Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
Sayı 27, Nisan 2012 ISSN - 1302 - 3055

GERİ ÇEKME SİMPLİSEL CEBİRLER

Özgün GÜRMEN
Dumlıpınar Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Kütahya, ogurmen@dumlupinar.edu.tr

Geliş Tarihi:02.11.2011 Kabul Tarihi:06.02. 2012

ÖZET

Geri çekme simplisel obje Glenn [6] tarafından tanımlanmıştır. Bu çalışmada değişmeli cebirler için inceliyeceğiz.

Anahtar Kelimeler: *Simplisel cebirler, geri çekme obje.*

PULLBACK SIMPLICIAL ALGEBRAS

ABSTRACT

Pullback simplicial object had been defined by Glenn [6]. In this work we consider this object for commutative algebra case.

Key Words: *Simplicial algebra, Pullback object.*

1. SİMPLİSEL CEBİRLER

$(E_n)_{n\in N}$ değişmeli k-cebirlerin bir ailesi olsun.

$$d_i^n\colon E_n \to E_{n-1};\, 0 \le j \le n \ne 0$$
$$s_j^n\colon E_n \to E_{n+1};\, 0 \le j \le n$$

homomorfizmler olmak üzere,

$$\begin{aligned} d_i d_j &= d_{j-1} d_i \,;\, i<j \\ d_i s_j &= \begin{cases} s_{j-1} d_i & ; \quad i<j \\ 1 & ; \quad i=j,\, j+1 \\ s_j d_{i-1} & ; \quad i>J+1 \end{cases} \\ s_i s_j &= s_{j+1} s_i \,;\, i \le j \end{aligned}$$

şartları sağlanıyorsa E=($(E_n)_{n\in N}, d_i, s_j$) üçlüsüne simplisel cebir denir. Buradaki $d_i\ ve\ s_j$ homomorfizmlerine sırasıyla yüz ve dejenere operatörler denir [1,2]. Diyagram olarak,

$$\mathbf{E} = \cdots \begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & E_2 \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r, "d_1"] \arrow[r, shift right=2, "d_2"'] & E_1 \arrow[l, bend left, "s_0"] \arrow[l, bend left=50, "s_1"] \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] & E_0 \arrow[l, bend left, "s_0"] \end{tikzcd}$$

E bir simplisel cebir olsun.

$$(\mathbf{NE})_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} Çek\, d_i^n$$

olmak üzere $d_n^n = \partial_n : NE_n \to NE_{n-1}$ homomorfizmlerini tanımlayalım. Bu durumda

$$\mathbf{NE} : \cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathbf{NE}_n \xrightarrow{\partial_n} \mathbf{NE}_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} \mathbf{NE}_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{NE}_0$$

zinciri bir komplekstir. Gerçekten de $x \in \mathbb{N}$

$$\boldsymbol{E_{n+1}} = \bigcap_{i=0}^{n} Çek\ d_i^{n+1}$$

için

$$\partial_n \partial_{n+1}(x) = d_n^n d_{n+1}^{n+1}(x)$$

olduğundan simplisel özdeşliklerden

$$d_n^n d_{n+1}^{n+1}(x) = d_n^n(0) = 0$$

olup, $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ dır. O halde **NE** bir komplekstir. Bu komplekse **E** simplisel cebirinin Moore kompleksi denir ve ($\mathbf{NE},\partial$) veya kısaca **NE** ile gösterilir. Eğer, $n > k$ için $\mathbf{NE}_n = 0$ ise E simplisel cebrinin Moore kompleksinin boyutu k dan küçük veya eşittir denir ve $\leq$ k ile gösterilir. Moore kompleksinin boyutu $\leq k$ olan simplisel cebirler kategorisi $\mathbf{Simp}(\mathbf{Ceb}_{\leq k})$ ile gösterilir.

E simplisel cebirinin n. Homotopi modülü $\pi_n(\mathbf{E})$, **E** nin Moore kompleksinin n. homolojisine eşittir. Yani

$$\pi_n(\mathbf{E}) \cong H_n(\mathrm{NE},\partial)$$

$$= \frac{\bigcap_{i=0}^{n} Çek\, d_i^n}{d_{n+1}^{n+1}(\bigcap_{i=0}^{n} Çek\, d_i^{n+1})}$$

şeklindedir [5].

2. ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

C bir R-cebir olsun. Bu durumda

$$R \times C \to C$$

$$(r, c) \mapsto r \cdot c$$

değişmeli cebir etkisi olmak üzere $\partial : C \to R$, R-cebir homomorfizmi her $c, c' \in C$ için

$$\text{CM1. } \partial(r \cdot c) = r\partial c$$

$$\text{CM2. } \partial(c) \cdot c' = cc'$$

şartlarını sağlıyor ise $\mathfrak{X} = (C,R,\partial)$ üçlüsüne veya $\partial : C \to R$ ye bir çaprazlanmış R-modül denir.

Teorem: Moore kompleksi 1 olan simplisel cebirler kategorisi, çaprazlanmış modüller kategorisine doğal denktir. [2]

İspat: $\mathbf{E}_0$, Moore kompleksi 1 olan simplisel cebir olsun.

$$C = \mathbf{NE}_1 \,,\; R = \mathbf{NE}_0 \text{ ve } \partial = d_1$$

alalım.

$$\mathbf{NE}_1 \times \mathbf{NE}_0 \to \mathbf{NE}_1$$
$$(x,a) \mapsto x \cdot a = x s_0(a)$$

tanımlayalım. $\partial_2(\mathbf{NE}_2)$ = Çekd_0 Çekd_1 ve Moore kompleksinin boyutu 1 olduğundan Çekd_0 Çekd_1 = 0 dır. Böylece bu ideallerin üreteçleri her $x,y \in \mathbf{NE}_1$ için $y(s_0 d_1(x) - x)$ şeklindedir.

$$\begin{aligned} \text{CM2. } \partial(x) \cdot y &= s_0 \partial(x) y \\ &= s_0 d_1(x) y \\ &= xy \qquad (\text{Çünkü } \partial_2(NE_2) = 0) \end{aligned}$$

olup $\partial : C \to R$ çaprazlanmış R-modüldür.

Tersine, $\partial : C \to R$ çaprazlanmış R-modül olsun. R nin C üzerine etkisiyle $C \ltimes R$ yarı-direkt çarpımı tanımlayabiliriz.

$$E_1 = C \ltimes R \,, E_0 = R$$

ve

$$\begin{aligned} d_0(c,r) &= r \\ d_1(c,r) &= d_1(c) + r \\ s_0(r) &= (0,r) \end{aligned}$$

olup

$$(\mathbf{E}_1):\; \begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] & E_0 \arrow[l, bend left, "s_0"] \end{tikzcd}$$

1-kat simplisel cebiri elde edilir. Buradan n-kat simplisel cebiri;

$$\boldsymbol{E}_n \cong C \ltimes (C \ltimes (\ldots (C \ltimes R) \ldots)) \qquad (n \text{ tane})$$

olup

$$\begin{aligned} d_n(c_n, \ldots, c_1, r) &= (c_{n-1}, \ldots, c_1, \partial(c_1) + r) \\ d_i(c_n, \ldots, c_1, r) &= (c_n, \ldots, c_{i+1} + c_i, \ldots, c_1, r) \\ d_0(c_n, \ldots, c_1, r) &= (c_{n-1}, \ldots, c_1, r) \\ s_j(c_{n-1}, \ldots, c_1, r) &= (c_{n-1}, \ldots, 0, \ldots, c_1, r) \quad ; \; (0 \leq j \leq n-1) \end{aligned}$$

şeklindedir. Böylece **E** simplisel cebiri elde edilir.

3. GERİ ÇEKME SİMPLİSEL CEBİRLER

$\phi : S \to r$, k-cebir morfizmi yardımıyla

$$F\colon \boldsymbol{Ceb}/R \to \boldsymbol{Ceb}/S$$

funktoru oluşturulabilir. Buradan,

$$\phi^*\colon \boldsymbol{Simp}\ (\boldsymbol{Ceb}/R) \to \boldsymbol{Simp}\ (\boldsymbol{Ceb}/S)$$

Funktorunun tanımlanabileceğini göstereceğiz. Bu funktora **geri çekme simplisel funktoru** denir. Dolayısıyla **E** $\in Ob\,(\boldsymbol{Simp}\ (\boldsymbol{Ceb}/R))$ için

$$\phi^*(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{E}'$$

objesine **geri çekme (ko-indirgenmiş) simplisel cebir** denir.

Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{tikzcd}
\phi^*(E_n) = E'_n \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & E_n \arrow[d, "pd_0^{(n)} = p(d_0^1 d_0^2 \ldots d_0^n)"] \\
S \arrow[r, "\phi"'] & R
\end{tikzcd}$$

karesi bir geri çekmedir. Diğer bir deyişle

$$\begin{tikzcd}
\phi^*(E_n) = E'_n \arrow[r] \arrow[dd] & E_n \arrow[d, "d_0^{(n)}"] \\
 & E_0 \arrow[d, "p"] \\
S \arrow[r, "\phi"'] & R
\end{tikzcd}$$

$$\phi^*(E_n) = \left\{(x_n, s) \mid pd_0^{(n)}(x_n) = \phi(s)\right\} \subseteq E_n \times S$$

dir.

Her $n \in \mathbb{N}$ için geri çekme diyagramlarını incelemeden önce Grothendieck yardımcı teoremini vereceğiz.

Yardımcı Teorem (*Grothendieck*): p epimorfizm, p_0 ve p_1 , p nin çekirdek ikilileri ve q_0 ve q_1 , q nin çekirdek ikilileri,

$$\begin{tikzcd}
E'_1 \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & E_1 \arrow[d, shift right, "d_0^1"'] \arrow[d, shift left, "d_1^1"] \\
E'_0 \arrow[r, "\varphi_0"'] & E_0
\end{tikzcd}$$

diyagramında,

$$f_0 p_i = q_i f_i \qquad (\mathrm{i} = 0{,}1)$$

ve

$$f\,p = q\,f_0$$

olsun.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "p_0"'] & K' \arrow[d, "q_0"] \\ E \arrow[r, "f_0"] & E' \end{tikzcd}$$

geriçekme ise

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

geri çekmedir.

Sonuç Geri çekme karelerin bileşkesi yine bir geri çekmedir.

Şimdi $n = 1$ için geri çekmeyi inceleyelim.

$$\begin{tikzcd} E_1' \arrow[r] \arrow[d] & E_1 \arrow[d, "pd_0^{(1)}=pd_0^1"] \\ S \arrow[r, "\phi"'] & R \end{tikzcd}$$

Diyagramı geri çekmedir. Burada

$$\phi^*(E_1) = E_1' = \{(e_1, s) \mid pd_0^1(e_1) = \phi(s)\} \subseteq E_1 \times S$$

dir. Şimdi Gronthendieck Yardımcı Teoremini uygulayabilmek için

$$\begin{tikzcd} E_1' \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & E_1 \arrow[d, shift right, "d_0^1"'] \arrow[d, shift left, "d_1^1"] \\ E_0' \arrow[r, "\phi_0"'] & E_0 \end{tikzcd}$$

diyagramının geri çekme diyagramı olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{tikzcd} & E_1 \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] \\ E_0' = S \arrow[r, "\phi_0"'] & E_0 = R \end{tikzcd}$$

diyagramı verildiğinde

$$\phi^*(E_1) = E_1 \times_{E_0} S = \{(e_1, s) \mid d_0^1(e_1) = \phi_0(s),\ d_1^1(e_1) = \phi_0(s)\}$$

olup

$$\begin{tikzcd} E_1' = E_1 \times_{E_0} S \arrow[r, dotted] \arrow[d, "(d_0^1)'"'] & E_1 \arrow[d, "d_0^1"] \\ S \arrow[r] & E_0 \end{tikzcd}$$

diyagramı bir geri çekmedir. Böylece Grothendieck Yardımcı Teoremi gereğince,

$$\begin{tikzcd} E_0' = S \arrow[r, "\phi_0"] \arrow[d, equal] & E_0 \arrow[d, "p"] \\ S \arrow[r, "\phi"'] & R \end{tikzcd}$$

diyagramı bir geri çekmedir. Demin verilmiş olan sonuç gereğince

$$\begin{tikzcd} E_1' \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[d] & E_1 \arrow[d, "pd_0^1"] \\ S \arrow[r, "\phi"'] & R \end{tikzcd}$$

diyagramı bir geri çekmedir.

Ayrıca

$$(d_0)'(e_1, s) = s = (d_1)'(e_1, s) \text{ ve } s_0(s) = (0, s)$$

alınırsa

$$d_1' s_0'(s) = d_1(0, s) = s$$
$$d_0' s_0'(s) = d_0(0, s) = s$$

simplisel eşitlikleri sağlanır. Böylece

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E}_1' : E_1 \times_R S \arrow[r, shift left, "d_0'"] \arrow[r, shift right, "d_1'"'] & S \arrow[l, bend left=40, "s_0'"] \end{tikzcd}$$

1-kat geri çekme simplisel cebir elde edilir.

$n = 2$ için

$$\begin{tikzcd} \phi^*(E_2) = E_2' \arrow[r] \arrow[d] & E_2 \arrow[d, "pd_0^{(2)} = pd_0' d_0^2"] \\ S \arrow[r, "\phi"'] & R \end{tikzcd}$$

olup $E_2' = E_2 \times S$ dir. Buradan

$$
\begin{tikzcd}
E'_2 = E_2 \times_R S \arrow[r, "\phi_2"] \arrow[d, shift left=2, "d'_0"] \arrow[d, "d'_1"] \arrow[d, shift right=2, "d'_2"'] & E_2 \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] \\
E'_1 = E_1 \times_R S \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[u, bend left=40, "s'_1"] \arrow[u, bend left=20, "s'_0"'] \arrow[d, shift left, "d'_0"] \arrow[d, shift right, "d'_1"'] & E_1 \arrow[u, bend right=40] \arrow[u, bend right=20] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
S = E'_0 \arrow[r, "\phi = \phi_0"] \arrow[u, bend left=30, "s'_0"] & R \arrow[u, bend right=30]
\end{tikzcd}
$$

2-kat geri çekme simplisel cebir elde edeceğiz. Burada,

$$
\begin{aligned}
d_0^{'}(e_2, s) &= (d_0(e_2), s)\\
d_1^{'}(e_2, s) &= (d_1(e_2), s)\\
d_2^{'}(e_2, s) &= (d_2(e_2), s)\\
s_0^{'}(e_1, s) &= (s_0(e_1), s)\\
s_1^{'}(e_1, s) &= (s_1(e_1), s)
\end{aligned}
$$

alınırsa,

$$
\begin{aligned}
d_1^{'}s_0^{'}(e_1, s) &= d_1^{'}(s_0^{'}(e_1, s))\\
&= d_1^{'}(s_0(e_1), s)\\
&= (d_1(s_0(e_1)), s)\\
&= (d_1 s_0(e_1), s)\\
&= (e_1, s) \qquad (\textit{çünkü} \quad d_1 s_0 = id)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
d_0^{'}s_0^{'}(e_1, s) &= d_0^{'}(s_0^{'}(e_1, s))\\
&= d_0^{'}(s_0(e_1), s)\\
&= (d_0(s_0(e_1)), s)\\
&= (d_0 s_0(e_1), s)\\
&= (e_1, s) \qquad (\textit{çünkü} \quad d_0 s_0 = id)
\end{aligned}
$$

Simplisel eşitlikleri sağladığını göstermiş oluruz. Benzer şekilde diğer özdeşlikleri sağladığıda gösterilebilir. Böylece n-kat geri çekme simplisel cebir

$$
\begin{tikzcd}
E_n \times_R S \arrow[r, shift left=2, "d'_0"] \arrow[r, dotted] \arrow[r, shift right=2, "d'_n"'] & E_{n-1} \times_R S \arrow[l, bend left=40, "s'_{n-1}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, shift left=3, "d'_0"] \arrow[r, "d'_1"] \arrow[r, shift right=3, "d'_2"'] & E_2 \times_R S \arrow[l, bend left=30, "s'_0"] \arrow[l, bend left=50, "s'_1"'] \arrow[r, shift left=2, "d'_0"] \arrow[r, shift right=2, "d'_1"'] & E_1 \times_R S \arrow[l, bend left=30, "s'_0"]
\end{tikzcd}
$$

şeklindedir. Burada dejenere ve yüz homomorfizmleri

$$d_i'(e_n, s) = (d_i(e_n), s) \qquad ;(0 \leq i \leq n)$$
$$s_j'(e_{n-1}, s) = \big(s_j(e_{n-1}), s\big) \qquad ;(0 \leq j \leq n-1)$$

olarak tanımlanır.

Öngörü: $\mathfrak{X}$ = (C,R,∂) çaprazlanmış R-modül ve $\mathfrak{CX}$ = ($\phi^*(C), S, \partial^*$) geri çekmesi olsun. **E** ve **F** sırasıyla $\mathfrak{X}$ ve $\mathfrak{CX}$ lerden elde edilen simplisel cebirler ise

$$\mathbf{F} \cong \phi^*(\mathbf{E})$$

dir.

KAYNAKLAR

[1] Andre M.,Homologie des Algebras Commutatives. *Springer-Verlag* 206, (1970).

[2] Arvasi, Z., Porter T., Simplicial and Crossed Resolutions of Commutative Algebras,Journal of Algebras,181, 426-448. (1996)

[3] Brown, R., Topology, Ellis Horwood Series in Mathematics and its applications Ellis Horwood, Ltd. 460 sf. (1988)

[4] Brown, R.,Higgins, P., On the Connection between the Second RelativeHomotopy Groups of some Related Spaces, Proc. LondonMath. Soc.,3, 36, 193-212. (1978)

[5] Curtis, E. B.,Simplicial Homotopy Theory, Adv in Math 6, 107-209 (1971)

[6] Glenn P.G., Realization of Cohomology Classes in arbitrary exact categories, Journal of pure and applied Algebra 25, 33-105, (1982)