Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
Sayı 29, Aralık 2012 ISSN - 1302 - 3055

İLERİ İTME SİMPLİSEL CEBİRLER

*Özgün GÜRMEN ALANSAL, Sedat PAK

Dumlupınar Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Kütahya, ogurmen@dumlupinar.edu.tr, spak@dumlupinar.edu.tr

Geliş Tarihi:13.09.2012 *Kabul Tarihi:12.11.2012*

ÖZET

Bu çalışmada, simplisel cebirlerin ileri itmesi incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Simplisel cebirler, ileri itme.*

PUSHOUTS OF SIMPLICIAL ALGEBRAS

ABSTRACT

Into this work, we give then otion of a pull backs of simplicial algebras.

KeyWords: *Simplicial algebra, pushout.*

1. GİRİŞ

Çaprazlanmış modüller, cat[1]- cebirler ve Moore kompleksinin boyutu 1 olan simpliselce birlerin denkliği bilinmektedir.

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{Cat}^1\text{-}\mathbf{Ceb} \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\ \mathbf{Simp(Ceb)}_{\leq 1} \arrow[rr, leftrightarrow] & & \mathbf{XMod} \end{tikzcd}$$

Çaprazlanmış modüllerin kategoriksel özelliklerinden geri çekme ve ileri itme yapıları [3,4] incelenmiştir. Simplisel cebirlerin geri çekmeside [6,8,9] verilmiştir. Simplisel cebirlerin ileri itmesini [9] detaylı olarak göstererek ve*n*-katlar için vereceğiz.

İndirgenmiş çaprazlanmış modüllerin bir uygulaması olan serbest çaprazlanmış modüllerin simpliselleri [1] ve [10] da tanımlanan "adım-adım" yapısı yardımıyla simplisel cebirler kavramının oluşturduğu gösterilmiştir. Ayrıca kotanjant komplekslerde bir indirgenmiş simplisel cebirdir.

değişmeli k-cebirlerin bir ailesi olsun.

$$d_i^n : E_n \to E_{n-1}; 0 \leq j \leq n \neq 0$$
$$s_j^n : E_n \to E_{n+1}; 0 \leq j \leq n$$

homomorfizmler olmak üzere,

$$
\begin{array}{ll}
d_i d_j = d_{j-1} d_i & for \quad i < j \\
d_i s_j = s_{j-1} d_i & for \quad i < j \\
d_i s_j = id & for \quad i = j, i = j+1 \\
d_i s_j = s_j d_{i-1} & for \quad i > j+1 \\
s_i s_j = s_{j+1} s_i & for \quad i \leq j
\end{array}
$$

şartları sağlanıyorsa E=($(E_n)_{n\in N}, d_i, s_j$) üçlüsüne simplisel cebir denir. Buradaki $d_i \; ve \; s_j$ homomorfizmlerine sırasıyla yüz ve dejenere operatörler denir [1,2]. Diyagram olarak,

$$
\mathbf{E} = \quad \cdots \quad E_3 \; \underset{s_0^2,\, s_1^2,\, s_1^2}{\overset{d_0^3,\, d_1^3,\, d_2^3,\, d_3^3}{\rightleftarrows}} \; E_2 \; \underset{s_0^1,\, s_1^1}{\overset{d_0^2,\, d_1^2,\, d_2^2}{\rightleftarrows}} \; E_1 \; \underset{s_0^0}{\overset{d_0^1,\, d_1^1}{\rightleftarrows}} \; E_0
$$

E bir simplisel cebir olsun.

$$
NE_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} Çekd_i^n = Çekd_0^n \cap Çekd_1^n \cap \ldots \cap Çekd_{n-1}^n
$$

olmak üzere $d_n^n = \partial_n : NE_n \to NE_{n-1}$ homomorfizmlerini tanımlayalım. Bu durumda

$$
\mathbf{NE}: \ldots \xrightarrow{\partial_{n+1}} NE_n \xrightarrow{\partial_n} NE_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_2} NE_1 \xrightarrow{\partial_1} NE_0
$$

zinciri bir komplekstir. Gerçekten de $x \in$N

$$
\boldsymbol{E_{n+1}} = \bigcap_{i=0}^{n} Çek \; d_i^{n+1}
$$

İçin

$$
\partial_n \partial_{n+1}(\mathrm{x}) = d_n^n d_{n+1}^{n+1}(\mathrm{x})
$$

Olduğundan simplisel özdeşliklerden

$$
d_n^n d_{n+1}^{n+1}(\mathrm{x}) = d_n^n(0) = 0 \; (\therefore \mathrm{x} \in \mathbf{NE_{n+1}})
$$

olup, $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ dır. O halde **NE** bir komplekstir. Bu komplekse **E** simpliselce birinin Moore kompleksi denir ve (**NE**,∂) veya kısaca **NE** ile gösterilir. Eğer, n > k için $\mathbf{NE}_n = 0$ ise E simplisel cebrinin Moore kompleksinin boyutu *k*dan küçük veya eşittir denir ve ≤ k ile gösterilir. Moore kompleksinin boyutu ≤ k olan simplisel cebirler kategorisi **Simp** (**Ceb**$_{\leq k}$) ile gösterilir.

E simpliselce birinin n. Homotopi modülüπ_n(**E**), **E**nin Moore kompleksinin n. homolojisine eşittir. Yani

$$\pi_n(\mathbf{E}) \cong H_n(\mathrm{NE},\partial)= \frac{\cap_{i=0}^{n} \boldsymbol{Çekd_i^n}}{d_{n+1}^{n+1}(\cap_{i=0}^{n} \boldsymbol{Çekd_i^{n+1}})}$$

şeklindedir [6].

Teorem: Moore kompleksi 1 olan simplisel cebirler kategorisi, çaprazlanmış modüller kategorisine doğal denktir. [3]

İspat: $\mathbf{E}_0$, Moore kompleksi 1 olan simplisel cebir olsun.

$$C = \mathbf{NE}_1 \text{ , } R = \mathbf{NE}_0 \text{ ve } \partial = d_1$$

Alarak

$\mathbf{NE}_1 \times \mathbf{NE}_0 \rightarrow \mathbf{NE}_1$

$$(x,a) \mapsto x\,.a = xs_0(a)$$

Tanımlayabiliriz. $\partial_2(\mathbf{NE}_2)$ = Çekd_0Çekd_1 ve Moore kompleksinin boyutu 1 olduğundan Çekd_0Çekd_1 = 0 dır. Böylece bu ideallerin üreteçleri her $x,y \in \mathbf{NE}_1$ için $y(s_0 d_1(x) - x)$ şeklindedir.

$$\begin{aligned} \text{CM2. } \partial(x)\cdot y &= s_0\partial(x)y \\ &= s_0 d_1(x)y \\ &= x\,y \qquad (\text{Çün}k\text{ü } \partial_2(NE_2) = 0) \end{aligned}$$

olup$\partial : C \rightarrow R$ çaprazlanmış R-modüldür.

Tersine, $\partial : C \rightarrow R$ çaprazlanmış R-modül olsun. R nin C üzerine etkisiyle C ⋉R yarı-direkt çarpımı tanımlayabiliriz.$E_1 = C \ltimes R$, $E_0 = R$ve

$$\begin{aligned} d_0(c,r) &= r \\ d_1(c,r) &= d_1(c) + r \\ s_0(r) &= (0,r) \end{aligned}$$

Olup

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, shift left=2, "{d_0^1,\, d_1^1}"] \arrow[r] & E_0 \arrow[l, shift left=2, "s_0^0"] \end{tikzcd}$$

1-kat simpliselce biri elde edilir. Buradan n-kat simpliselce biri;

$$\boldsymbol{E_n} \cong C \ltimes (C \ltimes (\ldots (C \ltimes R) \ldots))$$

İçin

$$
\begin{aligned}
d_n(c_n, \dots, c_1, r) &= (c_{n-1}, \dots, c_1, \partial(c_1) + r) \\
d_i(c_n, \dots, c_1, r) &= (c_n, \dots, c_{i+1} + c_i, \dots, c_1, r) \\
d_0(c_n, \dots, c_1, r) &= (c_{n-1}, \dots, c_1, r) \\
s_j(c_{n-1}, \dots, c_1, r) &= (c_{n-1}, \dots, 0, \dots, c_1, r) \quad ; \ (0 \leq j \leq n\text{-}1)
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Böylece **E** simpliselce biri elde edilir.

2. SİMPLİSEL CEBİRLERİN İLERİ İTMESİ

$\phi : S \to R$, k-cebir morfizmi yardımıyla

$$G: \boldsymbol{Ceb}/S \to \boldsymbol{Ceb}/R$$

funktoru oluşturulabilir. Buradan,

$$\phi_*: \boldsymbol{Simp}\,(\boldsymbol{Ceb}/S) \to \boldsymbol{Simp}\,(\boldsymbol{Ceb}/R)$$

Funktorunun tanımlanabileceğini göstereceğiz. Bu funktora **ileri itme simplisel funktoru** denir. Dolayısıyla
$\mathbf{F} \in Ob\ (\boldsymbol{Simp}\ (\boldsymbol{Ceb}/S))$ için

$$\phi_*(\boldsymbol{F}) = F'$$

Objesine **ileri itme (indirgenmiş) simplisel cebir** denir. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için

$$
\begin{tikzcd}
F_n \arrow[r, dotted] \arrow[d, "pd_0^{(n)} = p(d_0^1 d_0^2 \dots d_0^n)"'] & \phi_*(F_n) = F'_n \arrow[d, dotted] \\
S \arrow[r, "\phi"'] & R
\end{tikzcd}
$$

karesi bir ileri itmedir.
n = 1 için

$$
\begin{tikzcd}
F_1 \arrow[r] \arrow[d] & \phi_*(F_1) = F_1 \otimes_S R \arrow[d] \\
S \arrow[r, "\phi"'] & R
\end{tikzcd}
$$

ileri itme diyagramını oluşturabiliriz.

Burada,

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{F}_1{}' = F_1 \otimes_S R \arrow[r, shift left=3, "{d_0', d_1'}"] \arrow[r, shift left=1] & R \arrow[l, shift left=1, "s_0'"]
\end{tikzcd}
$$

Olup

$$
\begin{gathered}
d_1{}'(x_1 \otimes r) = \phi(d_1 x_1) \cdot r \\
d_0{}'(x_1 \otimes r) = r \\
s_0{}'(r) = 1 \otimes r
\end{gathered}
$$

dir.

$n = 2$ için

$$
\begin{tikzcd}
F_2 \arrow[r, "\phi_2"] \arrow[d, shift left=1] \arrow[d, shift left=3] \arrow[d, shift left=5] & F_2 \otimes_S R \arrow[d, shift left=1, "d_2'" description] \arrow[d, shift left=3, "d_1'" description] \arrow[d, shift left=5, "d_0'" description] \\
F_1 \arrow[u, shift left=1] \arrow[u, shift left=3] \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[d, shift left=1] \arrow[d, shift left=3] & F_1 \otimes_S R \arrow[u, shift left=1, "s_0'" description] \arrow[u, shift left=3, "s_1'" description] \arrow[d, shift left=1, "d_1'" description] \arrow[d, shift left=3, "d_0'" description] \\
S = F_0 \arrow[u, shift left=1] \arrow[r, "\phi = \phi_0"'] & R \arrow[u, shift left=1, "s_0'" description]
\end{tikzcd}
$$

şeklinde $\mathbf{F}_2{}'$ 2-kat ileri itme simplisel cebiri elde edilmiş olur. Burada yüz ve dejenere homomorfizmleri

$$
\begin{gathered}
d_0{}'(x_2 \otimes r) = d_0(x_2) \otimes r \\
d_1{}'(x_2 \otimes r) = d_1(x_2) \otimes r \\
d_2{}'(x_2 \otimes r) = d_2(x_2) \otimes r \\
s_0{}'(x_1 \otimes r) = s_0(x_1) \otimes r \\
s_1{}'(x_1 \otimes r) = s_1(x_1) \otimes r
\end{gathered}
$$

olarak tanımlanır. Böylece devam edildiğinde n-kat ileri itme simplisel cebir

$$
\begin{tikzcd}
F_n \otimes_S R \arrow[r, shift left=2, "d_0'"] \arrow[r, dotted] \arrow[r, shift right=2, "d_n'"'] & F_{n-1} \otimes_S R \arrow[l, bend left] \arrow[r, shift left=2, "d_0'"] \arrow[r, dotted] \arrow[r, shift right=2, "d_{n-1}'"'] & \cdots & F_2 \otimes_S R \arrow[r, shift left=1, "d_0"] \arrow[r, shift right=1, "d_1"'] & F_1 \otimes_S R \arrow[l, bend left, "s_0'"] \arrow[l, bend left=50, "s_1'"]
\end{tikzcd}
$$

şeklindedir. Yüz ve dejenere homomorfizmleri

$$d_i{}'(x_n \otimes r) = d_i(x_n) \otimes r, \qquad 0 \leq i \leq n$$
$$s_j{}'(x_{n-1} \otimes r) = s_j(x_{n-1}) \otimes r, \quad 0 \leq j \leq n-1$$

dir.

KAYNAKÇA

[1] Andre M.,Homologiedes Algebras Commutatives. *Springer-Verlag*206, (1974).

[2] Arvasi, Z., Applications in Commutative Algebra of the Moore Complex of a Simplicial Algebra, Ph.D. Thesis, University of Wales, Bangor, (1994).

[3] Arvasi, Z.,Porter T., Simplicial and Crossed Resolutions of Commutative Algebras,Journal of Algebras,181, 426-448, (1996).

[4] Brown, R.,Higgins, P., On the Connection betweenthe Second Relative Homotopy Groups of some Related Spaces, Proc. London Math. Soc.,3, 36, 193-212, (1978).

[5] Brown, R.,Wensley, Ch. D., Computing Crossed ModulesInducedby an Inclusionof a Normal Subgroup, with Applications to Homotopy 2-types, Theory Appl. Categ., 2,1, 3-16, (1996).

[6] Curtis, E. B.,Simplicial Homotopy Theory, Adv in Math 6, 107-209 (1971).

[7] Glenn P.G.,Realization of Cohomology Classes in arbitrary exact categories, Journal of pure and applied Algebra 25, 33-105, (1982).

[8] Gürmen, Ö., Geri Çekme, İleri İtme Çaprazlanmış Modüller, Cat^1-Cebirler ve Simplisel Cebirler, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Doktora Lisans Tezi, (2007).

[9] Gürmen, Ö., 2007, Geri Çekme Simplisel Cebirler, Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, sayı:27,ISSN : 1302-3055 (2012).

[10] Quillen, D.,Homology of Commutative Rings, Proc. Sympos. Pure Math., 17,65-87,(1970).