Erciyes Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
Cilt 33, Sayı 3, 2017

Erciyes University
Journal of Institue Of Science and Technology
Volume 33, Issue 3, 2017

Açıklayıcı Değişkenlerde Hata Olması Durumunda Regresyon Modellerinin İncelenmesi

Taner ERSÖZ*[1], Öniz TOKTAMIŞ[2]
*[1]Karabük Üniversitesi Aktüerya ve Risk Yönetimi Bölümü, KARABÜK
[2]Hacettepe Üniversitesi, İstatistik Bölümü, ANKARA

(Alınış / Received: 13.11.2017, Kabul / Accepted: 26.12.2017 Online Yayınlanma / Published Online: 29.12.2017)

Anahtar Kelimeler
Ölçüm Hataları,
Açıklayıcı Değişkenlerde Hata,
Parametre Tahminleri,
İki Grup Yöntemi,
Üç Grup Yöntemi,
Araç Değişkenleri Yöntemi.

Öz: Bilindiği gibi klasik doğrusal regresyon modelinde açıklayıcı değişkenin ölçüm hatası içermediği varsayılmaktadır. Açıklayıcı değişkende ölçüm hatası olması durumunda regresyon modeline değişkenlerde hata-modeli denilmektedir. Açıklayıcı değişkende ölçüm hatası olduğu zaman, klasik doğrusal regresyon modelindeki açıklayıcı değişkenin hata terimi ile ilişkisiz olması varsayımı bozulmakta ve bunun sonucu olarak en küçük kareler yöntemi ile elde edilen parametre tahminleri yanlı ve tutarsız bulunmaktadır. Bu çalışmada, değişkenlerde -hata- modelinde parametre tahminlerini elde etmek için kullanılan yöntemler incelenmiş ve tavuk tüketimi parametre tahminlerine ilişkin bir uygulama yapılmıştır. Yapılan uygulamada tavuk tüketimi parametre tahminleri varyansları belirlenerek incelenen yöntemler karşılaştırılmıştır. Yöntemler karşılaştırılarak, uygulamadaki kolaylığı ve küçük varyanslı olması nedeniyle, açıklayıcı değişkenlerde hata olması durumunda parametre tahmini için, üç grup yönteminin kullanılmasının daha uygun olacağı sonucuna varılmıştır.

If Explanatory Variable Includes Error of Measurement Investigation of Regression Models

Keywords
Measurement Errors,
Error in Explanatory Variable,
Estimation of Parameters,
Two Grouping Method,
Three Grouping Method,
Instrumental Variables Method.

Abstract: It's assumed that in the classical linear regression model, explanatory variable doesn't include error of measurement. If exp1anatory variable includes error of measurement then the regression model is called error-in-variables model. Where there is measurement error in variables, the well-known assumption of classical regression model that the disturbance term uncorrelated with the explanatory variable will not hold. As a result of this, parameter estimation with Ordinary Least Squares will give baised and inconsistent estimates. In this study, used for obtaining error-in-variables model to get parameter estimations are compiled and an application is carried and on this subject.

tanerersoz@karabuk.edu.tr

1. Giriş

Basit bir regresyon analizinde gözlemlenerek elde edilen verilerin açıklayıcı (bağımlı) ve açıklanan (bağımsız) değişkenler olarak sınıflandırılıp, açıklayıcı değişkenlerin her birinin bağımsız değişkene etkisi doğrusal regresyon modeli kurularak belirlenir. Bu aşamadan sonra kurulan regresyon modeli kullanılarak parametre tahmini yapılabilir. Ölçümle elde edilen verilerde her zaman bir hata payı olduğu bilinmektedir. Ancak regresyon analizinde tersi belirtilmedikçe, modelde yer alan açıklayıcı değişkenlerin ölçüm hatası içermediği varsayılır. Ancak bu varsayım her zaman geçerli olmamaktadır.

Doğrusal bir regresyon denklemindeki e hata terimi, denkleme alınmamış değişkenlerin ve Y bağımlı değişkenindeki ölçüm hatalarının doğurduğu stokastik değişimi yüklenir. Açıklayıcı değişkende hata olduğu zaman, klasik doğrusal regresyon modelindeki açıklayıcı değişkenin hata ile ilişkisiz olması varsayımı bozulmakta ve bunun sonucu olarak en küçük kareler yöntemi ile elde edilen parametre tahminleri yanlı ve tutarsız bulunmaktadır.

Bu çalışmada, en küçük kareler yöntemi ile yansız ve tutarlı sonuçlar veren, en-çok olabilirlik yöntemi, gruplama yöntemleri ve araç değişkenler yöntemi incelenecek ve bu yöntemleri kullanarak, ABD'deki kişi başı tavuk tüketimi üzerine bir uygulama yapılacaktır. Çalışmanın amacı, gözlem değerlerinin parametre tahminleri yapılırken değişken hatalarının ihmal edilme durumunun model üzerindeki etkisini göstermektir.

1.1. Literatür araştırması

Ölçüm hatalarını içeren regresyon modelleriyle 19. yüzyılın başlarından itibaren karşılaşılmaktadır. Açıklayıcı değişkenlerde ölçüm hatalarına yönelik çalışmalardan bazı1arı şunlardır:

Wald (1940) yaptığı çalışmada, değişkenlerde ölçüm hatası olduğu durumda, verileri temsil eden en iyi doğruyu bularak, parametre tahminlerini elde etmiştir. Bu yöntem iki grup yöntemi olarak adlandırılır [1].

Barlett (1949) yaptığı çalışmada, Wald'ın yönteminde değişiklik yaparak, verileri x açıklayıcı değişkenin değerleri artacak şekilde sıraya dizerek, verileri üç gruba ayırmıştır. Bu yöntem üç grup yöntemi olarak adlandırılır [2].

Armstrong (1965) yaptığı çalışmada, açıklayıcı değişkenler ölçüm hatasına sahip ise, genelleştirilmiş doğrusal modelin, parametrelerini tahmin etme problemini ele almıştır [3].

Fuller (1980) yaptığı çalışmada, açıklayıcı değişkenlerde hata olması durumunda, tahmin edicilerin limit durumundaki değişimlerini araştırmıştır. Ölçüm hatalarının kovaryans matrisinin bir tahmin edicisinin mevcut olduğunu varsaymıştır. Modeller, hata yapısı ile ilgili ön bilgiye dayanarak tanımlanmıştır [4].

Harman (2005), yaptığı çalışmada, ölçüm hatalı lineer olmayan modeller ve en küçük kareler kestirimi ölçüm hatalı lineer olmayan modellerde, hata vektörü kovaryans hata matrisi ile normal dağılıma sahip olduğunu kabul ederek hata matrisinin bilindiği veya bilinmediği durumlarda tamamen türeve dayalı en küçük kareler kestirimini incelemiştir [5].

özer (2008) yaptığı çalışmada, rasyonel bekleyişler altında ekonometrik modellerin etkin tahmincilerini elde etmiştir. Bu kapsamda bazı doğrusal dışı tekniklerde kullanılan EVM methodu ile Türkiye ekonomisi için bir eşitlikler sistemi, rasyonel enflasyon bekleyiş kısıtı altında tahmin etmiştir [6].

Tanınmış ve ark. (2015), yaptıkları çalışmada, makroekonomik ve finansal değişkenlerde görülen belirsizliklerin ortadan kaldırılması ve sermaye hareketlerinin bu değişkenler uzerindeki etkisinin en alt duzeye indirilmesini amaclayan faiz koridoru uygulaması incelenmiştir. Hata duzeltme modelinde, uzun donemde birlikte hareket eden seriler arasında kısa donemde meydana gelen sapmalar ortadan kaldırılmıştır [7].

Yavuz S. (2009), yaptığı çalışmada doğrusal regresyon modellerinde otokorelasyon sorunu, otokorelasyonun saptanması yöntemleri incelemiş ve bir doğrusal modelde otokorelasyon olması durumunda modelin nasıl tahmin edileceği yöntemi araştırmıştır [8].

2. Materyal ve Metot

Çalışma kapsamında öncelikle ABD'deki tavuk tüketimine ilişkin bağımsız değişkenle açıklayıcı değişkenlerin arasındaki ilişkiyi gösteren bir basit regresyon modeli kurulmuştur. Basit doğrusal regresyon modeli (1) ile verilmiştir.

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i, \qquad i = 1,2,\dots,n \tag{1}$$

Basit doğrusal regresyon modelinde x_i açıklayıcı değişkeni sabit olmak üzere, e_i hata terimini, y_i bağımlı değişkeni göstermektedir. Bu modelde, e_i hata teriminin normal dağılımlı bir rastlantı değişkeni olduğu kabul edilerek, bu hata terimi ile ilgili olarak aşağıdaki ek varsayımlar yapılır:

1. Hata terimlerinin beklenen değeri sıfırdır: $E(e_i) = 0$'dır.
2. Hata terimlerinin varyansı sabittir ve σ_e^2 değerindedir: $E(e_i{}^2) = \sigma_e^2$'dır.
3. Hata terimleri birbirinden bağımsızdır: $cov(e_i, e_j) = E(e_i e_j) - E(e_i)E(e_j) = E(e_i e_j) = 0$
4. Hata terimleri açıklayıcı değişkenden bağımsızdır: $cov(x_i, e_i) = E(x_i e_i) = 0$

Regresyon analizinin temeli bu hata teriminin analizine dayanmaktadır. Bu varsayımlar altında parametrelerin en küçük kareler tahmin edicileri b_0 ve b_1 ile gösterilirse model (2)'deki gibi olacaktır.

$$\mathrm{y_i} = \mathrm{b}_0 + \mathrm{b}_1 \mathrm{x_i}, \quad \mathrm{i} = 1,2,\dots,\mathrm{n} \tag{2}$$

Yukarıdaki varsayımlar altında en küçük kareler yöntemi kullanılarak elde edilen tahmin ediciler, doğrusal, minimum varyanslı ve yansız tahmin edicilerdir [9,10].

Basit doğrusal denklemlerde hesaplamalar yapılırken çoğu zaman açıklayıcı değişkenlerin hata içermediği varsayılır. Ancak bu varsayım çoğu kez inandırıcı olmamakla birlikte modeldeki bağımlı ve açıklayıcı değişkenlerin bir kısmı veya tamamının hatalı ölçülmesine neden olabilir. Değişkenlerde ölçüm hatası olması durumunda basit doğrusal regresyon modelinin dördüncü varsayımı bozulmakta yani $\mathrm{cov}(\mathrm{x_i}, \mathrm{e_i}) \neq 0$ olmakta ve dolayısıyla en küçük kareler tahmin yöntemi ile elde edilen parametre tahminleri yanlı ve tutarsız bulunmaktadır.

Bu çalışmada, en küçük kareler yöntemi ile yansız ve tutarlı sonuçlar veren; en-çok olabilirlik yöntemi, gruplama yöntemleri ve araç değişkenler yöntemi kullanarak tavuk tüketimine ilişkin parametre tahmini yapılmıştır.

Regresyon modeli kurulurken değişken hatalarını dikkate alan değişkenlerde hata modelleri aşağıdaki gibidir:

- Bir açıklayıcı değişken olması durumu
- İki açıklayıcı değişken ve birinin hatalı olması durumu
- Her iki değişkenin de hatalı ölçüldüğü durum

Çalışmada ele alınan veriler, açıklayıcı değişkenlerde ölçüm hatalarının olup olmaması varsayımlarına göre sınıflandırılmıştır. Sınıflandırılan değişkenlere tahmin yöntemleri uygulanmış ve bulunan sonuçlar karşılaştırılmıştır. Kullanılan verilerde her iki açıklayıcı değişkenin de hatalı ölçülmesi durumu söz konusudur. Bu değişkenler kullanılarak yapılan parametre tahmininde değişken hatalarının göz önünde bulundurulması gerekmektedir. Değişkenlerde hata olması durumunda kullanılan tahmin yöntemleri aşağıdaki verilmiştir:

- Ters en küçük kareler yöntemi
- Gruplama yöntemleri (iki grup yöntemi, üç grup yöntemi)
- Araç değişkenler yöntemi
- En-çok olabilirlik yöntemi

2.1. Değişkenlerde hata modeli

Açıklayıcı değişkenlerde ölçüm hatasına sahip olan istatistiksel modellere değişkenlerde hata modeli (error-in-variables model) denilmektedir. Değişkenlerin hatalı olma durumlarına göre farklı yöntemler kullanılarak hesaplanabilir.

2.1.1. Bir açıklayıcı değişken olması durumu

Sadece bir açıklayıcı değişkende ölçüm hatası olması durumunda basit doğrusal regresyon denkleminde x ve y bileşenlerine u ve v ölçüm hataları eklenerek elde edilen gözlemlenen değerler, $X = x + u$ ve $Y = y + v$ 'dir.

u ve v ölçüm hatalarının aşağıdaki varsayımları sağladığı kabul edilir:

- Hata terimlerinin beklenen değerleri sıfırdır: $E(u) = 0$ ve $E(v) = 0$'dır.
- Hata terimlerinin varyansları sabittir: $E(u^2) = \sigma_u^2$ ve $E(v^2) = \sigma_v^2$'dir.
- Hata terimleri ardışık bağımsızdır: $E(u_i u_j)0$ ve $E(v_i v_j) = 0$ $(i \neq j$ için)'dir.
- Değişkenlerdeki ölçüm hataları, değişkenlerin gerçek değeri ile ilişkili değildir: $\mathrm{cov}(u, x) = \mathrm{cov}(v, y) = \mathrm{cov}(u, y) = \mathrm{cov}(v, x) = 0; E(xu) = E(vy) = E(uy) = E(vx) = 0$'dır.
- e hata terimi, x gerçek değerinden bağımsızdır: $E(ex) = 0$'dır.
- İki hata terimi birbirinden bağımsızdır, $\mathrm{cov}(u, v) = 0$, $E(uv) = 0$'dır.

Bu durumda basit bir regresyon modelinde gözlemlenen x ve y değerleri yerine konulursa, modelde bir açıklayıcı değişken olması durumunda değişkenlerdeki hata modeli elde edilecektir.

$$Y - v = \beta_0 + \beta_1(X - u) + e \qquad \text{ya da} \qquad Y = \beta_0 + \beta_1 X + w \tag{3}$$

(3) ile verilen modeldeki *w ile* ifade edilen hata terimi aşağıda verilen özellikleri sağlamaktadır [11,12].

- w'nin beklenen değeri sıfırdır, çünkü birinci varsayım gereğince; $E(w) = E(e + v - \beta_1 u) = E(e) + E(v) - \beta_1 E(u) = 0$'dır.
- w'nin varyansı sabittir, $\mathrm{var}(w) = E(w^2) = \sigma_w^2 = \sigma_e^2 + \sigma_v^2 + \beta_1^2\sigma_u^2$'dir. Burada e, u ve v'nin varyansları sabit olduğu için σ_w^2'de sabittir.
- u ve v'ler ardışık bağımlı olmadığından w'ler de ardışık bağımlı değildirler, yani $E(w_i w_j) = 0$'dır

(3) ile verilen değişkenlerde hata modelinin, (1) ile verilen klasik doğrusal regresyon modelinden farkı, w hata teriminin x açıklayıcı değişkeninden bağımsız olmaması yani $\mathrm{cov}(w, x) \neq 0$ olmaması yani modeldeki w teriminin x açıklayıcı değişkeninden bağımsız olmamasıdır. Bu durum aşağıdaki biçimde kanıtlanabilir:

$$\mathrm{cov}(w, x) = E(wX) - E(w)E(X)$$
$$\mathrm{cov}(w, X) = E[(e + v - \beta_1 u)X] - E(e + v - \beta_1 u)E(X)$$
$$\mathrm{cov}(w, X) = E(eX) + E(vX) - \beta_1 E(uX) - [E(e) + E(v) - \beta_1 E(u)]E(x)$$

hatalarla ilgili varsayımlardan dolayı, $E(eX) = E(vX) = E(e) = E(uX) = 0$ olmaktadır. Denklemde x yerine x+u konulursa (4) ile verilen kovaryans denklemi elde edilir.

$$\mathrm{cov}(w, X) = -\beta_1 \sigma_u^2 \tag{4}$$

Görüldüğü gibi β_1 ve σ_u^2 sıfır olamayacağından $\mathrm{cov}(w, X) \neq 0$'dır. Yani, modeldeki w hata terimi ile x açıklayıcı değişkeni bağımsız değildirler. Bu durumda en küçük kareler yönteminin varsayımlarından biri bozulmuş olmaktadır. Buna rağmen en küçük kareler yöntemini kullanarak parametreler tahmin edilirse yanlı ve tutarsız olduğu görülür.

(3) ile verilen modelde hata kareler toplamı (4) ile verilmiştir.

$$Ew^2 = \sum (Y - \beta_0 - \beta_1 X)^2 \tag{5}$$

(5) ile verilen toplamı en küçük yapan b_0 ve b_1 değerlerini bulmak için alınan kısmi türevler sonucu elde edilen normal denklemler (6) ile verilmiştir.

$$\sum_{i-1}^{n} Y_i = nb_0 + b_1 \sum_{i-1}^{n} X_i$$
$$\sum_{i-1}^{n} X_i Y_i = b_0 \sum_{i-1}^{n} X_i + b_1 \sum_{i-1}^{n} X_i^2 \tag{6}$$

Bu normal denklemlerin çözümünde β_1 parametresinin tahmini yapıldıktan sonra Y_i değerleri yerine konularak ve $\sum_{i-1}^{n} w_i = 0$ bilgisinden faydalanarak (7) ile verilen denklem elde edilmiştir.

$$b_1 = \beta_1 + \frac{n \sum_{i-1}^{n} X_i w_i}{n \sum_{i-1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i-1}^{n} X_i\right)^2} \tag{7}$$

$cov(w, X) \neq 0$ olduğundan, $\sum_{i-1}^{n} X_i w_i \neq 0$ olacaktır. Bunun sonucunda $E(b_1) \neq \beta_1$ elde edilecektir. Yani b_1, β_1'in yanlı bir tahmin edicisidir. (7) ifadesi yeniden yazılırsa, b_1 değeri ve olasılık limiti ($plimb_1$) (8) ile verildiği gibi olur.

$$b_1 = \beta_1 + \frac{n \sum_{i-1}^{n} X_i w_i / n}{\left(n \sum_{i-1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i-1}^{n} X_i\right)^2\right)/n}$$
$$plimb_1 = \beta_1 + \frac{\beta_1 \sigma_u^2}{\sigma_x^2 + \sigma_u^2} \tag{8}$$

Bu ifade $\frac{\sigma_u^2}{\sigma_x^2}$'in pozitif ve $\left(1 + \frac{\sigma_u^2}{\sigma_x^2}\right)$'nın birden büyük olmasından dolayı β_1'in olduğundan daha küçük tahmin edileceğini göstermektedir. Bu durumda b_1'e aşağı doğru yanlıdır denir, β_0'ın en küçük kareler tahmin edicisi b_0 (9) ile verildiği gibi olur.

$$b_0 = \overline{Y} - b_1 \overline{X} \tag{9}$$

Bu ise en küçük kareler tahmin edicisinin β_0'ı olduğundan daha büyük tahmin edeceğini göstermektedir. Bu durumda b_0 yukarı doğru yanlıdır denir. $\lambda = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_x^2 + \sigma_u^2}$ yazılırsa, β_1 en küçük kareler tahmin edicisinin yanı $\beta_1 \lambda$ olacaktır.

(8) ifadesindeki olasılık limiti $n \to \infty$ iken b_1'in β_1'e yaklaşmadığını yani b_1'in asimptotik olarak yanlı ve dolayısıyla tutarsız olduğunu göstermektedir.

2.1.2. İki açıklayıcı değişken ve birinin hatalı olması durumu

Değişkenlerde hata olmadığı durumda gerçek modelin (10)'daki gibi olduğu varsayılırsa değişkenlerde hata olması durumunda x_1, x_2 ve y yerine gözlemlenen değerler, $Y = y + v$, $X_1 = x_1 + u$ ve $X_2 = x_2$ olur.

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + e \tag{10}$$

Tek değişkende hata olduğu varsayıldığından $X_2 = x_2$ olmaktadır. Bu bölümde de u ve v'ler ölçüm hataları; x_1, x_2 ve y sistematik bileşenlerdir. Hem u'nun hem de v'nin alt bölüm 2.1.1'deki varsayımları sağladığını kabul edilir. Bu varsayımlarla beraber regresyon modelinde x_1 ve x_2 gibi iki açıklayıcı değişken olduğundan, x_1, x_2 hata terimleri ile ilgili değişkenlerdeki ölçüm hatalarının gerçek değerleri ile ilişkili olmadığı ($cov(u, x_1) = cov(u, x_2) = cov(u, y) = cov(v, x_1) = cov(v, x_2) = cov(v, y) = 0$) varsayımı da yapılır. Yani $E(ux_1) = E(ux_2) = E(uy) = E(vx_1) = E(vx_2) = E(vy) = 0$ demektir. Bu durumda, gözlemlenen terimlerle ifade edilen regresyon denklemi (11) ile verildiği gibi olacaktır.

$$Y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + w \quad \text{ise} \quad w = e + v - \beta_1 u \tag{11}$$

Genelliği bozmadan notasyonlarda azaltma yapmak için $\mathrm{var}(X_1) = \mathrm{var}(X_2) = 1$ ve $\mathrm{cov}(X_1, X_2) = \rho$ olarak alınır. β_1 ve β_2 gerçek parametrelerinin tahminleri olan b_1 ve b_2'yi klasik en küçük kareler yöntemi ile bulmak istenirse (11) ile verilen modelde uygulanmalıdır. Bu durumda, normal denklemler, örneklem hacmine bölünüp olasılık limiti alınır ve X_1 ve X_2 gözlemlenen değerleri normalleştirildiğinde (12) ve (13) elde edilir.

$$\mathrm{plim} b_1 + \mathrm{plim} b_2 = \mathrm{cov}(X_1, Y) \tag{12}$$

$$\mathrm{plim} b_1 + \mathrm{plim} b_2 = \mathrm{cov}(X_2, Y) \tag{13}$$

Bu iki eşitlikteki $\mathrm{cov}(X_1, Y)$ ve $\mathrm{cov}(X_2, Y)$, yani X_1 ile Y ve X_2 ile Y arasındaki ilişki (14) ile verildiği gibidir.

$$\mathrm{cov}(X_1, Y) = \beta_1 + \beta_2\rho + \mathrm{cov}(w, X_1) \tag{14}$$

Burada, $\lambda = \frac{\sigma_u^2}{\mathrm{var}(X_1)} = \sigma_u^2$ olduğu göz önüne alınır ve bulunan $\mathrm{cov}(w, X_1)$ ifadesi (14)'teki eşitlikte yerine konulursa, aralarındaki ilişki (15) ve (16) ile verildiği gibi olur.

$$\mathrm{cov}(X_1, Y) = \beta_1 + \beta_2\rho - \beta_1\lambda \tag{15}$$

$$\mathrm{cov}(X_2, Y) = \beta_1\rho + \beta_2 \tag{16}$$

(15) ve (16) ifadeleri, (12) ve (13) eşitliklerinde yerine konulursa olasılık limitleri (17) ve (18)'deki gibi olur.

$$\mathrm{plim} b_1 = \beta_1 - \frac{\beta_1\lambda}{1 - p^2} = \beta_1\left(1 - \frac{\lambda}{1 - p^2}\right) \tag{17}$$

$$\mathrm{plim} b_2 = \beta_2 + \frac{\beta_1\lambda\rho}{1 - p^2} \tag{18}$$

(11) ile verilen modelde çözümlemenin bir anlam ifade etmesi için ile ilgili bazı kısıtların yerine getirilmesi gerekmektedir. Bu ise, $\mathrm{var}(X_1)\mathrm{var}(X_2) - [\mathrm{cov}(X_1, X_2)]^2 \geq 0$ eşitliliğinin sağlanması zorunluluğundan ortaya çıkmaktadır [12].

$\mathrm{var}(X_1) = 1$ olduğundan, $\mathrm{var}(x_1) = 1 - \lambda$ olur. Yine aynı şekilde $\mathrm{var}(X_2) = \mathrm{var}(x_2) = 1$ ve$\mathrm{cov}(X_1, X_2) = \mathrm{cov}(x_1, x_2) = \rho$ 'dir. Buradan, $1 - \lambda - \rho^2 \geq 0$ ya da $\lambda \leq 1 - \rho^2$ olmalıdır. Bu koşul, eğer ρ^2 büyük ya da X_1 ile X_2 arasında çoklu bağlantı (multicollinearity) varsa, bu koşula daha fazla uyulması gerekmektedir. Örneğin $\rho^2 = 0{,}99$ ise $\lambda > 0{,}01$ olduğu varsayılamayabilir. Eğer $\lambda = 0{,}01$ ise bu bize x_1 ve x_2 arasındaki ilişkinin çok fazla olduğunu gösterir. Eğer, X_1 ve X_2 arasında oldukça yüksek ilişki var ise, değişkenlerde hata modelini kullanamayacağımızı ve x_1 'deki hata varyansının büyük olduğunu gösterir [8].

(17) ve (18) deki eşitlikte b_2 deki yan= $-\rho$ (b_1'deki yan) şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda. (17)'deki eşitlikte $\rho = 0$ konulursa β_1'deki yan, $-\beta_1\lambda$ olur. b_1'in sıfıra doğru yanlı olup olmaması λ'nın $(1 - \rho^2)$'den küçük olup olmamasına bağlıdır, b_2'deki yanın yönü ise $\beta_1\rho$'nin işaretine bağlıdır.

2.1.3. Her iki değişkenin de hatalı ölçüldüğü durum

x_1 ve x_2 açıklayıcı değişkenlerinin her ikisinin de hatalı ölçüldüğü durumdur. β_1 ve β_2 parametrelerindeki yan ile, değişkenlerde ölçüm hatası olması durumunda parametre tahminlerinin nasıl değiştiği araştırılır. Modelin (10) ile verilen eşitlik olduğu varsayılırsa, x_1 ve x_2 açıklayıcı değişkenlerinin her ikisi de hatalı ölçüldüğünden, u_1 ve u_2 gibi iki hata teriminin açıklayıcı değişkenlere ilave edilmesi gerekmektedir. Bu durumda gözlemlenen değişkenler;

$Y = y + v,\ X_1 = x_1 + u_1, X_2 = x_2 + u_2$ olacaktır.

Bu bölümde de u_1, u_2 ve v ölçüm hataları, x_1, x_2 ve y sistematik bileşenlerdir. u_1, u_2 ve v'nin alt bölüm 2.1.1'deki klasik varsayımları sağlandığı kabul edilir. Modele u_1 ve u_2 gibi iki hata terimi eklendiğinden, bu hata terimleri ile ilgili ilave bir varsayım yapılması gerekmektedir. Bu varsayım, u_1, u_2 ve v'nin açıklayıcı değişkenler olan x_1 ve x_2'den bağımsız olduğudur. Yani, $\text{cov}(u_1, x_1) = \text{cov}(u_1, x_2) = \text{cov}(u_2, x_1) = \text{cov}(u_2, x_2) = \text{cov}(v, x_1) = \text{cov}(v, x_2) = \text{cov}(u_1, y) = \text{cov}(u_2, y) = \text{cov}(v, y) = 0$'dır,Yani $E(u_1x_1) = E(u_1x_2) = E(u_2x_1) = E(u_2x_2) = E(vx_1) = E(vx_2) = E(u_1y) = E(u_2y) = E(vy) = 0$'dır. Bu durumda, gözlemlenen terimlerle tahmin edilen regresyon modelinin (19) ile verildiği gibi olacaktır.

$$Y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + w \ \text{ ise } \ w = e + v - \beta_1 u_{1-} \beta_2 X_2 \tag{19}$$

Notasyonlarda azaltma yapmak için $\text{var}(X_1) = 1$, $\text{var}(X_2) = 1$ ve $\text{cov}(X_1, X_2) = \rho$ olacak biçimde X_1 ve X_2 gözlemlenen değişkenleri normalleştirilir. β_1 ve β_2 gerçek parametrelerinin tahmini olan b_1 ve b_2'yi klasik en küçük kareler yöntemi ile bulmak istenirse (19) ile verilen modelde uygulanmalıdır. Bu durumda, normal denklemler, örneklem hacmine bölünüp olasılık limiti alınır ve X_1 ve X_2 gözlemlenen değerleri normalleştirildiğinde (20) ve (21) elde edilir.

$$\text{plim} b_1 + \text{plim} b_2 = \text{cov}(X_1, Y) \tag{20}$$

$$\rho \text{plim} b_1 + \text{plim} b_2 = \text{cov}(X_2, Y) \tag{21}$$

Bu eşitliklerde de X_1 ile Y ve X_2 ile Y arasındaki ilişki bilinmemektedir. Her iki değişkende hata olması durumunda da bu ilişkilerin nasıl olduğu aşağıda eşitlikler ile araştırılarak verilmiştir. Buradaki kovaryans işlemleri alt bölüm 2.2.2'deki kovaryans işlemleri ile aynıdır. Ancak her iki değişkende hata olması durumunda bulunan sonuç, tek değişkende hata olması durumunda bulunan sonuçtan farklı olacaktır. X_1 ile Y arasındaki ilişki (22) ile gösterilmiştir.

$$\text{cov}(X_1, Y) = \beta_1 + \beta_2 + \text{cov}(w, X_1) \tag{22}$$

X_1 ile Y arasındaki ilişkiyi bulmamız için, w ile X_1 arasındaki ilişkiyi bulmamız gerekmektedir. Bunun için $\text{cov}(w, X_1)$ terimi hata varsayımları değerlendirilerek ve X_1 yerine x_1+u_1 yazılarak (23)'teki eşitlik elde edilir.

$$\text{cov}(X_1, Y) = \beta_1 + \beta_2 \rho - \beta_1 \lambda_1 \tag{23}$$

X_2 açıklayıcı değişkeni ile Y bağımlı değişkeni arasındaki ilişkiyi bulmak için izlenen yol, $\text{cov}(X_1, Y)$'yi bulmak için izlediğimiz yol ile aynıdır. X_2 ile Y arasındaki ilişki (24)'teki gibidir.

$$\text{cov}(X_2, Y) = \beta_1 \rho + \beta_2 - \beta_2 \lambda_2 \tag{24}$$

(23) ve (24) eşitliklerini (20) ve (21) eşitliklerin de yerine konulursa olasılık limitleri (25) ve (26) ile gösterildiği gibidir.

$$\text{plim} b_1 = \beta_1 - \frac{\beta_1 \lambda_1 - \rho \beta_2 \lambda_2}{1 - \rho^2} \tag{25}$$

$$\text{plim} b_2 = \beta_2 - \frac{\beta_2 \lambda_2 - \rho \beta_1 \lambda_1}{1 - \rho^2} \tag{26}$$

Bu iki eşitlikte $\lambda_2 = 0$ konursa, (25) ve (26)'daki eşitlikleri elde ederiz. Her iki değişkende de hata olması durumunda model analizinin anlamlı olması için $(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) - \rho^2 \geq 0$ koşulu sağlanmalıdır [12].

2.2. Değişkenlerde hata olduğunda tahmin yöntemleri

Açıklayıcı değişkenlerde hata olduğu durumda parametreleri tahmin etmek için geliştirilecek yöntemler, bu hataların neden olduğu değişimleri de dikkate almak zorundadır. Bu soruna klasik yaklaşımlar en küçük kareler ve en çok olabilirlik yöntemleridir. Her iki yönteminde ortak yanı, bu değişimler hakkında ek ön bilgi olmadıkça tutarlı sonuçlar vermemeleridir. Bu klasik yöntemlerin dışında ön bilgi gerektirmeyen çeşitli tahmin yöntemleri geliştirilmiştir.

2.2.1. Ters en küçük kareler yöntemi

Bu yöntem bağımlı değişkenlerde değil, yalnız açıklayıcı değişkende hata olduğu zaman uygulanabilir. y'nin ölçüm hatası içermediği varsayılır. y ve x arasındaki ilişki (27)'de gösterildiği gibi olduğu varsayılırsa, = y, $X = x + u$ olduğu göz önüne alınırsa yukarıdaki ilişki $Y = \beta_0 + \beta_1(X - u)$ olacaktır. X açıklayıcı değişkeni için model yeniden yazılırsa (28) ile verilen eşitlik elde edilecektir.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x \tag{27}$$

$$X = -\frac{\beta_0}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_1} y + u \tag{28}$$

$\alpha_0 = -\frac{\beta_0}{\beta_1}$ ve $\alpha_1 = \frac{1}{\beta_1}$ yazılırsa, (28) ifadesi, $X = \alpha_0 + \alpha_1 Y + u$ olacaktır. Bu ilişkiye en küçük kareler yöntemi uygulanırsa, Y ve u bağımsız olduklarından, α_0 ve α_1'in yansız tahminleri $\widehat{\alpha}_0$ ve $\widehat{\alpha}_1$ (29)'daki gibi elde edilir:

$$\widehat{\alpha}_1 = \frac{\sum(X-\bar{x})(Y-\bar{y})}{\sum(Y-\bar{y})}, \widehat{\alpha}_0 = \overline{X} - \widehat{\alpha}_1 \overline{Y} \tag{29}$$

Bu tahmin ediciler, $\widehat{\alpha}_0 = -\frac{\beta_0}{\beta_1}, \widehat{\alpha}_1 = \frac{1}{\beta_1}$ eşitliklerinde yerlerine konulursa, β_0 ve β_1 katsayılarının yanlı ama tutarlı tahminleri b_0 ve b_1 (30) ile ifade edildiği gibi olur.

$$b_1 = \frac{1}{\widehat{\alpha}_1}, b_0 = -\frac{\widehat{\alpha}_0}{\widehat{\alpha}_1} \tag{30}$$

Görüldüğü gibi b_1, $\widehat{\alpha}_1$'in tersidir. Bu nedenle bu yönteme ters en küçük kareler denilmektedir [11].

2.2.2. Gruplama yöntemleri

2.2.2.1. İki grup yöntemi

Açıklayıcı değişkenlerde hata modelinde parametrelerin tahmini için gruplama yöntemi ilk kez Wald tarafından 1940 yılında verilmiştir. Değişkenlerde hata modeli (31) ile verilmiştir.

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_1 \tag{31}$$

Burada $X_i = x_i + u_i$, $Y_i = y_i + v_i$'dir. Hata tahminleri olan u_i ve v_i için aşağıdaki varsayımlar yapılmıştır.

- $u_1, u_2, \dots, u_n$ hata terimleri aynı dağılımlı ilişkisiz rastlantı değişkenleridir. u'nun ortalaması sıfır, varyansı σ_u^2'dir.
- $v_1, v_2, \dots, v_n$ hata terimler aynı dağılımlı ilişkisiz rastlantı değişkenleridir. v'nin ortalaması sıfır, varyansı σ_v^2'dir.
- u_1 ve v_1 rastlantı değişkenleri ilişkisizdir. Bu varsayımlar altında $E(X_i) = x_i$, $E(Y_i) = y_i$'dir. Wald önce n gözlemli bir örneklem seçip gözlemleri iki gruba ayırmıştır. Bunun için işlemlerde kolaylık olması için gözlem sayısının çift olduğunu varsayılmıştır (n=2m).

Gözlemlenen X değerlerini küçükten büyüğe sıralayarak, $X_1, X_2, \dots, X_m, X_{m+1}, \dots, X_n$ sıralı diziyi elde etmiş ve bunlara karşılık gelen Y değerlerini, $Y_1, Y_2, \dots, Y_m, Y_{m+1}, \dots, Y_n$ dizisi ile göstermiştir. Wald,

$$a_1 = \frac{(X_1+X_2+,\dots,+X_m)-(X_{m+1}+,\dots,+X_n)}{m}$$
$$a_2 = \frac{(Y_1+Y_2+,\dots,+Y_m)-(Y_{m+1}+,\dots,+Y_n)}{m}$$

ifadelerini kullanarak (32) ile verilen varsayımı ileri sürmüştür.

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{m}\left|\sum_{i=1}^{n} x - \frac{1}{m}\sum_{i=m+1}^{n} x_i\right| > 0 \tag{32}$$

Varsayımı altında, β_1'in tutarlı bir tahmin edicisi $b_1 = \frac{a_2}{a_1}$ ifadesini önermiştir. Wald, b_1'in, β_1'in tutarlı bir tahmin edicisi olduğunu yani varsayımlar ışığında $n \to \infty$ iken b_1'in stokastik olarak β_1'e yaklaştığını aşağıdaki biçimde göstermiştir: a_1'in beklenen değeri $\bar{a}_1$ ile a_2'nin beklenen değeri $\bar{a}_2$ ile gösterilirse $\bar{a}_1$ ve $\bar{a}_2$ (33)'teki gibi olur

$$\bar{a}_1 = \frac{(X_1+X_2+,\ldots,+X_m)-(X_{m+1}+,\ldots,+X_n)}{m} \qquad \text{ise } \bar{a}_2 = \beta_1\bar{a}_1 \text{ ya da } \frac{\bar{a}_2}{\bar{a}_1} = \beta_1 \qquad (33)$$
$$\bar{a}_2 = \frac{(Y_1+Y_2+,\ldots,+Y_m)-(Y_{m+1}+,\ldots,+Y_n)}{m}$$

$(a_1 - \bar{a}_1)$'in varyansı $\frac{4\sigma_u^2}{n}$ ve $(a_2 - \bar{a}_2)$'nin varyansı $\frac{4\sigma_v^2}{n}$'dir. Bu durumda $n \to \infty$ iken a_1 ve a_2 stokastik olarak sırasıyla $\bar{a}_1$ ve $\bar{a}_2$'ye yakınsar. Bu sonuç ve (2.26)'daki varsayımdan, $\frac{a_2}{a_1}$ oranı da stokastik olarak $\frac{\bar{a}_2}{\bar{a}_1} = \beta_1$'e yakınsar. Bu da $\frac{\bar{a}_2}{\bar{a}_1}$'nin $\frac{a_2}{a_1}$'in tutarlı bir tahmini olduğunu gösterir. β_0'ın tahmini $b_0 = \bar{Y} - b_1\bar{X}$'dir.

Burada $\bar{X} = \frac{(X_1+X_2+\cdots+X_n)}{n}$, $\bar{Y} = \frac{(Y_1+Y_2+\cdots+Y_n)}{n}$ dir. $\bar{Y}$ stokastik olarak $\bar{y}$'ye, $\bar{X}$, $\bar{x}$'e ve b_1, β_1'e ve b_0, stokastik olarak $\bar{y} - \beta_1\bar{x}$'e yakınsar. Yani, $\beta_0 = \bar{y} - \beta_1\bar{x}$ dir. Bu durumda b_0 stokastik olarak β_0'a yakınsar [1]. Ayrıca Wald, örneklem momentlerinden hareketle, hata varyansları için, (34) ile verilen tahmin edicilerini ve β_0 ile β_1 için güven aralıklarını elde etmiştir [1].

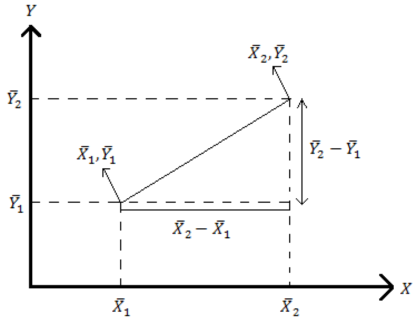
$$\hat{\sigma}_u^2 - [E(S_x^2) - \frac{E(S_{xy})}{b_1}]\frac{n}{n-1}$$
$$\hat{\sigma}_v^2 - [E(S_y^2) - b_1E(S_{xy})]\frac{n}{n-1} \qquad (34)$$

(32)'de verilen varsayım normal dağılıma sahip değişkenler için geçerli değildir. Normal dağılım sonsuz genişliğe sahip olduğundan, gruplama yöntemi bu değişkenler için kullanılamaz [13,14].

Wald tarafından önerilen tahmin edici, ifadesinin pay ve paydası m ile bölünürse, biçiminde yazabiliriz. Bu ise, b_1'i bulmak için kullanılan iki grup yönteminin, koordinatları gözlemlerin iki alt kümesinin aritmetik ortalamaları olan $(\bar{X}_1, \bar{Y}_1)$ ve $(\bar{X}_2, \bar{Y}_2)$ noktalarından geçen doğrunun eğimini bulmaktan başka bir şey olmadığını göstermektedir. Şekil 2.1'de doğrunun eğiminin (35) ile verildiği gibi olduğu görülmektedir [11,14].

$$b_1 = \frac{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2}{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} \qquad (35)$$

Şekil 1'de $(\bar{X}_1, \bar{Y}_1)$ ve $(\bar{X}_2, \bar{Y}_2)$ noktalarından geçen doğru ve b_1 Şekil 1'de verildiği gibidir.



Şekil 1. $(\bar{X}_1, \bar{Y}_1)$ ve $(\bar{X}_2, \bar{Y}_2)$ noktalarından geçen doğru

İki grup yöntemi ile elde edilen parametre tahmininin varyansı,

$$V(b_1) = \frac{2s^2}{(\bar{X}_2 - \bar{X}_1)^2}$$

dir (Leser, 1966). Burada,

$$S^2 = \frac{S_y^2 + \beta_1^2 S_x^2 - 2\beta_1 S_{xy}}{n-2}$$

ve

$$S_y^2 = \sum_{i=1}^{m}(y_i - \bar{y}_1)^2 + \sum_{i=m+1}^{n}(y_i - \bar{y}_2)^2$$
$$S_x^2 = \sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x}_1)^2 + \sum_{i=m+1}^{n}(x_i - \bar{x}_2)^2$$
$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x}_1)(y_i - \bar{y}_1) + \sum_{i=m+1}^{m}(x_i - \bar{x}_2)(y_i - \bar{y}_2)$$

dir.

İki grup yöntemi tutarlı tahminler vermektedir. Ancak bu tahminlerin varyansları, en küçük varyanslar olmadığından bu tahminler de en iyi tahminler değildir. Böylece iki grup yöntemini benimsemekle asimptotik yansızlık özelliğine, en küçük varyans özelliğine oranla daha büyük bir ağırlık verilmiş olmaktadır [11].

2.2.2.2. Üç grup yöntemi

Bartlett tarafından 1949 yılında geliştirilen bu yöntem ile bulunan parametre tahminleri yansız ve tutarlı olmaktadır. Bartlett iki grup yerine üç grup kullandığında gruplandırma yönteminin etkinliğinin artacağını göstermiştir. Bu yöntem de iki grup yöntemi gibi alt örneklemlerin ortalamalarından geçen bir doğrunun eğimini bulma düşüncesine dayanmaktadır. Bu yöntemde, $X = x + u$ $Y = y + v$ ve u ve v hataları bağımsız olmak üzere,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + e_i, \qquad i = 1,2,\dots,n$$

ilişkisinin parametrelerini tahmin etmek için aşağıdaki yol izlenmektedir:

1. $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ gözlemleri X'in artan değerlerine göre sıraya dizilip üç gruba ayrılır. Gözlem sayısı üç ile tam olarak bölünmüyorsa, her grup için eşit sayıda gözlem alınıp, diğer gözlemler örneklem dışında bırakılır. Ortadaki grup çözümlemeye alınmaz. Bartlett, gruplardaki gözlem sayıları eşit olduğu zaman, b_1'in örneklem varyansının minimum olacağını göstermiştir.
2. Birinci grup ile üçüncü grup için aritmetik ortalamalar hesaplanır. Aritmetik ortalamalar birinci grup için $(\overline{X}_1, \overline{Y}_1)$, üçüncü grup için $(\overline{X}_3, \overline{Y}_3)$ ile gösterilerek, aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\overline{X}_1 = 3\sum_{i=1}^{n/3} \frac{X_i}{n} \qquad \overline{Y}_1 = 3\sum_{i=1}^{n/3} \frac{Y_i}{n}$$
$$\overline{X}_3 = 3\sum_{i=\frac{2n}{3}+1}^{n} \frac{X_i}{n} \qquad \overline{Y}_3 = 3\sum_{i=\frac{2n}{3}+1}^{n} \frac{Y_i}{n}$$

üç grup yönteminin tahmin edicisi b_1 ile gösterilirse (36)'daki gibi olur.

$$b_1 = \frac{\overline{Y}_3 - \overline{Y}_1}{\overline{X}_3 - \overline{X}_1} \tag{36}$$

Üç grup yöntemi ile bulunan parametre tahminleri yansız ve tutarlıdır [2,11]. Üç grup yöntemi ile elde edilen parametre tahmininin varyansı, $\text{Varyans}(b_1) = \frac{6s^2}{n(\overline{X}_3 - \overline{X}_1)^2}$'dır [15].

Burada

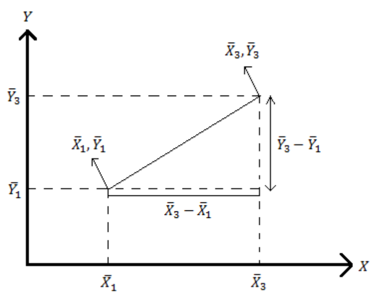
$$S^2 = \frac{S_y^2 + \beta_1^2 S_x^2 - 2\beta_1 S_{xy}}{n-3}$$

ve

$$S_y^2 = \sum_{i=1}^{n/3} (y_i - \bar{y}_1)^2 + \sum_{i=\frac{n}{3}+1}^{2n/3} (y_i - \bar{y}_2)^2 + \sum_{i=\frac{2n}{3}+1}^{n} (y_i - \bar{y}_3)^2$$
$$S_x^2 = \sum_{i=1}^{n/3} (x_i - \bar{x}_1)^2 + \sum_{i=\frac{n}{3}+1}^{2n/3} (x_i - \bar{x}_2)^2 + \sum_{i=\frac{2n}{3}+1}^{n} (x_i - \bar{x}_3)^2$$

dir.

b_1 tahmini Şekil 2'de görüldüğü gibi koordinatları birinci ve üçüncü grubun aritmetik ortalamaları olan $(\overline{X}_1, \overline{Y}_1)$ ve $(\overline{X}_3, \overline{Y}_3)$ noktalarından geçen doğrunun eğimidir.



Şekil 2. $(\overline{X}_1, \overline{Y}_1)$ ve $(\overline{X}_3, \overline{Y}_3)$ noktalarından geçen doğru

2.2.3. Araç değişkenler yöntemi

Bu yöntem Reiersol ve Geary tarafından geliştirilmiştir. Açıklayıcı değişkenlerde hata olması durumunda kullanılan yöntemlerden biri olan bu yöntem, hatalı ölçüldüğü varsayılan değişken yerine, aynı özelliğe sahip başka bir değişkenin kullanılması esasına dayanmaktadır. Bu yeni değişkene araç değişkeni denilmektedir. Örneğin tereyağının kalitesi ile tereyağının fiyatı arasındaki doğrusal ilişki ile ilgileniliyorsa, araç değişkenler, margarinin kalitesi veya margarinin fiyatı ya da ikisi de olabilir. $Y = \beta_0 + \beta_1 X + w$, $w = v - \beta_1 u$ modelinde X ile w bağlantılıyken basit en küçük karelerin tahminleri $\sum Xw$ toplamının sıfırdan farklı olması yüzünden yanlı ve tutarsız olmaktadır. Araç değişkenlerinin gerisinde yatan düşünce, X ile yüksek derece de ilişkili ancak, u ve v hata terimleri ile ilişkisiz başka bir Z değişkeni bulup, tutarlı tahminler elde etmektir. Kısaca araç değişkenleri aşağıdaki özellikleri sağlamaktadır
:

- Araç değişkenleri arasında tam çoklu doğrusal bağımlılık olmamalıdır.
- Araç değişkenleri, hata terimi ile ilişkili olmamalıdır.
- En küçük karelerin temel varsayımlarını sağlamalıdır.
- Ölçüm hatası içeren değişken ile bu değişken yerine modele alınacak araç değişkeni arasında kuvvetli bir ilişki olmalıdır.

Yukarıdaki model ortalamadan ayrılışlar ile ifade edilirse, $y = \beta_1 x + w$olmaktadır. Burada $y = Y - \overline{Y}$, $x = X - \overline{X}$'dir. Bu modelde normal denklem, x ile çarpılıp, tüm gözlemler üzerinden toplam alınarak bulunur. Normal denklem (37)'deki gibidir.

$$\sum xy = \beta_1 \sum x^2 + \sum xw \tag{37}$$

Bu denklemde x ve w'ler bağlantısızsa, $E(\sum xw) = \sum E(xw) = 0$ olduğundan normal denklemlerdeki $\sum xw$ terimi ihmal edilebilir ve β_1 tahmini bulunabilir. x ile w ilişkili ise $\sum(xw) \neq 0$ olacağından normal denklemler işlemez hale gelir. Fonksiyonu x ile çarpmak yerine w ile bağlantısız z değişken bulup da ilk fonksiyonu z ile çarparsak, $\sum zy = \beta_1 \sum zx + \sum zw$ bulunur. z ile w ilişkisiz olduklarından $\sum wz$ ihmal edilebilir. Bu durumda β_1'in tahmini (38)'deki gibi elde edilir [11].

$$b_i = \frac{\sum z_i y}{\sum z_i x_i} \tag{38}$$

Araç değişkenleri yöntemi tutarlı tahminler verir. Tutarlılık şöyle gösterilebilir:

Değişkenlerde ölçüm hatası olduğu durumda regresyon modeli, $y_i = \beta_1 x_i + w$ olduğu varsayılırsa, (38) eşitliğinde yerine koyulup limit alınırsa (39) eşitliği elde edilir.

$$\text{plim}b_1 = \beta_1 + \text{plim}[\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i z_i}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i z_i}] = \beta_1 + \frac{\text{cov}(z,w)}{\text{cov}(z,x)} = \beta_1 \tag{38}$$

Burada $\text{cov}(z,w) = 0$ ve $\text{cov}(z,x) \neq 0$'dır. z'nin w ile ilişkisiz, x ile ilişkili olmasını istenmemesinin nedeni, $\text{cov}(z,w) = 0$ ve $\text{cov}(z,x) \neq 0$ olmasının istenmemesidir. Eğer araç değişkeni ile açıklayıcı değişken arasında yüksek bir ilişki mevcut ise, araç değişkenine iyi bir araç değişkeni denir [12].

b_0 ve b_1 parametrelerinin asimptotik varyansları (39) ve (40)'da verildiği gibi elde edilmiştir:

$$\text{var}(b_0) - \partial_w^2[\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}\sum_{i=1}^{n} z_i^2}{(\sum_{i=1}^{n} x_i z_i)^2}] \tag{39}$$

$$\text{var}(b_1) - \partial_w^2[\frac{\sum_{i=1}^{n} z_i^2}{(\sum_{i=1}^{n} x_i z_i)^2}] \tag{40}$$

Burada σ_w^2 hata varyansının tahminidir [7]. İki açıklayıcı değişken olduğu zaman regresyon modeli;
$Y = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$ olursa, X_1 ve X_2 açıklayıcı değişkenlerinde ölçüm hatası olduğu varsayıldığından, ölçüm hatası olmayan Z_1 ve Z_2 araç değişkenleri modele alınır. X_1 açıklayıcı değişken yerine Z_1 ve X_2 açıklayıcı değişken yerine Z_2 araç değişkeni alınıp, en küçük kareler yöntemi uygulanırsa, b_1 ve b_2 (41) ve (42) ile belirtildiği gibi olur.

$$b_1 = \frac{(\sum_{i=1}^{n} z_1 y)(\sum_{i=1}^{n} z_2 x_2) - (\sum_{i=1}^{n} z_2 y)(\sum_{i=1}^{n} z_1 x_2)}{(\sum_{i=1}^{n} z_1 x_1)(\sum_{i=1}^{n} z_2 x_2) - (\sum_{i=1}^{n} z_2 x_1)(\sum_{i=1}^{n} z_1 x_2)} \tag{41}$$

$$b_2 = \frac{(\sum_{i=1}^{n} z_2 y)(\sum_{i=1}^{n} z_1 x_1) - (\sum_{i=1}^{n} z_1 y)(\sum_{i=1}^{n} z_2 x_1)}{(\sum_{i=1}^{n} z_1 x_1)(\sum_{i=1}^{n} z_2 x_2) - (\sum_{i=1}^{n} z_2 x_1)(\sum_{i=1}^{n} z_1 x_2)} \quad (42)$$

Burada x_1, x_2, y, z_1, ve z_2 ortalamalardan sapmalar yoluyla bulunan değerlerdir. $b_0 = \overline{Y} - b_1\overline{X}_1 - b_2\overline{X}_2$ olarak elde edilir. Bu tahminlerin varyansları ise (43) ve (44)'teki gibi bulunur.

$$\mathrm{var}(b_1) = \partial_w^2 \frac{\sum_{i=1}^{n} z_1^2 (\sum_{i=1}^{n} z_2 x_2)^2 + \sum_{i=1}^{n} z_2^2 (\sum_{i=1}^{n} z_1 x_2)^2 - 2\sum_{i=1}^{n} z_1 x_2 \sum_{i=1}^{n} z_2 x_2 \sum_{i=1}^{n} z_1 x_2}{[(\sum_{i=1}^{n} z_1 x_1)(\sum_{i=1}^{n} z_2 x_2) - (\sum_{i=1}^{n} z_2 x_1)(\sum_{i=1}^{n} z_1 x_1)]^2} \quad (43)$$

$$\mathrm{var}(b_2) = \partial_w^2 \frac{\sum_{i=1}^{n} z_1^2 (\sum_{i=1}^{n} z_2 x_1)^2 + \sum_{i=1}^{n} z_2^2 (\sum_{i=1}^{n} z_1 x_1)^2 - 2\sum_{i=1}^{n} z_1 x_1 \sum_{i=1}^{n} z_2 x_1 \sum_{i=1}^{n} z_1 x_2}{[(\sum_{i=1}^{n} z_1 x_1)(\sum_{i=1}^{n} z_2 x_2) - (\sum_{i=1}^{n} z_2 x_1)(\sum_{i=1}^{n} z_1 x_2)]^2} \quad (44)$$

Burada $\widehat{\sigma}_w^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y - b_1 X_1 - b_2 X_2)}{n-k}$ 'dır [7,10].

Araç değişkenlerin kullanılmasında bazı güçlükler vardır. Her şeyden önce w'den bağımsız, x ile ilişkili araç değişkeni bulmakta güçlük vardır. İkinci güçlük seçilen araç değişkenin gelişigüzel yapısının olması ve bu araç değişkenine göre elde edilen tahminin çok büyük bir varyasyona sahip olma olasılığının olmasıdır. Üçüncüsü araç değişkeninin diğerlerinden ve ölçüm hatalarının tümünden bağımsız olduğu varsayımının araştırılmasındaki güçlüktür [14].

2.2.4. En çok olabilirlik yöntemi

x ve y arasındaki fonksiyonel ilişki, $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i$ ve x_i ile y_i gerçek değerleri yerine gözlemlediğimiz değerler $X_i = x_i + u_i$, $Y_i = y_i + v_i$ olsun. u_i ve v_i hata terimlerinin ortalamalarının sıfır, varyanslarının sırasıyla σ_u^2 ve σ_v^2 olan bağımsız normal dağılıma sahip rastlantı değişkenleri olduğunu varsayalım. n gözlemli bir örneklemde gözlenen değerler çifti $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$ olsun. Burada x_i değerleri rastgele olmadıklarından her gözlem tahmin edilecek bir xi getirmektedir. n gözlem olduğuna göre, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ve β_0, β_1, σ_u^2 ve σ_v^2 parametrelerinin en-çok olabilirlik tahmin edicilerini bulmak için aşağıdaki yol izlenmektedir: Olabilirlik fonksiyonu, (45) ile verilmiştir.

$$L = f(v_1, v_2, \ldots, v_n, u_1, u_2, \ldots, u_n) = \frac{1}{(\sigma_u \sigma_v 2\pi)^n} \exp[-\frac{1}{2}\sum(\frac{v_i^2}{\sigma_v^2} + \frac{u_i^2}{\sigma_u^2})] \quad (45)$$

u_i ve v_i değerleri ile y_i yerine $\beta_0 + \beta_1 x_i$ konulursa olabilirlik fonksiyonunu kendisi yerine logaritmasını maksimizasyonu daha kolay olduğundan, olabilirlik fonksiyonunun logaritması alınarak (46) elde edilir.

$$\log L = -\frac{n}{2}\log\sigma_v^2 - \frac{n}{2}\log\sigma_u^2 - n\log 2\pi - \frac{1}{2}[\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)}{\sigma_v^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \widehat{X}_i)^2}{\sigma_u^2}] \quad (46)$$

Burada n+4 tane bilinmeyen parametre bulunmaktadır. Bunlar $x_1, x_2, \ldots, x_n$, β_0, β_1, σ_u^2 ve σ_v^2'dir. Bilinmeyen bu parametrelere göre kısmi türev alınıp sıfıra eşitlenerek, hata terimlerinin varyanslarının en-çok olabilirlik tahmin edicileri (47) ve (48) ile verildiği gibi elde edilir.

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - b_0 - b_1\widehat{X}_i)^2 = 0 \quad (47)$$

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \widehat{X}_i)^2 \quad (48)$$

Buradan $\widehat{\sigma}_u^2 b_1^2 = \widehat{\sigma}_v^2$ ve $b_1^2 = \frac{\widehat{\sigma}_v^2}{\widehat{\sigma}_u^2}$ bulunur.

İlk kez 1947'de Lindley tarafından ortaya çıkarılmış olan ve örnek hacmine bağlı olmaksızın tahmin ediciler arasında kesin bir ilişki veren bu orana göre ve en çok olabilirlik tahmin edicilerinin tutarlı olduğundan hareketle büyük örneklemler için, $\beta_1^2 = \frac{\widehat{\sigma}_v^2}{\widehat{\sigma}_u^2}$ yazılacak demektir [12]. Bu sonuç hata varyansları hakkında bu ön bilgi olmadıkça ya da bir varsayım koyulmadıkça en çok olabilirlik yöntemi ile bir sonuca ulaşabilmenin olanaksız olduğunu göstermektedir. Mevcut kuramda varyansların oranlarının regresyon katsayısının karesine eşit olduğunu varsaymak yerine uygun bir sabite eşit olduğu varsayılmaktadır ($L = \frac{\widehat{\sigma}_v^2}{\widehat{\sigma}_u^2}$). Araştırıcı L 'nin gerçek değerini hiçbir zaman bilmeyebilir. Deneyimli bir araştırıcı, çok güçlü olarak, Y 'deki ölçüm hatalarının varyansının büyüklük olarak X' deki ölçüm hatalarının varyansı ile aynı olduğunu hissedebilir. Eğer böyle ise $L = 1$ olarak alınabilir. Ya da araştırıcı önceki teori ya da denemeden L 'nin iyi bir tahminine sahip olabilir [9].

L'nin bilindiği varsayımı altında $L = \frac{\hat{\sigma}_v^2}{\hat{\sigma}_u^2}$ eşitliğinden $\hat{\sigma}_u^2 = L\hat{\sigma}_v^2$ yazabiliriz. Bu ifadeyi (38)'de yerine konulursa en çok olabilirlik denkleminin logaritması (49)'daki gibi bulunur.

$$\log L = -\frac{n}{2}\log\sigma_u^2 - \frac{n}{2}\log L\sigma_v^2 - n\log 2\pi - \frac{1}{2}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\beta_0-\beta_1 x_i)^2}{\sigma_v^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{X}_i)}{\sigma_u^2}\right] \tag{49}$$

Bilinmeyen parametreler, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, β_0, β_1, ve σ_v^2'dir. Gerekli denklemler hesaplanarak işlemler yapıldığında b_0, $\hat{x}_i$ ve b_1 değerleri (50), (51) ve (52)'deki gibi elde edilir.

$$b_0 = \overline{Y} - b_1\overline{X} \tag{50}$$

$$\hat{x}_i = \frac{X_i + Lb_1Y_i - b_1b_0}{1 + Lb_1^2} \tag{51}$$

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-b_0)\hat{x}_i}{\sum_{i=1}^{n}(\hat{x}_i)^2} \tag{52}$$

(50) ve (51)'deki eşitlikleri, (52)'de yerine konulursa (53) ile verilen eşitlik elde edilir.

$$b_1^2[\sum(Y_i - \overline{Y})(X_i - \overline{X})] + b_1[\sum(X_i - \overline{X})^2 - \sum(Y_i - \overline{Y})^2] - \sum(Y_i - \overline{Y})(X_i - \overline{X}) = 0 \tag{53}$$

Bu denklemin çözümünden, b_1'in kökleri ve T değeri (54) ve (55)'te verildiği gibidir.

$$b_1 = T \mp [T^2 + \frac{1}{L}]^{1/2} \tag{54}$$

$$T = \frac{\sum(Y_i-\overline{Y})^2-(1/L)(X_i-\overline{X})^2}{2\sum(Y_i-\overline{Y})(X_i-\overline{X})} \tag{55}$$

$L = \frac{\hat{\sigma}_u^2}{\hat{\sigma}_v^2}$'nin bilindiği varsayımı altında $\hat{\sigma}_v^2$ ise (56) ile verildiği gibi bulunur.

$$\hat{\sigma}_v^2 = \frac{1}{n-2}[\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2 - b_1\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})(X_i - \overline{X})] \tag{56}$$

3. Bulgular

Çalışmada Birleşik Devletler'de kişi başına tavuk tüketimi ile ilgili veriler kullanılmıştır [15]. Tavuk tüketiminin, tavuğun reel perakende fiyatın ve sığır etinin reel perakende fiyatının doğrusal bir fonksiyonu olduğu varsayılmıştır. Uygulamada önce x_1 açıklayıcı değişkeninde ölçüm hatası olduğu varsayımı altında, iki grup, üç grup, araç değişkenleri ve en çok olabilirlik yöntemleri uygulanmıştır. Daha sonra x_1 ve x_2 açıklayıcı değişkenlerinde ölçüm hatası olduğu varsayımı altında, araç değişkenleri yöntemi ve en küçük kareler yöntemi verilere uygulanmıştır. Araç değişkenleri yönteminde, ölçüm hatası olduğu varsayılan x_1 ve x_2 açıklayıcı değişkenleri yerine, ölçüm hatası içermediği varsayılan x_3 ve x_4 açıklayıcı değişkenleri, araç değişkenler olarak modele alınıp, parametre tahminleri yapı1mıştır. En küçük kareler yönteminde ise, hata varyans oranın bilindiği varsayımı altında, parametre tahminlerinin alt ve üst sınırları bulunmuştur.

Uygulamada kullanılan kişi başı tavuk tüketim verileri ve bu verilere ilişkin açıklayıcı değişken (Y) ve bağımsız değişkenler (x_1, x_2, x_3, x_4) Tablo 1'de verilmiştir [17].

Tablo 1. Bileşik Devletler'de tavuk tüketimi ile ilgili veriler

Y	x_1	x_2	x_3	x_4
27,8	42,2	78,3	65,8	50,7
29,9	38,1	79,2	66,9	52,0
29,8	40,3	79,2	67,8	54,0

30,8	39,5	79,2	69,6	55,3
31,2	37,3	77,4	68,7	54,7
33,3	38,1	80,2	73,6	63,7
35,6	39,3	80,4	76,3	69,8
36,4	37,8	83,9	77,2	65,9
36,7	38,4	85,5	78,1	64,5
38,4	40,1	93,7	84,7	70,0
40,4	38,6	106,1	93,3	73,2
40,3	39,8	104,8	89,7	67,8
41,8	39,7	114,0	100,7	79,1
40,4	52,1	124,1	113,5	95,4
40,7	48,9	127,6	115,3	94,2
40,1	58,3	142,9	136,7	123,5
42,7	57,9	143,6	139,2	129,9
44,1	56,5	139,2	132,0	117,6
46,7	63,7	165,5	132,1	130,9
50,6	61,6	203,3	154,4	129,8
50,1	58,9	219,6	174,9	128,0
51,7	66,4	221,6	180,8	141,0
52,9	70,4	232,6	189,4	168,2

Tablo 1'de yer alan değişkenler ve anlamları aşağıdaki gibidir:

Y = Kişi başına tavuk tüketimi (libre olarak, 1 libre = 0,448 kg)
x_1 = Tavuğun reel perakende fiyatı (sent/libre olarak)
x_2 = Sığır etinin reel perakende fiyatı (sent olarak)
x_3 = Koyun etinin reel perakende fiyatı (sent olarak)
x_4 = Domuz etinin reel perakende fiyatı (sent olarak)

3.1. İki grup yönteminin uygulanması

Gözlemler x_1 açıklayıcı değişkenin değerleri artacak şekilde sıraya dizilir. Gözlem sayısı tek olduğundan, ortadaki gözlem hesap1ama dışında bırakılarak iki gruba ayrılır. Düşük değerli grup için (1. grup) $\overline{X}_1 = 38{,}8$, yüksek değerli grup için (2. grup) $\overline{X}_2 = 57{,}9$ ve bu gruplara karşılık gelen $\overline{Y}_1$ ve $\overline{Y}_2$ değerleri sırasıyla $\overline{Y}_1 = 35{,}9$, $\overline{Y}_2 = 44{,}3$ olarak elde edilir. Bu değerler ile β_1 parametresinin tahmini,

$$b_1 = \frac{\bar{Y}_2 - \bar{Y}_1}{\bar{X}_2 - \bar{X}_1}$$

formülünden

$$b_1 = \frac{44{,}3 - 35{,}9}{57{,}9 - 38{,}8} = 0{,}440$$

ve

$$var(b_1) = 0{,}0912$$

olarak elde edilir. Sabit terim b_0 ise,

$$b_0 = \bar{Y} - b_1\bar{X}$$

formülünden,

$$b_0 = 40{,}1 - 0{,}44 \times 48{,}4 = 18{,}804$$

olarak bulunur. Burada $\overline{Y}$ ve $\overline{X}$, 22 gözleme ait ortalamalardır.

3.2. Üç grup yönteminin uygulanması

Bu yöntemde, İki grup yöntemi gibi, gözlemleri x_1 açıklayıcı değişkenin değerleri artacak şekilde sıraya dizilir. Gözlem sayısı üç ile tam ortadaki iki göz1em örneklemden çıkarılır. Bu işlemden sonra gözlemler üç gruba ayrılarak, ortadaki grup çözümlemeye alınmaz. Düşük değerli grup için $\overline{X}_1 = 38{,}2$, yüksek değerli grup için $\overline{X}_3 = 62{,}5$ ve bunlara karşılık gelen $\overline{Y_1}$ ve $\overline{Y_3}$ sırasıyla $\overline{Y}_1 = 34{,}8$ ve $\overline{Y}_3 = 47{,}8$ olarak elde edilir. Bu değerler ile parametre tahmini,

$$b_1 = \frac{\bar{Y}_3 - \bar{Y}_1}{\bar{X}_3 - \bar{X}_1}$$

formülünden,

$$b_1 = \frac{47{,}8 - 34{,}8}{62{,}5 - 38{,}2} = 0{,}535$$

ve

$$var(b_1) = 0{,}00786$$

olarak elde edilir. Sabit terim b_0 ise,

$$b_0 = Y - b_1 X$$

formülünden,

$$b_0 = 40{,}2 - 0{,}535 \times 48{,}7 = 14{,}145$$

bulunur. Burada $\overline{Y}$ ve $\overline{X}_1$, 21 gözleme ait ortalamalardır.

3.3. Araç değişkenleri yönteminin uygulanması

Bu uygulamada önce x_1 açıklayıcı değişkeninde, sonra x_1 ve x_2 açıklayıcı değişkenlerinin her ikisinde de ölçüm hatası olduğu varsayımı altında çözümlemeler yapılacaktır. x_1 açıklayıcı değişkeninde ölçüm hatası olduğu modelimiz,

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1$$

olsun, bu model de araç değişkenleri yöntemi şu şekilde uygulanır. x_1 açıklayıcı değişkeninde ölçüm hatası olduğu varsayımı altında, ölçüm hatası içermeyen ve x_1 ile arasında yüksek bir ilişkiye sahip olduğu görülen x_3 açık1ayıcı değişkenini alalım ve bu x_3 değişkenini z ile gösterelim.
(35) ile verilen,

$$b_1 = \frac{\sum zy}{\sum zx_1}$$

formülünden,

$$b_1 = \frac{6053{,}9}{9179{,}6} = 0{,}6582$$

olarak bulunur. Sabit terim b_0 ise,

$$b_0 = \overline{Y} - b_1 \overline{X}_1$$

formülünden,

$$b_0 = 8{,}0786$$

olarak elde edilir.

Parametrelerin varyans tahminleri ise (39) ve (40) eşitliklerinden,

$$V(b_0) = 1{,}144781$$
$$V(b_1) = 0{,}007459$$

olarak elde edilir. Burada $\sigma^2 = 18{,}09523$'dir. x_1 ve x_2 açıklayıcı değişkenlerinde ölçüm hatası olması durumunda ise araç değişkenleri yöntemi şu şekilde uygulanır: x_1 açıklayıcı değişkeni tavuğun reel perakende fiyatını , x_2 açıklayıcı değişkeni ise sığır etinin ree1 perakende göstermektedir. Modele ölçüm hatası içermediği varsayılan ve açıklayıcı değişkenlerle aralarında kuvvetli ilişkileri olan x_3 ve x_4 değişkenlerini sırasıyla x_1 ve x_2 açıklayıcı değişkenlerinin, araç değişkenleri olarak modele alalım ve bunları sırasıyla z_1 ve z_2 olarak gösterilsin (41) ve (42) ile verilen eşitliklerden parametrelerin tahminleri,

$$b_0 = 19{,}20776$$
$$b_1 = 0{,}15678$$
$$b_2 = 0{,}10397$$

olarak bulunur. Parametre tahminlerinin varyansları ise, (43) ve (44) eşitliklerinden,

$$V(b_1) = 0{,}038824$$
$$V(b_2) = 0{,}063979$$

elde edilir.

3.4. En küçük kareler yönteminin uygulanması

Tek açıklayıcı ve her iki açıklayıcı değişkende ölçüm hatası olduğu durumda, parametre tahminlerini elde etmek içi n sırasıyla, $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + w$ ve $Y = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + w$ modellerine en küçük kareler yöntemi uygulanarak parametre tahminleri elde edilmiştir. Bu yöntemlerde parametre tahminleri (25) ve (26) ile verilen formüller kullanılarak bulunmuştur. $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + w$'nın parametre tahmininin sınırları Ek A'da ve $Y = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + w$'nın parametre tahminlerinin sınırları ise Ek B'de verilmiştir. x_1 açıklayıcı değişkenindeki hata varyansı oranının x_2 açıklayıcı değişkenindeki hata varyansı oranından daha büyük olduğu varsayılmıştır.

$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + w$'nın parametre tahmininin sınırları;

$$0{,}208 < b_1 < 0{,}522$$

$Y = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + w$'nın parametre tahminlerinin sınırları;

$$-0{,}635 < b_1 < -0{,}161$$
$$0{,}185 < b_2 < 0{,}643$$

olarak bulunmuştur.

3.5. En çok olabilirlik yönteminin uygulanması

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1$$

modeli alınmış ve bu modelin parametre tahminleri (53)'te verilmişti. Burada L hata varyansları oranını göstermek üzere ve L'nin bilindiği varsayımı altında, L'ye 0,01, 0,02 ve 0,03 oranlarını vererek parametre tahminleri ve varyansları Tablo 2'deki gibi elde edilmiştir:

Tablo 2. Parametre tahminleri ve varyanslar

	L=0,01	L=0,02	L=0,03
b_0	12,898	12,864	12,830
b_1	0,558	0,558	0,559
s^2	16,718	16,666	16,615

4. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada değişkenlerde ölçüm hatası olması durumunda, parametre tahminlerini elde etmek için kullanılan en küçük kareler yöntemi, yanlı ve tutarsız tahminler vermektedir. Bu durumda yansız ve tutarlı parametre tahminleri veren alternatif yöntemler araştırılmıştır. Gruplama yöntem tutarlı parametre tahminleri vermektedir, ancak değişkenlerin normal dağılmama varsayımının sağlanması gerekmektedir. Gruplama yönteminde parametre tahminindeki hesaplamalar kolaylıkla yapılmaktadır. Araç değişkenleri yöntemi de tutarlı tahminler vermektedir. Araç değişkenleri yöntemindeki en büyük güçlük araç değişkenlerin bulunmasıdır. Ayrıca araç değişkeninin, diğer değişken1erden ve hata terimlerinin tümünden bağımsız olduğunu araştırmak güçtür. Bu nedenlerden dolayı uygulamada pek sık kullanılmamaktadır. En-çok olabilirlik yöntemi ise hata varyansları oranının bilindiği varsayımı altında tutarlı tahminler vermektedir.

$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1$ modelinde, iki grup yöntemi, üç grup yöntemi, araç değişkenleri yöntemi ve en-çok olabi1ir1ik yöntemi ile bulunan parametre tahminleri ve eğim parametresinin varyansı Tablo 3'teki gibi ÖZlenebilir:

Tablo 3. Çalışmada kullanılan yöntemler ile bulunan parametre tahminleri ve varyansların karşılaştırılması

	İki Grup Yöntemi	Üç Grup Yöntemi	Araç Değiş. Yöntemi	En-Çok Olabilir. Yöntemi	En Küçük Kareler Yöntemi
b_0	18,804	14,415	8,078	12,898	12,933
b_1	0,440	0,535	0,658	0,558	0,557
s^2	16,645	16,246	18,095	16,718	16,769
$var(b_1)$	0,091	0,007	0,007	-	0,006

En küçük kareler yöntemi minimum varyanslı olmasına rağmen tutarlı değildir. Araç değişkenleri yöntemi ile elde edilen parametre tahmininin varyansı ile gruplama yöntemleri ile elde edilen tahminlerin varyansları birbirlerine yakın bulunmuştur. Araç değişkenleri yönteminde, araç değişkenin elde edilmesindeki güçlük nedeni ile bu yöntem uygulamada tercih edilmemektedir. Bu çalışmanın sonucunda hem uygulamadaki kolaylığı hem de küçük varyanslı olması nedeni ile üç grup yöntemi değişkenlerde hata olması durumunda parametre tahmini için önerilmektedir.

Kaynakça

[1] Wald, A., 1940, The fitting of straight lines if both variables are subject to error: Annals of Mathematics and Statistics, 11, 284-300

[2] Bartlett, M.S., 1949, Fitting a straight line when both variables are subject to error: Biometrics, 207-242

[3] Armstrong, B., 1965, Measurement error in the generalized linear model: Cmm. Statistic, B, 14, 529-544

[4] Fuller, W.A., 1980, Properties of some estimators for the error-in-variables model: Annals Of Statistic, 8, 407-422.

[5] Harman, A., 2005, D.Ü. Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi 5,107-113

[6] Arabacı, Ö., 2008, Rasyonel Bekleyişler Altında Tahmin Modelleri için Değişkenlerde Hata Metodunun Kullanıması, Journal of Academic Studies, Vol. 10 Issue 38, p41-53. 13p.

[7] Tanınmış, B., Alkan, U., Dağıdır, C., 2015, Interest Corridor as a New Money Policy Instrument: Effect of the Interest Decisions of the Monetary Policy Board on Inflation in Turkey, Journal of Financial Researches & Studies / Finansal Araştırmalar ve Çalışmalar Dergisi., Vol. 7 Issue 13, p449-478. 30p.

[8] Yavuz, S., 2009, Hataları Ardışık Bağımlı (Otokorelasyonlu) Olan Regresyon Modellerinin Tahmin Edilmesi, *Atatürk Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Dergisi*, 23(3):123-140.

[9] Graybill, F.A.,1975, An introduction to linear statistical models: Mc Graw Hill Book Company Inc, New York, 463 p.

[10] Ertek, T.,1982, Ekonometriye giriş: O.D.T.Ü. İdari İlimler Fakültesi Yayın No:22

[11] Koutsoyiannis, A.,1989, Ekonometri kuramı: (Çev.ü.Şenesen ve G., Günlük) Verso Yayıncılık, Ankara, 688 s.

[12] Maddala, G.S.,1988, Introduction to econometrics : Macmillan Publishing Companay, a division of Macmillan, Inc. New York.

[13] Madansky, A., 1959, The fittingof straight line when both variables are subject to error: Journal of the American Statistical Assocation.

[14] Jonston, J., 1963, Econometric Methods: Mc Graw Hill Book Company Inc., New York, 300 p.

[15] Leser, C, 1966, Econometric techniques and problems: London, Griffin, 119 p.

[16] Gürkan, E.M., 1972, Her iki değişkende heteroskedastik hatalar olduğunda doğrusal regresyonda bir tahmin yöntemi: Doktora tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Enstitüsü, 114 s.

[17] Gujarati, D., 1988, Basic Econometrics: Mc Graw Hill Company Inc, New York.

Ekler

Ek A. En Küçük Kareler Yönteminde, $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1$ Modelinde, Parametre Tahminini Bulmak İçin Kullanılan Basic Programı

```
10 DIM λ (20)
20 FOR J=1 TO 10
30 READ λ (J)
40 NEXT J
50 DATA .01,.02,.03,.04,.05,.06,.07,.08,.09,.1
60 FOR J=1 TO 10
70 β1=.557062×(1−.84−λ(J))/(1-.84)
80 PRİNT
90 NEXT J
```

PROGRAM ÇIKTISI

J=1	λ=0.01	β1=0.5222456
J=2	λ=0.02	β1=0.4874293
J=3	λ=0.03	β1=0.4526129
J=4	λ=0.04	β1=0.4177965
J=5	λ=0.05	β1=0.3829802
J=6	λ=0.06	β1=0.3481638
J=7	λ=0.07	β1=0.3133474
J=8	λ=0.08	β1=0.2785311
J=9	λ=0.09	β1=0.2437147
J=10	λ=0.10	β1=0.2088983

Ek B. En Küçük Kareler Yönteminde, $\mathbf{Y} = \boldsymbol{\beta}_1\mathbf{X}_1 + \boldsymbol{\beta}_2\mathbf{X}_2$ Modelinde, Parametre Tahminini Bulmak İçin Kullanılan Basic Programı

```
10 DIM λ1(10), λ2(10)
20 FOR J=1 TO 10
30 READ λ1(J), λ2(J)
40 NEXT J
50 DATA 0.01,0.01,0.02,0.01,0.03,0.01,0.04,0.01,0.05,0.01
60 DATA 0.06,0.02,0.07,0.02,0.08,0.02
70 FOR J=1 TO 10
80 F=0.02223-((0.92847×λ1(J)×(-0.01889))/(0.13794−λ2(J))
90 T=-0.92847× λ1(J)×0.92847× λ2(J)/(0.13794− λ1(J))+(0.137494- λ2(J))
100 β2=F/T
110 β1=(0.92847× λ2(J)× β2+(-0.01889))/(0.13794−λ1(J))
120 PRINT “J =”J; “λ1 =” λ1(J); “λ1 =” λ2(J); “β1 = “β1; “β2 =” β2;
130 NEXT J
```

PROGRAM ÇIKTISI

J=1	$\lambda1=0.01$	$\lambda1=0.01$	$\beta1=-0.1611$	$\beta2=0.1857$
J=2	$\lambda1=0.02$	$\lambda1=0.02$	$\beta1=-0.1759$	$\beta2=0.1995$
J=3	$\lambda1=0.03$	$\lambda1=0.03$	$\beta1=-0.1936$	$\beta2=0.2161$
J=4	$\lambda1=0.04$	$\lambda1=0.04$	$\beta1=-0.2153$	$\beta2=0.2365$
J=5	$\lambda1=0.05$	$\lambda1=0.05$	$\beta1=-0.2425$	$\beta2=0.2620$
J=6	$\lambda1=0.06$	$\lambda1=0.06$	$\beta1=-0.3238$	$\beta2=0.3417$
J=7	$\lambda1=0.07$	$\lambda1=0.07$	$\beta1=-0.3381$	$\beta2=0.4026$
J=8	$\lambda1=0.08$	$\lambda1=0.08$	$\beta1=-0.4843$	$\beta2=0.4937$
J=9	$\lambda1=0.09$	$\lambda1=0.09$	$\beta1=-0.6354$	$\beta2=0.6434$