BEYKENT UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE AND ENGINEERING
Volume 6(1), 2013, 77-86

DİK PARÇALANMIŞ LİNEER MODEL ve BU MODELİN İNDİRGENMİŞ MODELLERİ ALTINDA OLSE'leri ile İLİŞKİLİ BAZI WATSON ETKİNLİK AYRIŞIMLARI

Esma KESRİKLİOĞLU*, Nesrin GÜLER **
*Yüksek Lisans Öğrencisi,
Sakarya Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Sakarya, Türkiye
esmakesrikliogl u@hotmail.com

**Sakarya Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Sakarya, Türkiye
nesring@hotmail.com

ÖZET

Çalışmada, dik parçalanmış M = $\{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2, V\}$ lineer modeli ve bu modelin bazı indirgenmiş modelleri ele alınmıştır. Ele alınan modeller altında parametrelerin alışılmış en küçük kareler tahmin edicileri (*OLSEs*) ile ilgili bazı Watson Etkinlik ayrışımları verilmiştir. Elde edilen sonuçlar Chu, Isotalo, Puntanen ve Styan, (2004) tarafından verilen bazı sonuçların X_1ve X_2 matrislerinin dik ve V- dik olma koşulları altında özel bir durumudur.

Anahtar Kelimeler: *BLUE*, *OLSE*, dik parçalanmış lineer model, indirgenmiş model, Watson Etkinliği.

ABSTRACT

Some Watson Efficiency Decompositions Associated with OLSEs of Parameters under Orthogonally Partitioned Linear Model

In this study, orthogonally partitioned linear model M = $\{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2, V\}$ and its some reduced models are considered. Some Watson Efficiency decompositions associated with ordinary least squares estimators (OLSEs) of parameters are given under considered models. The obtained results are a special case of some results given by Chu, Isotalo, Puntanen and Styan, (2004) under the conditions that the matrices X_1 and X_2 are orthogonal and V- orthogonal.

Keywords: *BLUE*, *OLSE*, orthogonally partitioned linear model, reduced model, Watson Efficiency.

1. GİRİŞ

$\mathbb{R}^{m\times n}$, $m\times n$ boyutlu reel matrislerin kümesi olmak üzere, A', A^{-}, A^{+}, $C(A)$, $C(A)^{\perp}$ ve $N(A)$ sembolleri $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ matrisinin sırasıyla transpozesini, bir genelleştirilmiş tersini, Moore-Penrose tersini, sütun uzayını, sütun uzayının dikini ve sıfır uzayını göstermektedir. $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ ve $B\in\mathbb{R}^{m\times k}$ olmak üzere $(A:B)$ bir parçalanmış matrisi ve $A^{\perp}$ ise, $C(A^{\perp})=N(A')=C(A)^{\perp}$ koşulunu gerçekleyen herhangi bir matrisi gösterecektir. Ayrıca $P_A=AA^{+}=A(A'A)^{-}A'$ ve $Q_A=I_m-P_A$ sırasıyla $C(A)$ ve $C(A)^{\perp}$ üzerine dik izdüşüm matrisleridir. Özellikle

$$P_i=P_{X_i} \text{ ve } Q_i=I-P_i,\ i=1,2, \tag{1}$$

göstermektedir.

$E(y)=X\beta$ ve $\text{cov}(y)=V$ olmak üzere, tam model olarak bilinen

$$y=X\beta+\varepsilon=X_1\beta_1+X_2\beta_2+\varepsilon \tag{2}$$

parçalanmış lineer modeli ele alınsın. Bu modelin diğer bir gösterimi

$$M=\{y,X\beta,V\}=\{y,X_1\beta_1+X_2\beta_2,V\} \tag{3}$$

dir. Burada $E(y)=X\beta$, $E(\varepsilon)=0$ ve $cov(y)=cov(\varepsilon)=V$ dir. Bu modelde $y\in\mathbb{R}^{n\times1}$ gözlenebilir rastgele vektör, $X_1\in\mathbb{R}^{n\times p_1}$ ve $X_2\in\mathbb{R}^{n\times p_2}$ olmak üzere, $X=(X_1:X_2)$ bilinenler matrisi, $\beta_1\in\mathbb{R}^{p_1\times1}$ ve $\beta_2\in\mathbb{R}^{p_2\times1}$ olmak üzere, $\beta=(\beta_1':\beta_2')'\in\mathbb{R}^{p\times1}$ bilinmeyen parametreler vektörü, $\varepsilon\in\mathbb{R}^{n\times1}$ hata vektörü ve $V\in\mathbb{R}^{n\times n}$ nonnegatif (negatif olmayan) tanımlı varyans kovaryans matrisidir. M modeli altında tahminler ile ilgili çalışıldığında M modelinin "bir olasılıkla" tutarlı, yani $y\in C(X:V)=C(X:VQ_X)$ olduğu kabul edilir (Rao, 1973: sf. 282).

M modeli altında $K\in\mathbb{R}^{k\times p}$ olmak üzere bir $K\beta$ parametrik fonksiyonunun tahmin edilebilir olmasının gerek ve yeter koşulu $C(K')\subseteq C(X')$ olmasıdır (Alalouf ve Styan, 1979). Buna göre $X\beta$ nın her zaman tahmin edilebilir olduğu açıkça görülmektedir ve X

tam sütun ranklı olduğunda ise, β tahmin edilebilirdir. β parametresinin alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi ($OLSE$), $(y-X\beta)'(y-X\beta)$ ifadesinin β parametresine göre minimumlaştırılmasıyla elde edilir ve $\hat{\beta}$ ile gösterilir. β parametresinin en iyi lineer yansız tahmin edicisi ($BLUE$) ise, β parametresinin tüm yansız tahmin edicileri arasından Löwner sıralamasına göre en küçük kovaryans matrisine sahip olan yansız tahmin edici olarak tanımlanır. X tam sütun ranklı ve V pozitif tanımlı olduğunda M modeli altında

$$OLSE(\beta \,|\, M\ ) = \hat{\beta}(M\ ) = (X'X)^{-1}X'y, \tag{4}$$

$$BLUE(\beta \,|\, M\ ) = \tilde{\beta}(M\ ) = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y \tag{5}$$

dir. (4) ve (5)'te verilen tahmin edicilerin kovaryans matrisleri sırasıyla

$$\operatorname{cov}(\hat{\beta} \,|\, M\ ) = (X'X)^{-1}X'VX(X'X)^{-1}, \tag{6}$$

$$\operatorname{cov}(\tilde{\beta} \,|\, M\ ) = (X'V^{-1}X)^{-1} \tag{7}$$

dir. Gauss-Markov Teoremi'nden (Odell, 1983) Löwner sıralamasına göre

$$\operatorname{cov}(\hat{\beta} \,|\, M\ ) \geq_L \operatorname{cov}(\tilde{\beta} \,|\, M\ ) \tag{8}$$

dir ya da denk olarak (8)'deki matrisler arasındaki fark nonnegatif tanımlıdır. İki tahmin edici arasında karşılaştırma yapmak için bazı yöntemler mevcuttur. Bunlardan biri, bir tahmin edicinin en iyi olmasının ölçüsü olarak tanımlanan etkinlik kavramıdır. İstatistiksel tahminde etkinlik konusu Fisher (1922) tarafından ortaya atılmıştır. Fisher tarafından kabul edilmiş olan ölçüt, bir tahmin edicinin diğer bir tahmin ediciden daha küçük varyansa sahip ise, daha etkin bir tahmin edici olduğudur. Wilks (1932) dağılım matrislerinin determinantları olarak genelleştirilmiş varyanslar kavramını tanıtmış ve genelleştirilmiş varyansların oranını bir vektör değerli parametrenin tahmininde etkinliğin bir ölçüsü olarak tanımlamıştır. Aitken (1935) ise, $OLSE$'nin genelleştirilmiş varyansını ele almış ve Watson (1951) doktora tezinde genelleştirilmiş varyansların oranı olarak $OLSE$'nin etkinliğini tanıtmıştır. Bu nedenle Watson tarafından tanıtılmış olan etkinlik Watson etkinliği olarak bilinir. (4) ve (5)'te verilen tahmin ediciler için (6) ve (7) kullanılarak *OLSE*'nin *BLUE*'ya göre (Watson) etkinliği

$$e = etk(\hat{\beta} \mid M) = \frac{\mid \mathrm{cov}(\tilde{\beta} \mid M) \mid}{\mid \mathrm{cov}(\hat{\beta} \mid M) \mid} = \frac{\mid X'X \mid^2}{\mid X'VX \mid \mid X'V^{-1}X \mid} \tag{9}$$

olarak elde edilir. Açıkça görülmektedir ki $0 < e \leq 1$ dir. $e = 1$ olmasının gerek ve yeter koşulu *OLSE*'nin *BLUE*'ya eşit olmasıdır (Puntanen ve Styan, 1989). *OLSE* ve *BLUE* nun eşitlikleri ile ilgili literatürde birçok çalışma mevcuttur. Bunlardan bazıları Anderson (1948), Rao (1967, 1968) ve Baksalary ve Trenkler (2009) olarak verilebilir.

Çalışmanın amacı, M modeli altında β parametresinin etkinliği ile β_1 ve β_2 alt parametrelerinin etkinlikleri arasındaki ilişkiler ile ilgili olan bazı sonuçlar vermektir. Bunun için M modeli ve bu model ile ilişkili bazı indirgenmiş modeller ele alınmaktadır. Özellikle X model matrisinin alt matrisleri olan X_1 ve X_2'nin dik, yani $X_1'X_2 = 0$ ve X_1 ve X_2'nin $V-$dik, yani $X_1'VX_2 = 0$ olduğu durumda M modeli altında β parametresinin etkinliğinin bazı çarpımsal ayrışımları, Chu, Isotalo, Puntanen ve Styan, (2004) tarafından ele alınmış olan konunun özel bir hali olarak elde edilmektedir. Literatürde Watson etkinliği ile ilgili birçok çalışma bulunmaktadır, bkz, örneğin, Liski, Puntanen ve Wang (1992), Liu (2000), Liu ve King (2002), Balakrishnan ve Rao (2003), Chu ve Styan (2003), Chu, Isotalo, Puntanen ve Styan (2004, 2005, 2007, 2008), Tian ve Wiens (2006).

2. PARAMETRELERİN WATSON ETKİNLİK AYRIŞIMI

Çalışmada M modelinin yanı sıra

$$M_1 = \{y, X_1\beta_1, V\}, \tag{10}$$

$$M_2 = \{y, X_2\beta_2, V\}, \tag{11}$$

$$M_{12} = \{Q_1y, Q_1X_2\beta_2, Q_1VQ_1\} \tag{12}$$

indirgenmiş modelleri de ele alınacaktır. M_1 ve M_2 modelleri, M modelinin küçük modelleri olarak bilinir ve sırasıyla $\beta_2 = 0$ ve $\beta_1 = 0$ kısıtlamaları altında M tam modelinden elde edilirler. M_{12} modeli ise, M modelinin Q_1 dik izdüşüm matrisi ile soldan çarpılmasıyla elde edilir ve Groß ve Puntanen (2000) tarafından M modelinin düzgün indirgenmiş modeli olarak adlandırılmıştır. (9)'da verilen etkinlik X matrisinin tam sütun ranklı olduğu durumda M_1, M_2 ve M_{12} modelleri altındaki parametreler için aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$etk(\hat{\beta}_1 | M_1) = \frac{|X_1'X_1|^2}{|X_1'VX_1||X_1'V^+X_1|} := e_{11} \tag{13}$$

$$etk(\hat{\beta}_2 | M_2) = \frac{|X_2'X_2|^2}{|X_2'VX_2||X_2'V^+X_2|} := e_{22} \tag{14}$$

$$etk(\hat{\beta}_2 | M_{12}) = \frac{|X_2'Q_1X_2|^2}{|X_2'Q_1VQ_1X_2||X_2'Q_1(Q_1VQ_1)^-Q_1X_2|} := e_2 \tag{15}$$

$X_1'X_2 = 0$ olduğu durumda

$$e_2 = \frac{|X_2'X_2|^2}{|X_2'VX_2||X_2'(Q_1VQ_1)^-X_2|} \tag{16}$$

biçimine indirgenir. Ana sonuçlara geçmeden önce M ve M_{12} modelleri altında β_2 parametresinin $OLSE$'leri ve $BLUE$'ları arasındaki ilişkiler ile ilgili aşağıdaki teorem verilecektir. Teoremin ispatı için Puntanen, Styan ve Isotalo (2011, Theorem 15.7-15.8)'e bakılabilir.

Teorem 2.1. X tam sütun ranklı olduğunda $\hat{\beta}_2(M) = \hat{\beta}_2(M_{12})$ ve $\tilde{\beta}_2(M) = \tilde{\beta}_2(M_{12})$ dir.

Teorem 2.1.'e göre açıkça görülmektedir ki M ve M_{12} modelleri altında β_2 parametresinin etkinlikleri eşittir, yani

$$etk(\hat{\beta}_2 | M) = etk(\hat{\beta}_2 | M_{12}) = e_2 \tag{17}$$

dir. Şimdi çalışmanın ana sonuçları olarak etkinlik çarpanlarının bazı ayrışımları aşağıda verilmektedir.

Teorem 2.2. $M = \{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2, V\}$ modeli ele alınsın ve $X_1'X_2 = 0$ olsun. Bu durumda M modeli altında β parametresinin etkinliği $e = e_{11}.e_2.k_1$ dir ve burada

$$k_1 = \frac{|X_2'VX_2|}{|X_2'VX_2 - X_2'VX_1(X_1'VX_1)^{-1}X_1'VX_2|}$$

dir.

İspat: $X_1'X_2 = 0$ olduğunda

$$|X'X| = |X_1'X_1||X_2'X_2| \tag{18}$$

olarak yazılır. Schur tamamlayıcısı determinant formülü (Seber, 2007, sf. 289, 291) kullanılarak

$$|X'VX| = |X_1'VX_1||X_2'AX_2|, \tag{19}$$

$$|X'V^+X| = |X_1'V^+X_1||X_2'BX_2| \tag{20}$$

elde edilir. Burada $A = V - VX_1(X_1'VX_1)^{-1}X_1'V$ ve $B = V^+ - V^+X_1(X_1'V^+X_1)^{-1}X_1'V^+$ dir. (18), (19) ve (20) eşitlikleri (9)'da yerine yazıldığında

$$e = \frac{|X_1'X_1|^2|X_2'X_2|^2}{|X_1'VX_1||X_2'AX_2||X_1'V^+X_1||X_2'BX_2|} \tag{21}$$

elde edilir. (13) ve (16), (21)'de yerine yazıldığında

$$e = e_{11} \cdot e_2 \cdot \frac{|X_2'VX_2||X_2'(Q_1VQ_1)^- X_2|}{|X_2'AX_2||X_2'BX_2|}$$

bulunur. Chu, Isotalo, Puntanen ve Styan, (2004, Lemma 4.2)'ye göre $(Q_1VQ_1)^- = X_2'BX_2$ olduğundan

$$k_1 = \frac{|X_2'VX_2|}{|X_2'AX_2|} = \frac{|X_2'VX_2|}{|X_2'VX_2 - X_2'VX_1(X_1'VX_1)^{-1}X_1'VX_2|}$$

olduğu görülür. □

Aşağıdaki sonuç Teorem 2.2'den açıkça görülmektedir.

Sonuç 2.3. M modeli ele alınsın ve $X_1'X_2 = 0$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

(a) $X_1'VX_2 = 0$,

(b) $e = e_{11} \cdot e_2$.

Teorem 2.4. $M = \{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2, V\}$ modeli ele alınsın. $X_1'X_2 = 0$ ve $X_1'VX_2 = 0$ olsun. Bu durumda $e = e_{11}.e_{22}.k_2$ dir ve

burada $k_2 = \dfrac{|X_2'V^+X_2|}{|X_2'V^+X_2 - X_2'V^+X_1(X_1'V^+X_1)^{-1}X_1'V^+X_2|}$

dir.

İspat. $X_1'VX_2 = 0$ olduğunda (19)'da verilen eşitlik

$$|X'VX| = |X_1'VX_1||X_2'VX_2| \tag{22}$$

olarak yazılır. Bu durumda (21)'de verilen eşitlik

$$e = \frac{|X_1'X_1|^2|X_2'X_2|^2}{|X_1'VX_1||X_2'VX_2||X_1'V^+X_1||X_2'V^+X_2 - X_2'V^+X_1(X_1'V^+X_1)^{-1}X_1'V^+X_2|} \tag{23}$$

olarak ifade edilir. (13) ve (14), (23)'de yerine yazıldığında

$$e = e_{11} \cdot e_{22} \cdot \frac{|X_2'V^+X_2|}{|X_2'V^+X_2 - X_2'V^+X_1(X_1'V^+X_1)^{-1}X_1'V^+X_2|}$$

bulunur. Burada $k_2 = \dfrac{|X_2'V^+X_2|}{|X_2'V^+X_2 - X_2'V^+X_1(X_1'V^+X_1)^{-1}X_1'V^+X_2|}$

dır.

Aşağıdaki sonuç Teorem 2.4'ten açıkça görülmektedir.

Sonuç 2.5. M modeli ele alınsın. $X_1'X_2 = 0$ ve $X_1'VX_2 = 0$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

(a) $X_1'V^+X_2 = 0$,

(b) $e = e_{11} \cdot e_{22}$.

Teorem 2.2 ve Teorem 2.4'ten görülmektedir ki $X_1'X_2 = 0$ ve $X_1'VX_2 = 0$ kabulleri altında $\frac{e_2}{e_{22}} = \frac{k_2}{k_1}$ dir ve $k_1 = k_2$ olduğunda $e_2 = e_{22}$ olacaktır. Bu durumun özel bir sonucu aşağıda verilmiştir.

Sonuç 2.6. M modeli ele alınsın. $X_1'X_2 = 0$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

(a) X_1 ve X_2, V dik ve X_1 ve X_2, V^+ diktir,

(b) $e_2 = e_{22}$.

3. SONUÇ

Watson Etkinliği, istatistikte ve özellikle uygulamalı bilimlerde iki tahmin edicinin

karşılaştırılması söz konusu olduğunda sıkça başvurulan bir yöntemdir. Bir lineer modelde model matrisi eğer dik olarak parçalanıyorsa, bu durumda bu model altında parametrenin etkinliğini alt veya indirgenmiş modellerdeki parametrelerin etkinliklerinin çarpımsal ayrışımı olarak ifade etmek sayısal hesaplamalarda kolaylıklar sağlayacaktır.

KAYNAKÇA

[1] Aitken, A.C. On least squares and linear combination of observations. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 55. 1935.

[2] Alalouf, I. S. & Styan, G. P. H. Characterizations of estimability in the general linear model. The Annals of Statistics, 7, 194–200, 1979.

[3] Anderson, T. W. On the theory of testing serial correlation, Skandinavisk Aktuarietidskrift, 31, 88–116, 1948.

[4] Baksalary, O. M. & Trenkler, G. A projector oriented approach to the best linear unbiased estimator. Statistical Papers, 50, 721–733, 2009.

[5] Balakrishnan, N. & Rao, C.R. Some efficiency properties of best linear unbiased estimators. J. Statist. Plann. Inf. 113, 551-555, 2003.

[6] Chu, K.L., Isotalo, J., Puntanen, S. & Styan, G.P.H. On decomposing the Watson efficiency of ordinary least squares in a partitioned weakly singular linear model. Sankhyā, 66, 634–651. 2004.

[7] Chu, K.L., Isotalo, J., Puntanen, S. & Styan, G.P.H. Some further results concerning the decomposition of the Watson efficiency in partitioned linear models. Sankhyā, 67, 74–89. 2005.

[8] Chu, K.L., Isotalo, J., Puntanen, S. & Styan, G.P.H. The efficiency factorization multiplier for the Watson efficiency in partitioned linear models: some examples and a literature review. Journal of Statistical Planning and Inference, 137, 3336–3351. 2007.

[9] Chu, K.L., Isotalo, J., Puntanen, S. & Styan, G.P.H. Inequalities and equalities for the generalized efficiency function in orthogonally partitioned linear models. In Inequalities and Applications (T. M. Rassias & D. Andrica, eds.), Cluj Univ. Press, pp. 13–69. 2008.

[10] Chu, K.L., & Styan, G.P.H. On the efficiency of OLS in simple linear regression, with special reference to the situation where the OLS and GLS regression lines are parallel. Report 2003-04, Dept. of Mathematics and Statistics, McGill University, Montr´eal (Qu´ebec), Canada, November 2003.

[11] Fisher, R. A. On the mathematical foundations of theoretical statistics, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A: 222, 309–368, 1922.

[12] Groβ, J. and Puntanen, S. Estimation under a general partitioned linearmodel. Linear Algebra Appl.321, 131-144. 2000.

[13] Liski, E. P., Puntanen, S. & Wang, S.G. Bounds for the trace of the difference of the covariance matrices of the OLSE and BLUE. Lin. Alg. App., 176, 121–130. 1992.

[14] Liu, S. Efficiency comparisons between the OLSE and the BLUE in a singular linear model. Journal of Statistical Planning and Inference, 84, 191–200. 2000.

[15] Liu, S. & King, M. L. Two Kantorovich-type inequalities and efficiency comparisons between the OLSE and BLUE. J. Inequalities and Application, 7,169–177. 2002.

[16] Odell, P.L. Gauss-Markov Theorem. In Kotz. Johnson and read, 113, 314-316, 1983.

[17] Puntanen, S. & Styan,, G.P.H. The equality of the ordinary least squares estimator and the best linear unbiased estimator (with discussion). Amer. Statist. 43, 153-164. 1989.

[18] Puntanen, S., Styan, and Isotalo, J. Matrix Tricks for Linear Statistical Models, Our Personal Top Twenty, Springer, Heidelberg, 2011.

[19] Rao, C.R. Least squares theory using an estimated dispersion matrix and its application to measurement of signals. Proc. Fifth Berkeley Symposium on Mathe-matical Statistics and Probability: Berkeley, California, 1965/1966, vol. 1, L.M. Le Cam and J. Neyman, eds., Univ. of California Press, Berkeley, 355-372. 1967.

[20] Rao, C. R. A note on a previous lemma in the theory of least squares and some further results. Sankhyā, Ser. A, 30, 259–266. 1968.

[21] Rao, C.R. Representations of best linear unbiased estimators in the Gauss-Markoff model with a singular dispersion matrix.J. Multivariate Anal. 3, 276-292. 1973.

[22] Seber, G.A.F., A Matrix Handbook for Statisticians, John Wiley, New York, 2007.

[23] Tian, Y. & Wiens, D. P. On equality and proportionality of ordinary least squares, weighted least squares and best linear unbiased estimators in the general linear model. Statistics & Probability Letters, 76, 1265–1272. 2006.

[24] Watson, G. S. Serial correlation in regression analysis. Ph.D. Thesis, Dept. of Experimental Statistics, North Carolina State College, Raleigh. 1951.

[25] Wilks, S.S. Certain generalizations in the analysis of variance. Biometrika, 24, 471-494, 1932.