BEYKENT ÜNİVERSİTESİ FEN VE MÜHENDİSLİK BİLİMLERİ DERGİSİ

Sayı 8(1) 2015, 51 – 62

SONLU TANE İNVOLUTİF MATRİSİN TOPLAMININ RANKI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Gülsemin Betül DURAN *(gulsemin.duran1@ogr.sakarya.edu.tr)*
Sakarya Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Sakarya, Türkiye

Tuğba PETİK *(tpetik@sakarya.edu.tr)*
Sakarya Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Sakarya, Türkiye

ÖZET

Sonlu tane idempotent matrisin toplamı için rank eşitliği ile ilgili açık bir problem Gauss eliminasyon yöntemi ile Chen M. ve arkadaşları tarafından çözülmüştür [Chen M. et al. On the open problem related to rank equalities for the sum of finitely many idempotent matrices and its applications, The Scientific World Journal, 2014]. Bu çalışmada sonlu tane involutif matrisin toplamı için benzer bir rank eşitliği elde edilmekte ve bu eşitlikten de bazı sonuçlar türetilmektedir.

Anahtar Kelimeler: *idempotent matris; involutif matris; rank.*

BEYKENT UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE AND ENGINEERING

Volume 8(1) 2015, 51 – 62

A RANK EQUALITY FOR THE SUM OF FINITELY MANY INVOLUTIVE MATRICES

Gülsemin Betül DURAN *(gulsemin.duran1@ogr.sakarya.edu.tr)*
Sakarya University, Faculty of Arts and Sciences, Department of Mathematics, Sakarya, Turkey

Tuğba PETİK *(tpetik@sakarya.edu.tr)*
Sakarya University, Faculty of Arts and Sciences, Department of Mathematics, Sakarya, Turkey

ABSTRACT

Chen M. and et al. have solved an open problem related to rank equalities for the sum of finitely many idempotent matrices using the Gaussian elimination method in [Chen M. and et al., On the open problem related to rank equalities for the sum of finitely many idempotent matrices and its applications, The Scientific World Journal, 2014]. In this work, it is obtained a similar rank equality for the sum of finitely many involutive matices and derived some results from this equality.

Keywords: *idempotent matrix; involutive matrix; rank.*

1. GİRİŞ

$\mathbb{C}_n$, $\mathbb{C}_{n\times m}$, I_n ve $\mathbb{Z}^+$ sembolleri, sırasıyla, $n\times n$ boyutlu kompleks matrislerin kümesini, $n\times m$ boyutlu kompleks matrislerin kümesini, $n\times n$ boyutlu birim matrisi ve pozitif tamsayıların kümesini göstermektedir. Ayrıca, $rk(A)$, A matrisinin rankına; A^T, A matrisinin transpozesine; $tr(A)$, A matrisinin izine; $A\oplus B$ ise A ve B matrislerinin direkt toplamına karşılık gelmektedir.

Bir $A\in\mathbb{C}_n$ matrisine, $A^2=A$ ise, *idempotent matris*, $A^2=I_n$ ise *involutif matris* denir. Matris teorisinin kullanıldığı uygulamalı bilimlerin birçoğunda, bu ve diğer tipli özel matrislerle sık sık karşılaşılır ve literatürde bu matrislerle ilgili pek çok çalışmaya rastlamak mümkündür [Gross ve Trenkler, 1999-Chen ve arkadaşları, 2014]. Özel tipli matrislerle ilgili rank eşitlikleri son zamanlarda yaygın olarak çalışılmaya başlanmıştır. Bu bağlamda iki idempotent veya involutif matrisin toplamı ile ilgili rank eşitlikleri elde edilmiş [Tian ve Styan, 2001], daha sonra idempotent matris sayısı üçe çıkarılıp, üç tane idempotent matrisin toplamı ile ilgili bir rank eşitliği elde ortaya koyulmuştur [Tian ve Styan, 2006].

Chen M. ve arkadaşları, sonlu tane idempotent matrisin toplamı ile ilgili daha genel bir rank eşitliği ortaya koymuşlardır [Chen ve arkadaşları, 2014]. Fakat involutif matrislerle ilgili olarak bugüne kadar sadece iki involutif matrisin toplamı ile ilgili rank eşitliği elde edilmiştir. Bu çalışmadaki başlıca amaç, sonlu tane involutif matrisin toplamı için bir rank eşitliği elde etmektir.

Bu kısmı, çalışmanın ana sonucunu ispatlamada ve bu sonucun uygulamasında temel teşkil edecek olan aşağıdaki iki yardımcı sonucu vererek kapatalım.

Lemma 1.1. A, B, C ve D matrisleri uygun boyutlu matrisler ve A tersinir ise, bu durumda

$$rk\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = rk(A) + rk(D - CA^{-1}B)$$

gerçeklenir.

Bu lemmanın ispatı, [Puntanen ve Styan, 2005]' deki Aitken blok-köşegenleştirme formülünden hemen görülebilmektedir.

Lemma 1.1' de $A = B = I_n$ alındığında

$$rk\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ X & Y \end{pmatrix} = n + rk(X - Y)$$

olduğu açıktır.

Lemma 1.2. [Chen ve arkadaşları 2014, Lemma 4] $M_1, M_2, \ldots, M_k$ matrisleri $n \times m$ boyutlu kompleks matrisler olsun. Bu durumda, $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$rk\begin{pmatrix} M_1 & 0 & \ldots & 0 & M_1 \\ 0 & M_2 & \ldots & 0 & M_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & M_k & M_k \\ M_1 & M_2 & \ldots & M_k & 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{k} rk(M_i) + rk(\sum_{i=1}^{k} M_i)$$

olur.

2. K TANE İNVOLUTİF MATRİSİN TOPLAMI İÇİN BİR RANK EŞİTLİĞİ VE SONUÇLARI

Chen ve arkadaşları, 2014'de, sonlu tane idempotent matrisin toplamının rankı ile ilgili aşağıdaki teoremi ifade ve ispat etmişlerdir.

Teorem 2.1. [Chen ve arkadaşları 2014, Teorem 6] $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $M_1, M_2, \ldots, M_k \in \mathbb{C}_n$ matrisleri idempotent olsun. Bu durumda,

$$W(M_1,\ldots,M_k)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}M_1 & M_2 & M_3 & \cdots & M_{k-1} & M_k \\ M_2 & 0 & M_2M_3 & \cdots & M_2M_{k-1} & M_2M_k \\ M_3 & M_3M_2 & 0 & \cdots & M_3M_{k-1} & M_3M_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ M_{k-1} & M_{k-1}M_2 & M_{k-1}M_3 & \cdots & 0 & M_{k-1}M_k \\ M_k & M_kM_2 & M_kM_3 & \cdots & M_kM_{k-1} & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$rk\left(\sum_{i=1}^{k} M_i\right) = rk\big(W(M_1,\ldots,M_k)\big) - \sum_{i=2}^{k} rk(M_i)$$

$$= rk\big(W(M_1,\ldots,M_k)\big) - \sum_{i=2}^{k} tr(M_i)$$

$$= rk\big(W(M_1,\ldots,M_k)\big) - tr\left(\sum_{i=2}^{k} M_i\right)$$

olur.

Bu teoremin ispatında kullanılan metot, involutif matrisler için kullanılarak benzer bir rank eşitliği ortaya koyulacaktır.

Bu kısımda $M_1, M_2, \ldots, M_k \in \mathbb{C}_n$ olmak üzere aşağıdaki matris gösterimi kullanılmaktadır.

$$V(M_1, M_2, \ldots, M_k) =$$

$$\begin{pmatrix} I_n & M_2 & \dots & M_{k-1} & M_k \\ M_2 & I_n - M_2M_1M_2 - M_2 & \dots & M_2M_{k-1} - M_2M_1M_{k-1} & M_2M_k - M_2M_1M_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ M_{k-1} & M_{k-1}M_2 - M_{k-1}M_1M_2 & \dots & I_n - M_{k-1}M_1M_{k-1} - M_{k-1} & M_{k-1}M_k - M_{k-1}M_1M_k \\ M_k & M_kM_2 - M_kM_1M_2 & \dots & M_kM_{k-1} - M_kM_1M_{k-1} & I_n - M_kM_1M_k - M_k \end{pmatrix}.$$

Teorem 2.2. $k \in \mathbb{Z}^+$ ve $M_1, M_2, \dots, M_k \in \mathbb{C}_n$ involutif matrisler olmak üzere

$$rk\left(\sum_{i=1}^{k} M_i\right) = rk\left(V(M_1, \dots, M_k)\right) + n\left(1-k\right) \tag{2.1}$$

gerçeklenir.

İspat:

$$N = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 & M_1 \\ 0 & M_2 & \dots & 0 & M_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M_k & M_k \\ M_1 & M_2 & \dots & M_k & 0 \end{pmatrix}$$

olsun. N matrisini,

$$N_{11} = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_k, \qquad N_{12} = \left(M_1^T \ M_2^T \dots \ M_k^T\right)^T \tag{2.2}$$

ve

$$N_{21} = (M_1 \ M_2 \ \dots \ M_k) \tag{2.3}$$

olmak üzere,

$$N = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

şeklinde parçalayalım. $i=1,\ldots,k$ için M_i matrislerinin involutif olduğu dikkate alınarak Lemma 1.2' den

$$rk(N)=kn+rk(\sum_{i=1}^{n}M_i) \tag{2.5}$$

yazılabilir. Öte yandan,

$$W_1=\left(0 \;\; (M_2M_1-M_2)^T \;\; \ldots \;\; (M_kM_1-M_k)^T\right)^T \in \mathbb{C}_{nk\times n},$$

$$W_2=(-M_1 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0)\in \mathbb{C}_{n\times nk}, \tag{2.6}$$

$$W_3=\left(M_1-I_n \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0\right)\in \mathbb{C}_{n\times nk},\;\; W_4=\left(-M_1^T \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0\right)^T \in \mathbb{C}_{nk\times n}$$

ve $Q=N_{11}+W_1N_{21}$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} I_{nk} & 0 \\ W_2 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{nk} & W_1 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{nk} & 0 \\ W_3 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{nk} & W_4 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} Q+N_{12}W_3 & \left(Q+N_{12}W_3\right)W_4+N_{12} \\ W_2Q+N_{21}+W_2N_{12}W_3 & \left(W_2Q+N_{21}+W_2N_{12}W_3\right)W_4+W_2N_{12} \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

elde edilir.

(2.2)' nin ilk eşitliği, (2.3) eşitliği ve (2.6)' nın ilk eşitliğinin ışığında Q matrisi

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ M_2-M_2M_1 & M_2+M_2M_1M_2-I_n & \ldots & M_2M_1M_{k-1}-M_2M_{k-1} & M_2M_1M_k-M_2M_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ M_{k-1}-M_{k-1}M_1 & M_{k-1}M_1M_2-M_{k-1}M_2 & \ldots & M_{k-1}+M_{k-1}M_1M_{k-1}-I_n & M_{k-1}M_1M_k-M_{k-1}M_k \\ M_k-M_kM_1 & M_kM_1M_2-M_kM_2 & \ldots & M_kM_1M_{k-1}-M_kM_{k-1} & M_k+M_kM_1M_k-I_n \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde, (2.2)' nin ikinci ve (2.6)' nın üçüncü eşitliği, (2.8) eşitliği ile birlikte göz önüne alınırsa, $Q+N_{12}W_3$ matrisi,

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & M_2+M_2M_1M_2-I_n & \dots & M_2M_1M_{k-1}-M_2M_{k-1} & M_2M_1M_k-M_2M_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & M_{k-1}M_1M_2-M_{k-1}M_2 & \dots & M_{k-1}+M_{k-1}M_1M_{k-1}-I_n & M_{k-1}M_1M_k-M_{k-1}M_k \\ 0 & M_kM_1M_2-M_kM_2 & \dots & M_kM_1M_{k-1}-M_kM_{k-1} & M_k+M_kM_1M_k-I_n \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

olarak bulunur. Yine, (2.9)' dan, (2.2)'nin ikinci ve (2.6)' nın dördüncü eşitliği yardımı ile,

$$\left(Q+N_{12}W_3\right)W_4+N_{12}=\left(0\ \ M_2{}^T\ \dots\ M_k{}^T\right)^T \quad (2.10)$$

elde edilir. Öte yandan (2.3), (2.6)' nın ikinci eşitliği ve (2.9)' dan

$$W_2(Q+N_{12}W_3)+N_{21}=(0\ \ M_2\ \dots\ M_k) \quad (2.11)$$

yazılabilir. Son olarak, (2.2)'nin ikinci eşitliği ile, (2.6)'nın ikinci ve dördüncü eşitlikleri, (2.11) ile birlikte göz önüne alınırsa,

$$\left(W_2Q+N_{21}+W_2N_{12}W_3\right)W_4+W_2N_{12}=-I_n \quad (2.12)$$

bulunur. Dolayısıyla, (2.9), (2.10), (2.11) ve (2.12) eşitlikleri (2.7)' de yerlerine yazılırsa

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & M_2+M_2M_1M_2-I_n & \dots & M_2M_1M_k-M_2M_k & M_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & M_kM_1M_2-M_kM_2 & \dots & M_k+M_kM_1M_k-I_n & M_k \\ 0 & M_2 & \dots & M_k & -I_n \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

matrisi elde edilir. Böylece, $\begin{pmatrix} I_{nk} & 0 \\ W_2 & I_n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} I_{nk} & W_1 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} I_{nk} & 0 \\ W_3 & I_n \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} I_{nk} & W_4 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ matrisleri tersinir olduğundan, $\begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & 0 \end{pmatrix}$ matrisinin rankı, (2.13)' deki matrisin rankına eşittir.

Şimdi,

$$Z_{11} = \begin{pmatrix} M_2 + M_2M_1M_2 - I_n & \cdots & M_2M_1M_k - M_2M_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_kM_1M_2 - M_kM_2 & \cdots & M_k + M_kM_1M_k - I_n \end{pmatrix},$$

$Z_{12} = \left(M_2{}^T \ldots \ M_k{}^T \right)^T$ ve $Z_{21} = \left(M_2 \ \ldots \ M_k \right)$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_{(k-1)n} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & -I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_{(k-1)n} \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & Z_{21} \\ Z_{12} & -Z_{11} \end{pmatrix} = V(M_1, \ldots, M_k)$$

olduğu açıktır. Buradan, $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_{(k-1)n} & 0 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 0 & I_{(k-1)n} \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ matrislerinin tersinir olduğu düşünüldüğünde, $Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & -I_n \end{pmatrix}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} rk(N) = rk\begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & 0 \end{pmatrix} &= rk(I_n \oplus Z) = rk(I_n) + rk(Z) \\ &= n + rk(V(M_1, \ldots, M_k)) \end{aligned} \tag{2.14}$$

bulunur. Böylece, (2.5) ve (2.14)' den istenen sonuç elde edilir.

Teorem 2.2' de $k = 2$ ve $k = 3$ alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa, sırasıyla aşağıdaki iki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.1. M_1 ve M_2 matrisleri $n \times n$ boyutlu involutif matrisler olsun. Bu durumda

$$rk(M_1+M_2)=rk\begin{pmatrix} I_n & M_2 \\ I_n+M_2 & I_n-M_1 \end{pmatrix}-n$$

olur. Ayrıca, M_2 involutif bir matris ise $-M_2$ de involutif bir matris olacağından

$$rk(M_1-M_2)=rk\begin{pmatrix} I_n & -M_2 \\ I_n-M_2 & I_n-M_1 \end{pmatrix}-n$$

elde edilir.

Sonuç 2.2. M_1, M_2 ve M_3 matrisleri $n\times n$ boyutlu involutif matrisler olsun. Bu durumda,

$$rk\left(M_1+M_2+M_3\right)=rk(M_1M_2+M_1M_3+I_n)$$

olur.

İspat. Teorem 2.2' ye göre,

$$rk\left(M_1+M_2+M_3\right)=rk\begin{pmatrix} I_n & M_2 & M_3 \\ M_2 & I_n-M_2M_1M_2-M_2 & M_2M_3-M_2M_1M_3 \\ M_3 & M_3M_2-M_3M_1M_2 & I_n-M_3M_1M_3-M_3 \end{pmatrix}-2n$$

yazılabilir. Elementer işlemlerle

$\begin{pmatrix} I_n & M_2 & M_3 \\ M_2 & I_n-M_2M_1M_2-M_2 & M_2M_3-M_2M_1M_3 \\ M_3 & M_3M_2-M_3M_1M_2 & I_n-M_3M_1M_3-M_3 \end{pmatrix}$ matrisinin

$I_n\oplus\begin{pmatrix} -M_2M_1M_2-M_2 & -M_2M_1M_3 \\ -M_3M_1M_2 & -M_3M_1M_3-M_3 \end{pmatrix}$ matrisine denk olduğu görülebilir. Böylece,

$$rk\left(M_1+M_2+M_3\right)=rk\left(I_n\oplus\begin{pmatrix} -M_2M_1M_2-M_2 & -M_2M_1M_3 \\ -M_3M_1M_2 & -M_3M_1M_3-M_3 \end{pmatrix}\right)-2n$$

veya,

$$rk\left(M_1+M_2+M_3\right) = rk\begin{pmatrix} -M_2M_1M_2-M_2 & -M_2M_1M_3 \\ -M_3M_1M_2 & -M_3M_1M_3-M_3 \end{pmatrix} - n \qquad (2.15)$$

yazılabilir. Öte yandan, $\begin{pmatrix} -M_2M_1M_2-M_2 & -M_2M_1M_3 \\ -M_3M_1M_2 & -M_3M_1M_3-M_3 \end{pmatrix}$ matrisi de $\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ M_1M_2 & -M_1M_3-I_n \end{pmatrix}$ matrisine denk olduğundan, Lemma 1.1'e göre,

$$rk\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ M_1M_2 & -M_1M_3-I_n \end{pmatrix} = n + rk(M_1M_2 + M_1M_3 + I_n)$$

bulunur. Böylece (2.15)' den istenen sonuç elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] Gross J. and Trenkler G., "Nonsingularity of the difference of two oblique projectors", SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 1999, 21, 390-395.

[2] Koliha J. J., Rakočević V., "Invertibility of the difference of idempotents, Linear and Multilinear Algebra", 2003, 51, 97-110.

[3] Koliha J.J., Rakočević V., "Invertibility of the sum of idempotents, Linear and Multilinear Algebra", 2002, 50, 285-292.

[4] Koliha J. J., Rakočević V., Straškraba I., "The difference and sum of projectors", Linear Algebra Appl., 2004, 388, 279-288.

[5] Koliha J. J., Rakočević V., "The nullity and rank of linear combinations of idempotent matrices", Linear Algebra Appl., 2006, 418, 11-14.

[6] Marsaglia G., Styan G.P.H., "Equalities and inequalities for ranks of matrices", Linear and Multilinear Algebra, 1974, 2, 269-292.

[7] Tian Y., Styan G.P.H., "Rank equalities for idempotent and involutory matrices", Linear Algebra App"., 2001, 335, 101-117.

[8] Tian Y., Styan G.P.H., "Rank equalities for idempotent matrices with applications", Journal of Computational and Applied Mathematics, 2006, 191, 77-97.

[9] Tian Y., Styan G.P.H., "A new rank formula for idempotent matrices with applications", Comment. Math. Univ. Carolinae, 2002, 43, 379-384.

[10] Chen M., Chen Q., Li Q., and Yang Z., "On the open problem related to rank equalities for the sum of finitely many idempotent matrices and its applications", Hindawi Publishing Corporation, The Scientific World Journal, 2014, Article ID 702413, 7 pages.

[11] Puntanen S., Styan G.P.H., Historical Introduction: Issai Schur and the Early Development of the Schur Complement, Zhang F. (Ed.), The Schur Complement And Its Applications (1-16), USA, 2005.