carlo simulation is performed to compare the estimation performances of the Kalman filter with the adaptive filters.

cbicer@kku.edu.tr

1. Giriş

Kalman filtresi; fen, mühendislik, ekonomi, askeri vb. birçok alandan dinamik sistemin durum tahmin probleminde sıklıkla kullanılan bir yöntemdir. Filtreleme problemi oluşturulurken sistem gürültü süreçlerinin kovaryans matrislerinin ve modelde yer alan matrislerin tam olarak bilindiği varsayımı yapılır. Bu matrisler tam olarak bilindiğinde Kalman Filtresi en iyi sonucu verir [1,2]. Ancak uygulamada bu matrisler tam olarak bilinmez. Bu durum filtrenin başarımını olumsuz yönde etkileyebilir ve filtre tahminlerinde ıraksama meydana gelebilir [3]. Bu sorunun üstesinden gelebilmek için çeşitli uyarlı filtrelerin önerildiği çok sayıda çalışma yapılmıştır. Yapılan bu çalışmalara örnek Yang vd. [4], Ding vd. [5], Yang vd. [6], Jwo ve Weng [7], Geng ve Wang [8], Biçer [9], Biçer vd. [10], Özbek ve Efe[15] şeklinde verilebilir. Önerilen bu uyarlama yöntemlerinden bir tanesi filtrenin bir unutma faktörüyle uyarlanmasıdır. Fagin [11] tarafından yeni gözlemlerin eski gözlemlere göre daha çok bilgi içerdiğini göz önünde bulundurarak gözlemlerin üstel olarak ağırlıklandırılabileceği bildirilmiştir. Xia vd. [12], Fagin [11]'in önerdiği bu yöntemi dinamik sistemlere uyarlayarak, modelin hatalı veya eksik bilgiyle oluşturulması durumunda filtre tahminlerinde bazı güçlendirmelerin yapılmasını sağlayacak, skaler unutma faktörünün hesaplanması için çeşitli algoritmalar önermiştir. Kalman filtresinin unutma faktörü kullanılarak uyarlanmasında amaç hata kovaryansının unutma faktörü aracılığıyla yeniden ölçeklenmesiyle filtrenin gelen veri ile uyum içinde çalışmasını sağlamaktır. Böylece filtre eksik bilgiyle çalıştırıldığında veya sistem parametrelerinde bilinmeyen bir değişimle karşılaşıldığı anlarda unutma faktörü hata kovaryansını yeniden ölçeklendirecek ve tahmin ıraksamasının önüne geçilebilecektir. Unutma faktörü kullanılarak uyarlanan Kalman filtresinin en iyi başarımla çalışması, unutma faktörünün en iyi olarak belirlenmesine bağlıdır. Her ne kadar Kalman filtresinin skaler bir unutma faktörüyle uyarlanması tek değişkenli sistemler için bir başarım artışı sağlasada, çok değişkenli ve daha karmaşık sistemlerde modelleme hatası her değişken için farklı oranlarda olabileceğinden, skaler unutma faktörü yerine çoklu unutma faktörü kullanılması daha uygun görünmektedir. Geng ve Wang [8] bu durumu göz önünde bulundurarak, hata kovaryansını çoklu unutma faktörüyle ölçeklendiren ve filtreleme aşamasında hesaplanan inovasyon sürecini Normal dağılımlı olacak şekilde ayarlayan AEMFFKF yöntemini önermişlerdir. Ancak, AEMFFKF yönteminde sadece üzerinden gözlem alınabilen durum değişkenlerine karşılık gelen unutma faktörleri hesaplanabilmektedir. Her ne kadar AEMFFKF skaler unutma faktörüyle uyarlanmış filtre tahminlerine göre bir başarım artışı sağlasada, çok değişkenli sistemlerde en iyi filtre tahminlerine ulaşabilmek için bütün durum değişkenlerine karşılık gelen unutma faktörlerinin belirlenmesi daha uygun olacaktır. Çünkü karşı karşıya kalınan bilgi eksikliği, sistem parametrelerindeki değişim veya hata bütün değişkenler için söz konusu olabilir ve etkileri bertaraf edilmelidir.

Bu çalışmada, çok değişkenli sistemlerde farklı nedenlerden kaynaklanabilecek ıraksama probleminin üstesinden gelebilmek için Kalman filtresinin çoklu unutma faktörüyle uyarlanması ele alınmıştır. Bu amaç doğrultusunda çalışmanın ikinci bölümünde Kalman filtresi ile birlikte AEMFFKF yöntemi kısaca açıklanmıştır. 3. bölümde AEMFFKF yönteminde belirlenemeyen unutma faktörlerini belirleyebilmek için yeni bir tahmin algoritması önerilmiştir. Ayrıca yine üçüncü bölümde, Kalman filtresi, AEMFFKF ve önerilen adaptif yöntemin tahmin performanslarını karşılaştırmak için bir kompartman modeli üzerinde yapılan simülasyon çalışması ve çalışma neticesinde elde edilen sonuçlar üzerinde durulmuştur.

2. Materyal ve Metot

2.1. Kalman Filtresi ve Kalman Filtresinde Çoklu Unutma Faktörlerinin Adaptif Tahmini

Bir lineer dinamik sistem olarak

$$x_k = \Phi_{k/k-1} x_{k-1} + w_{k-1} \tag{1}$$

$$z_k = H_k x_k + v_k \tag{2}$$

alınsın. Burada $x_k \in \mathbb{R}^n$ durum vektörü $y_k \in \mathbb{R}^m$ gözlem vektörü, $\Phi_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ durum geçiş matrisi, $H_k \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gözlem tasarım matrisi $w_k \in \mathbb{R}^n$ ve $v_k \in \mathbb{R}^m$ ilişkisiz ve sırasıyla Q_k, R_k kovaryans matrislerine sahip beyaz gürültü süreçleridir. Bu gösterimler altında Kalman filtresi,

$$\hat{x}_{k/k-1} = \Phi_{k/k-1} \hat{x}_{k-1} \tag{3}$$

$$P_{k/k-1} = \Phi_{k/k-1} P_{k-1} \Phi_{k/k-1}^T + Q_{k-1} \tag{4}$$

$$K_k = P_{k/k-1} H_k^T \left[H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k \right]^{-1} \tag{5}$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k/k-1} + K_k \left(z_k - H_k \hat{x}_{k/k-1} \right) \tag{6}$$

$$P_k = \left(I - K_k H_k \right) P_{k/k-1} \tag{7}$$

eşitlikleri ile verilir [9]. Burada $\hat{x}_{k|k-1}$ durum vektörünün bir öngörüsünü, $P_{k|k-1}$ durum öngörüsüne ait hata kovaryans matrisini, K_k Kalman kazancını, $\hat{x}_k$ durum tahminini ve P_k tahmine ait hata kovaryans matrisini göstermektedir. Ayrıca inovasyon süreci

$$v_k = z_k - H_k \hat{x}_{k/k-1} \tag{8}$$

dır [1,13]. Eğer w_k ve v_k gürültü terimleri normal dağılımlı beyaz gürültü süreçleri ve filtre kararlı durumda ise (8) eşitliği ile verilen inovasyon süreci sıfır ortalamalı ve $H_k P_{k/k-1} H_k^T + R_k$ kovaryanslı Normal dağılımlı beyaz gürültü süreci olur. Yani,

$$v_k \sim N\left(0, H_k P_{k/k-1} H_k^T + R_k\right) \tag{9}$$

Ayrıca, (7) eşitliğinin kullanılmasıyla inovasyon sürecine ait kovaryans

$$Cov\left(v_k\right) = H_k \left(\Phi_{k/k-1} P_{k-1} \Phi_{k/k-1}^T + Q_{k-1} \right) H_k^T + R_k \tag{10}$$

olarak yazılabilir.

Geng and Wang [8] filtrenin uyarlanıp uyarlanmamasına karar verebilmek için, uyarlama işleminin ilk aşamasında, inovasyon sürecinin sıfır ortalma ve $H_k P_{k/k-1} H_k^T + R_k$ kovaryans ile Normal dağılıma sahip olup olamadığının test edilmesi gerektiğini belirtmiş ve bir test istatistiği olarak araştırmacılar tarafından

$$\gamma_k = v_k^T \left[H_k \left(\Phi_{k/k-1} P_{k-1} \Phi_{k-1}^T + Q_{k-1} \right) H_k^T + R_k \right]^{-1} v_k \sim \chi^2_{(m)} \tag{11}$$

önerilmiştir. Test için karar kuralı ise

$$\xi = \frac{\gamma_k}{\varepsilon} \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \text{test red} \tag{12}$$

$$\xi = \frac{\gamma_k}{\varepsilon} < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{test kabul} \tag{13}$$

şeklindedir. Burada m , k anında gözlemlenebilir olan değişkenlerin sayısı, ζ test istatistiği için bir ölçek, ε istenen güven düzeyindeki Ki-kare dağılımına ait kritik değerdir.
Eğer test reddedilememiş ise (9) eşitliği ile verilen varsayım doğrudur, aksi takdirde (9) varsayımı sağlanmamış demektir. Bu durumda (9) varsayımının sağlanabilmesi için Geng ve Wang [8], (4) ile verilen öngörü hata kovaryans matrisinin yerine

$$P_{k|k-1} = S_k \Phi_{k/k-1} P_{k-1} \Phi_{k/k-1}^T S_k^T + Q_{k-1} \tag{14}$$

alınması ile Kalman filtresinin uyarlanmasını önermiştir. Burada $S_k = k\ddot{o}segen\left(s_1, s_2, \ldots, s_n\right)$ biçiminde çoklu unutma faktörüdür ve filtre en iyi tahminleri üretecek şekilde S_k çoklu unutma faktörünün belirlenmesi gerekir.
Geng ve Wang [8] tarafından sadece ölçek faktörlerinin hesaplanmasında kullanılacak ve

$$\bar{H}_k = \left[\Lambda_{m\times m} \quad 0_{m\times(n-m)} \right]_{m\times n}, \quad m \leq n \tag{15}$$

koşulunu sağlayacak şekilde yeni bir gözlem matrisi göz önüne alınmıştır. Burada $\Lambda_{m\times m} = kösegen(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m)$ dır. (14) ve (15) eşitliklerinden (11) ile verilen karesel form,

$$\gamma_k = v_k^T \left[\bar{H}_k \left(S_k \Phi_{k/k-1} P_{k-1} \Phi_{k/k-1}^T S_k^T + Q_{k-1} \right) \bar{H}_k^T + R_k \right]^{-1} v_k \sim \chi^2_{(m)} \tag{16}$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca

$$A_k = \bar{H}_k S_k \Phi_{k/k-1} P_{k-1} \Phi_{k/k-1}^T S_k^T \bar{H}_k^T \tag{17}$$
$$B_k = \bar{H}_k Q_{k-1} \bar{H}_k^T + R_k \tag{18}$$
$$J_k = \Phi_{k/k-1} P_{k-1} \Phi_{k/k-1}^T \tag{19}$$

biçiminde tanımlanırsa

$$a_{ii}(k) = s_i^2 \lambda_i^2 j_{ii}(k) \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{20}$$

eşitliği sağlanır. Burada $a_{ii}(k)$ ve $j_{ii}(k)$ sırasıyla A_k ve J_k matrislerinin *i.* ve *j.* elemanı, $s_i(k)$ ise *i.* unutma faktörüdür. Eğer filtre en iyi tahminleri üretiyor ise inovasyon süreci v_k (9) ile verilen dağılıma uyar ve (21) eşitliği sağlanır [14].

$$\gamma_i(k) = \frac{\left[v_i(k) \right]^2}{a_{ii}(k) + b_{ii}(k)} \sim \chi^2_{(1)} \tag{21}$$

burada $b_{ii}(k)$, (18) eşitliği ile tanımlanan B_k matrisinin *i.* köşegen elemanıdır. (21) ile verilen eşitlik düzenlenirse

$$\frac{\left[v_i(k) \right]^2}{a_{ii}(k) + b_{ii}(k)} \Big/ \varepsilon_i < 1 \tag{22}$$

elde edilir. Burada $v_i(k)$, v_k'nın *i.* elemanı ve $\varepsilon_i = \chi^2_{(1,r)}$ dir. (20) eşitliğinin (22)'de kullanılmasıyla *k.* andaki unutma faktörü

$$s_i(k) = \begin{cases} \max\left(1, \sqrt{\dfrac{\left[v_i(k) \right]^2}{\varepsilon_i \lambda_i^2 j_{ii}(k)} - \dfrac{b_{ii}(k)}{\lambda_i^2 j_{ii}(k)}} \right), & \dfrac{\left[v_i(k) \right]^2}{\varepsilon_i \lambda_i^2 j_{ii}(k)} - \dfrac{b_{ii}(k)}{\lambda_i^2 j_{ii}(k)} > 0 \\ 1 & \dfrac{\left[v_i(k) \right]^2}{\varepsilon_i \lambda_i^2 j_{ii}(k)} - \dfrac{b_{ii}(k)}{\lambda_i^2 j_{ii}(k)} \le 0 \end{cases} \tag{23}$$

biçiminde seçilebilir. Geng ve Wang [8] tarafından geliştirilen bu yaklaşım ile sadece üzerinden gözlem alınabilen durum değişkenlerine karşılık gelen unutma faktörleri elde edilebilir. Üzerinden gözlem alınamayan durumlara karşılık gelen unutma faktörleri ise 1 olarak ayarlanır. Böylece *k.* andaki çoklu unutma faktörü

$$S_k = diag(s_1, s_2 \ldots s_m, 1, \ldots, 1) \tag{24}$$

olur [8].

2.2. Belirlenemeyen Unutma Faktörlerinin Adaptif Tahmini

Bu kısımda AEMFFKF yöntemindeki belirlenemeyen unutma faktörlerinin belirlenebilmesi üzerinde durulmaktadır.

İlk olarak, belirlenemeyen unutma faktörlerinin belirlenebilmesi için (8) eşitliği ile verilen inovasyon süreci göz önüne alınsın. Optimal filtrede inovasyon süreci bir beyaz gürültü sürecidir ve

$$P_{k/k-1}H_k' - K_k C_{z_k} = 0 \tag{25}$$

eşitliği sağlanır [12]. (25) eşitliğinin sağlanmadığı anlarda ise inovasyon süreci beyaz gürültü süreci özelliğini sağlamaz, yani filtre tahminleri optimal değildir ve filtre uyarlanmalıdır. Bu özellik göz önünde bulundurularak AEMFFKF yöntemindeki belirlenemeyen unutma faktörleri belirlenebilir.

Belirlenemeyen unutma faktörlerini tahmin etme sürecinin ilk aşamasında unutma faktörlerini

$$S_k = kösegen\left(s_1, s_2 \ldots s_m, s_{m+1}, s_{m+2} \ldots, s_n\right) \tag{26}$$

olarak düşünelim. Burada $s_1, s_2 \ldots s_m$ (24) eşitliği ile tahmin edilen unutma faktörleridir. $s_{m+1}, s_{m+2} \ldots, s_n$ ise $n-m$ tane bilinmeyen unutma faktörüdür. (14) ve (26) eşitlikleri (25) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\left(S_k \Phi_{k-1} P_{k-1} \Phi_{k-1}' S_k' + Q_{k-1}\right)\bar{H}_k' - K_k C_{z_k} = 0 \tag{27}$$

olur. Burada C_{z_k} kovaryans matrisi gözlenmiş verilerden ardışık biçimde

$$\hat{C}_{z_k} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} z_j z_j'$$

eşitliği kullanılarak tahmin edilebilir.
S_k matrisinin bilinmeyen $n-m$ tane elemanı tahmin etmek için

$$F\left(s_{m+1}, s_{m+2}, \ldots, s_n, k\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} T_{ij,k}^2 \tag{28}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Burada $T_{ij,k}$ (27) eşitliğinin sol tarafı olarak tanımlanan

$$T_k = \left(S_k \Phi_{k-1} P_{k-1} \Phi_{k-1}' S_k{}' + Q_{k-1}\right)\bar{H}_k' - K_k C_{z_k} \tag{29}$$

T_k matrisinin (i, j). elemanıdır. (28) eşitliği ile tanımlanan $F\left(s_{m+1}, s_{m+2}, \ldots, s_n, k\right)$ fonksiyonunun değeri ne kadar küçük olursa filtre en iyi tahmine o kadar yaklaşır. $F\left(s_{m+1}, s_{m+2}, \ldots, s_n, k\right)$'nın mutlak minimumunda ise filtre en iyi tahmini verir. Böylece en iyi matris unutma faktörü S_k, $F\left(s_{m+1}, s_{m+2}, \ldots, s_n, k\right)$ fonksiyonunu minimize edecek biçimde,

$$\varphi_k^{l+1} = \varphi_k^{l} - \tau \nabla F \quad \forall l = 0,1,2,\ldots \tag{30}$$

iteratif yöntemi kullanılarak hesaplanabilir. Bu yöntem gradient yöntemi olarak bilinir. Burada

$$\varphi = \left[s_{m+1}, s_{m+2}, \ldots, s_n\right]'$$

ve

$$\nabla F = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F\left(s_{m+1}, s_{m+2}, \ldots, s_n, k\right)}{\partial s_{m+1}} \\ \dfrac{\partial F\left(s_{m+1}, s_{m+2}, \ldots, s_n, k\right)}{\partial s_{m+2}} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F\left(s_1, s_2, \ldots, s_n, k\right)}{\partial s_n} \end{bmatrix},$$

l, k anındaki iterasyon indisi, τ $\left(0 < \tau < 1\right)$ ise gradiyent metodundaki adım uzunluğudur. Ayrıca her k anındaki başlangıç değeri olarak $\varphi_k^0 = \left[1, 1, \ldots, 1\right]'$ değeri seçilebilir. İterasyon işlemi yeterince küçük bir $\delta > 0$ değeri için,

$$\left|F\left(\varphi_k^{l+1}\right) - F\left(\varphi_k^{l}\right)\right| \leq \delta \tag{31}$$

şartı sağlandığında durdurulur. Böylece k anındaki $i.$ $\left(i = 1, 2, \ldots n\right)$ unutma faktörü $s_{i,k}$,

$$s_{i,k} = \varphi_{i,k}^{l+1} \tag{32}$$

olarak seçilebilir. Burada $\varphi_{i,k}^{l+1}$, k anındaki $\left(l+1\right)$. iterasyon sonucunda elde edilen $i.$ unutma faktörünün tahminidir. k anındaki en iyi matris unutma faktörü ise (32) eşitliğinden

$$S_k = \begin{bmatrix} s_{1,k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_{2,k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{q,k} \end{bmatrix} \tag{33}$$

olarak elde edilir [9].

3. Bulgular

Bu kısımda, bir önceki kısımda önerilen uyarlı yöntemin başarımını standart Kalman filtresi ve Geng ve Wang [8] tarafından önerilen uyarlı yönteme karşı değerlendirebilmek amacı ile bir simülasyon çalışması yapılmıştır. Bu amaç doğrultusunda

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - c_1\Delta_k & 0 \\ c_1\Delta_k & 1 - c_2\Delta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + w_k \tag{34}$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + v_k \tag{35}$$

eşitlikleri ile verilen kompartman modeli göz önüne alınsın. Burada x_1 ve x_2 sırasıyla bir ilacın sindirim sistemindeki miktarı ve kan dolaşım sistemindeki miktarı olarak tanımlansın. Sindirim sistemine verilen ilaç belli bir oranda azalarak kan dolaşım sistemine geçer. Aynı şekilde kan dolaşım sistemine geçen ilaç miktarı da belli oranda metabolizmaya geçer veya boşaltım süreci yoluyla kaybolur. Burada c_1 sindirim sistemini karakterize eden, c_2 ise metabolik ve boşaltım sürecini karakterize eden pozitif sabitlerdir. Çıktı değişkeni y bireyin kan dolaşım sistemindeki ilaç miktarıdır [9,10]. Simülasyon çalışması Tablo 1'de verilen başlangıç değerleri kullanılarak 1000 tekrarlı olarak işletilmiş ve elde edilen sonuçlar şekil 1-5'de verilmiştir.

Tablo 1. Simülasyon çalışmasında kullanılan başlangıç değerleri.

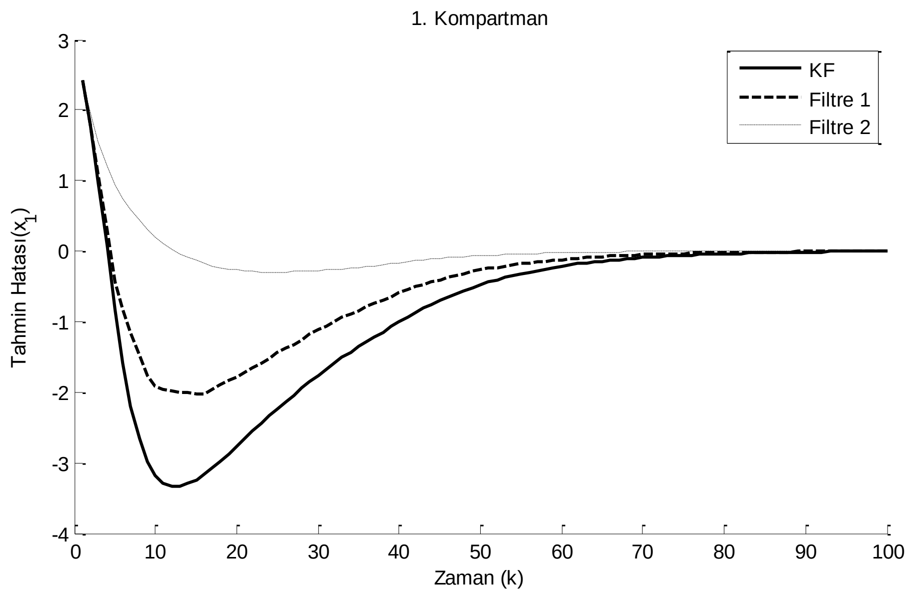
Değişkenler	Sayıların üretilmesinde kullanılan başlangıç değerleri	Filtrelerin işletilmesinde kullanılan başlangıç değerleri
$x_{1,0}$	10	7
$x_{2,0}$	10	7
c_1	$k \le 37 \Rightarrow c_1 = 0.9$ $k > 37 \Rightarrow c_1 = 0.6$	0.7
c_2	$k \le 37 \Rightarrow c_2 = 0.1$ $k > 37 \Rightarrow c_2 = 0.4$	0.3
Q	$10^{-9} I_{(2\times2)}$	$10^{-5} I_{(2\times2)}$
R	$10^{-6} I_{(1\times1)}$	$10^{-2} I_{(1\times1)}$

Ayrıca simülasyon çalışmasında örnekleme zaman aralığı $\Delta_k = 0.1$ ve

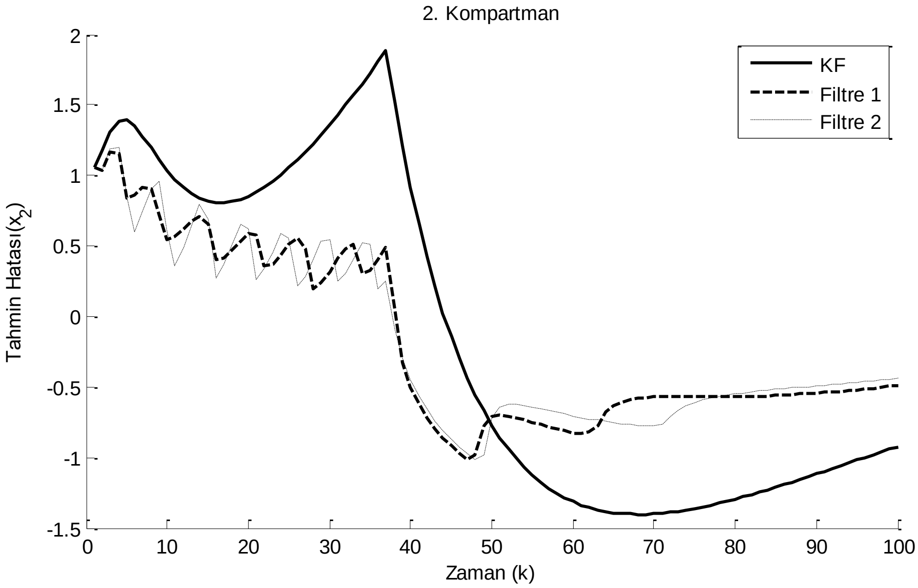
$$HKT = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_{i,j} - \hat{x}_{i,j}\right)^2$$

olarak alınmıştır. Şekillerde verilen KF: Kalman filtresi, Filtre 1: AEMFFKF, Filtre 2: Kısım 2.2' önerilen adaptif yöntem ile hesaplanan unutma faktörlerinin kullanılmasıyla oluşturulan uyarlı Kalman filtresi anlamındadır.

Şekil 1. ve Şekil 2. filtrelerin sırasıyla birinci ve ikinci kompartmanda yaptıkları tahmin hatalarını göstermektedir.



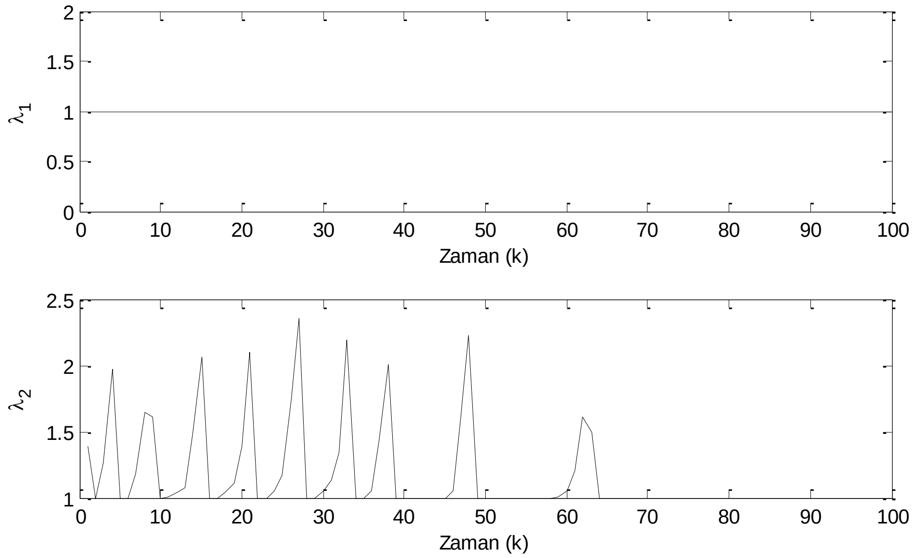
Şekil 1. Birinci kompartmandaki tahmin hatası.



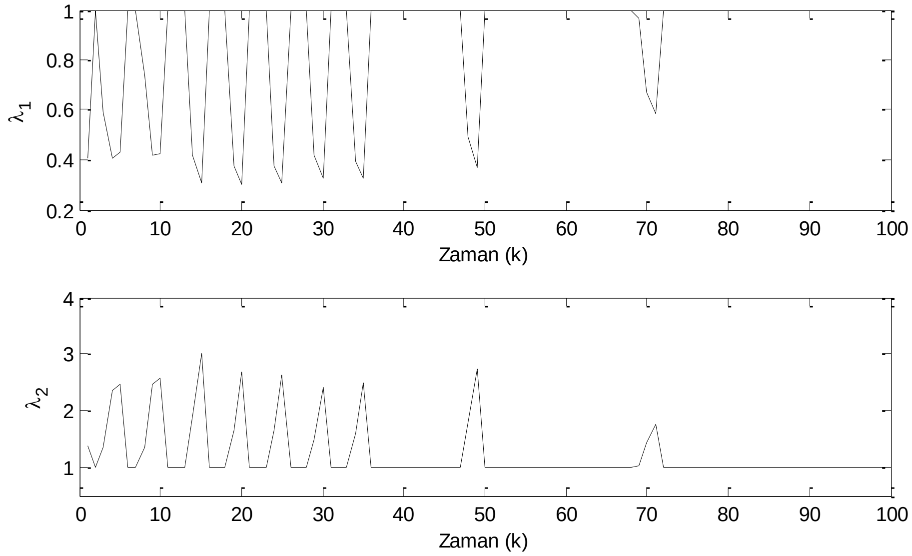
Şekil 2. İkinci kompartmandaki tahmin hatası.

Büyük başlangıç tahmin hataları ile durum tahminine başlayan filtrelerde gözlenen tahmin hataları aynı oranda yüksek olmakla birlikte uyarlı filtrelerin güncel durumlara daha hızlı yakınsadığı görülmektedir. Gerçek durumlara en hızlı yakınsayan filtre ise Kısım 2.2'de önerilen yöntemle unutma faktörlerinin hesaplandığı Filtre 2 olmuştur bknz. Şekil1-2.

Şekil3. ve Şekil4. de Filtre 1 ve Filtre 2 tarafından hesaplanan unutma faktörleri görülmektedir.

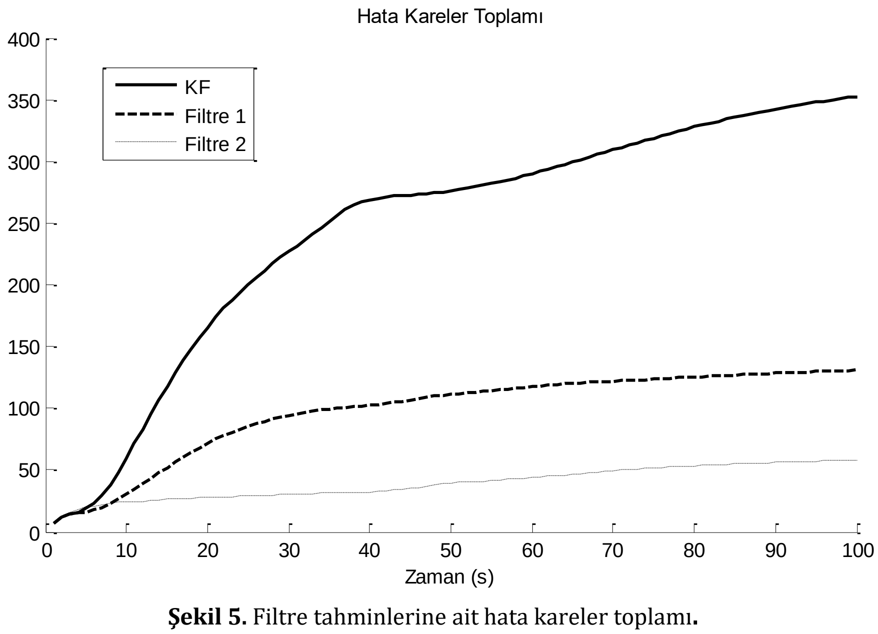


Şekil 3. Filtre 1 tarafından hesaplanan unutma faktörleri.



Şekil 4. Filtre 2 tarafından hesaplanan unutma faktörleri.

Büyük tahmin hatası ile tahmine başlayan uyarlı filtreler, optimal filtre tahminlerine ulaşmak için başlangıç anından itibaren gerekli unutma faktörlerini hesaplamaya başlamışlardır. Ancak kullanılan modelde birinci durum değişkeni üzerinden gözlem alınamadığından Filtre 1 için birinci unutma faktörü λ_1 hesaplanamamaktadır ve 1 olarak seçilmektedir bknz. Şekil3. Bununla birlikte Filtre 2 inovasyon sürecini bir beyaz gürültü süreci olacak şekilde ayarlayan unutma faktörlerini hesaplamıştır bknz. Şekil4. Özellikle başlangıç tahmin hatasının ve parametrelerin değişim anının olduğu kısımlarda değişim gösteren unutma faktörleri (bknz. Şekil3- 4.) filtrenin gerçek durumlara daha hızlı yakınsamasını sağlamıştır bknz. Şekil 1-2. Ayrıca simülasyon çalışmasında elde edilen en küçük hata kareler toplamının Filtre 2'ye ait olduğu görülmektedir bknz. Şekil5.



Şekil 5. Filtre tahminlerine ait hata kareler toplamı.

4. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada lineer dinamik sistemlerdeki tahmin problemlerinde kullanılan Kalman filtresi ve Kalman filtresinde karşılaşılan ıraksama problemi üzerinde duruldu. Iraksama probleminin önüne geçebilmek için Geng ve Wang [8] tarafından önerilen uyarlama yöntemi açıklanmış, uyarlı filtrenin güçlendirilmesi için üzerinden gözlem alınamayan değişkenlere karşılık gelen ve belirlenmemiş unutma faktörlerinin belirlenmesi için bir tahmin algoritması önerilmiştir. Önerilen yöntem ile elde edilen unutma faktörlerinin tahmin performansına katkısı ise yapılan teknik bir simülasyon çalışması ile değerlendirilmiştir. Simülasyon çalışması sonuçları göstermiştir ki; önerilen yöntemle elde edilen unutma faktörlerinin kullanılmasıyla uyarlanan filtre gerçek durumlara diğer filtrelerden daha hızlı yakınsamaktadır ve filtre daha iyi bir tahmin performansı ile çalışmaktadır.

Kaynakça

[1] Anderson B. D. O., Moore J. B. 1979.Optimal Filtering, Prentice Hall. Englewood Cliffs, NJ., 367s.

[2] Bar-Shalom Y., Li X. R., Kirubarajan T. 2001. Estimation with Applications to Tracking and Navigation: Theory Algorithms and Software, John Wiley & Sons, Inc. USA, 584s.

[3] Mehra, R.K. 1972. Approaches to Adaptive Filtering. IEEE Trans. Auto. Control, 17(1972), 693–698.

[4] Yang J. N., Lin S., Huang H., Zhou L. 2006. An Adaptive Extended Kalman Filter for Structural Damage Identification, Struct. Control And Health Monit. 13(2006), 849-867.

[5] Ding, W., Wang, J., Rizos, C., & Kinlyside, D. 2007. Improving adaptive Kalman estimation in GPS/INS integration. Journal of Navigation, 60(2007), 517-529.

[6] Yang J. N., Pan S., Huang H. 2007. An Adaptive Extended Kalman Filter for Structural Damage Identification II: Unknown Inputs, Struct. Control And Health Monit. 14(2007), 497-521.

[7] Jwo D., Weng T. 2008. An Adaptive Sensor Fusion Method with Applications in Integrated Navigation, The Journal of Navigation, 61(2008), 705-721.

[8] Geng, Y., & Wang, J. 2008. Adaptive estimation of multiple fading factors in Kalman filter for navigation applications. GPS Solutions, 12(2008), 273-279.

[9] Biçer, C. 2011. Uyarlı Kalman Filtresinin Başarım ve Kararlılık Analizi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 167s, Ankara.

[10] Bicer, C., Babacan, E. K., & Özbek, L. 2012. Stability of the adaptive fading extended Kalman filter with the matrix forgetting factor, Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences, 20(2012), 819-833.

[11] Fagin S. L. 1964. Recursive linear regression theory: optimal filter theory and error analysis. IEEE Int Conv Rec. ,12(1964), 216–240.

[12] Xia Q., Rao M., Ying Y., Shen X. 1994. Adaptive Fading Kalman Filter with an Application, Automatica, 30(1994), 1333-1338.

[13] Grewal S., Andrews A. P. 2008. Kalman Filtering Theory and Practice Using Matlab, John Wiley & Sons Inc. USA, 592s.

[14] Da R. 1994. Failure detection of dynamical systems with the state Chi-square test, J Guid Control Dyn., 17(1994), 271–277

[15] Ozbek, L., & Efe, M. 2004. An adaptive extended Kalman filter with application to compartment models, Communications in Statistics-Simulation and Computation, 33(2004), 145-158.