

OTOBANLARDA TRAFİK AKIŞ DİNAMİĞİNİN İNCELENMESİ

Hasan CARFİ (*hcarfi@hotmail.com*)

Beykent Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Öğrencisi

Bahaddin SİNSOYSAL (*bsinsoysal@beykent.edu.tr*)

Beykent Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik-Bilgisayar Bölümü

ÖZET

Makalede otoyollardaki trafik akışının dinamiğini düzgün aksettiren matematiksel bir model oluşturulmuştur. ρ_l ve ρ_r sırasıyla arakesitin sağ ve sol tarafındaki araç yoğunluğunu göstermek üzere, $\rho_l > \rho_r$ durumunda çözümün parçalı sürekli bir fonksiyon olduğu gözlenmiştir. Aksi halde, çözümde yeri önceden bilinmeyen bir şokun meydana geldiği ispatlanmıştır. İlâveten önerilen metodun gerçekleştirilmesi için akış parametreleri de bulunmuştur

Anahtar Kelimeler: Trafik akışı, simülasyon modeli, Akış parametreleri.

INVESTIGATING OF THE DYNAMIC OF TRAFFIC FLOW ON A HIGHWAY

Hasan CARFI (*hcarfi@hotmail.com*)

Beykent University, Institute of Science, MSc Student

Bahaddin SİNSOYSAL (*bsinsoysal@beykent.edu.tr*)

Beykent University, Faculty of Science and Letters, Department of Mathematics and Computing

ABSTRACT

A mathematical model reflecting properly the dynamics of traffic flow on highways has been constructed. In the case of $\rho_\ell > \rho_r$, the solution is observed as a piecewise continuous function, where ρ_ℓ and ρ_r are the densities of cars on the left and right side of the intersection respectively. On the contrary case, it has been proven that a shock of which the location is unknown beforehand arises in the solution and furthermore a method specifying the location of jump has also been proposed. In addition to the realization of the suggested method, the parameters of the flow are also found.

Keywords: *Traffic flow, simulation model, flow parameters.*

1. GİRİŞ

Bilindiği üzere otobanlarda arabaların akışını idare etmek günümüzün en güncel problemlerinden biridir. Trafikteki tıkanıklık problemini minimuma indirmek veya çözmek için sadece enstrümental düzeyde müdahale etmek yeterli değildir. Bu tür problemleri çözmek için bir matematiksel modelin oluşturulmasına ihtiyaç vardır. Bu alanda ilk ve önemli araştırmalar [2], [5] ve [7] de yapılmıştır.

$\rho(x,t)$ ile birim uzunluktaki araba yoğunluğunu, $q(x,t)$ ile otobanın herhangi bir kesitinden geçen araba sayısını gösterelim. Bu durumda

$$\int_a^b \rho(x,t_1)dx \text{ ve } \int_a^b \rho(x,t_2)dx \text{ otobanın herhangi bir } [a,b] \text{ parçasında } t = t_1$$

ve $t = t_2$ zamanlarındaki araba sayılarını ifade etmektedir. $\int_{t_1}^{t_2} q(a,s)ds$ ve

$$\int_{t_1}^{t_2} q(b,s)ds \text{ integralleri } \Delta t = t_2 - t_1 \text{ zaman aralığında } a \text{ noktasında trafığe}$$

katılan ve b noktasında trafikten ayrılan arabaların sayısını gösterdiğinden aşağıdaki

$$\int_a^b \rho(x,t_2)dx - \int_a^b \rho(x,t_1)dx = \int_{t_1}^{t_2} q(a,s)ds - \int_{t_1}^{t_2} q(b,s)ds \quad (1)$$

denge denklemi geçerlidir. (1) denkleminde ortalama değer teoremini uygularsak

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_a^b \frac{\partial \rho(x,\bar{t})}{\partial t} (t_2 - t_1) dx = \frac{1}{b - a} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial q(\bar{a},s)}{\partial x} (b - a) ds$$

elde ederiz. $t_2 \rightarrow t_1$ ve $a, b \rightarrow x$ olmak koşuluyla limit alırsak aşağıdaki

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

denklemini alırız.

Akış dinamiğini incelemek için (2) denkleminde q fonksiyonunun ρ lokal yoğunluk ile arasındaki fonksiyonel bağıntıyı bilmek gerekmektedir. (2) denkleminin çıkarılışı sürecinde aşağıdaki fiziksel yaklaşımlar söz konusudur.

Otobanda araba akışının yeteri kadar yoğun olduğu varsayılır.

Arabaların yoğun olduğu bölgede otobandan araba çıkışı ve girişinin olmadığı kabul edilir.

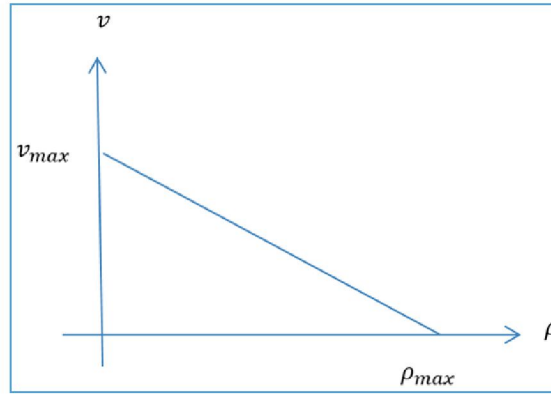
Otobanda araç sürücülerinin refleksleri dikkate alınmamaktadır.

2. AKIŞ PARAMETRELERİNİN BULUNMASI

Önce otobanda arabaların hızını belirlemek için bir formül oluşturalım. Fakat bu formülün oluşturulması teorik ve deneysel verilere dayanarak elde edilebilir. Bu formülleri araba hızını ifade etmek için birinci yaklaşım olarak kabul edebiliriz.

Göz önüne aldığımız $[a, b]$ aralığında arabaların tampon-tampona dizildiğini varsayalım. Bu durumda arabaların hareketi Şekil 1 de gösterildiği gibidir. Ayrıca kinematik teoriye göre akış hızı aşağıdaki gibi olur

$$v = \frac{q}{\rho} \quad (3)$$



Şekil 1.

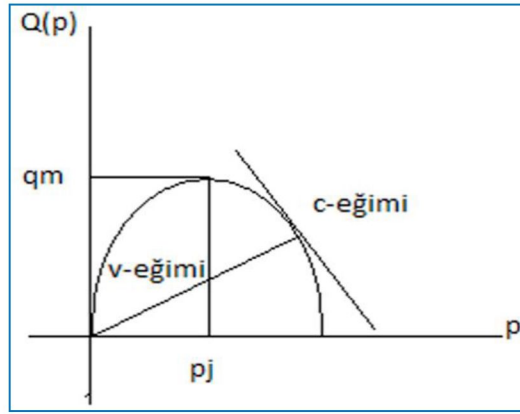
Araba hızı ile yoğunluk arasındaki bağlantı $A(0, v_{\max})$ ve $B(\rho_{\max}, 0)$ noktalarından geçen doğrunun denkleminde

$$v(\rho) = v_{\max} - \frac{v_{\max} \rho}{\rho_{\max}} \quad (4)$$

olarak bulunur. (1) ifadesini dikkate alınarak

$$Q(\rho) = \rho v(\rho) = v_{\max} \left(\rho - \frac{\rho^2}{\rho_{\max}} \right) \quad (5)$$

elde edilir.



Şekil 2.

Otobanda gözlemlenen reel araç sayıları göstermektedir ki, tek şeritli yollarda

$$\rho_{\max} = 225 \frac{\text{araba}}{\text{mil}}, \rho_j = 80 \frac{\text{araba}}{\text{mil}}, q_{\max} = 1500 \frac{\text{araba}}{\text{saat}}$$

olmaktadır. Tek şeritteki bu sayılar otoban için birinci yaklaşım olarak kabul edilebilir ve bu yaklaşımla tüm otobandaki araba sayıları şeritlerin sayısı ile çarpılarak elde edilir. Otobandaki reel deneyler sonucunda, akış maksimum değerini düşük hızlarda $v = \frac{q_{\max}}{\rho_{\max}} = 20 \frac{\text{mil}}{\text{saat}}$ değerinde almaktadır.

Dalganın dağılım hızı

$$c(\rho) = Q'(\rho) = v(\rho) + \rho v'(\rho) \quad (6)$$

olur. $v'(\rho) < 0$ olduğundan $c(\rho)$ hızı arabaların hareket hızından küçüktür. Dalga trafik akışının aksine hareket ederek, sürücülere ileride bir problemin olduğu hakkında bilgi verir. $c(\rho)$ hızı $Q(\rho)$ eğrisinin eğimine eşit olur, yani dalga $\rho < \rho_j$ olduğunda ileriye doğru, $\rho > \rho_j$ olduğunda ise geriye doğru hareket eder. $\rho = \rho_j$ olduğunda, yani $\rho = \rho_j$ maksimum değer aldığı anda dalga yola nazaran hareketsiz kalır.

3. SİMÜLASYON MODELİ VE ÇÖZÜMÜ

Trafikteki akış dinamiğini incelemek için

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

denkleminin aşağıdaki

$$\rho(x,t) = \begin{cases} \rho_\ell, & x < 0 \\ \rho_r, & x > 0 \end{cases} \quad (8)$$

başlangıç koşulu çerçevesinde inceleyelim. Burada ρ_ℓ ve ρ_r sayıları ρ yoğunluğunun sıçrayışın arkasında ve önündeki değerlerini göstermektedir ve önce $\rho_\ell > \rho_r$ kabul edelim.

Literatürden bilindiği üzere (7), (8) probleminin çözümü

$$\rho(x,t) = \begin{cases} \rho_\ell, & \xi < 0 \\ \rho_r, & \xi > 0 \end{cases} \quad (9)$$

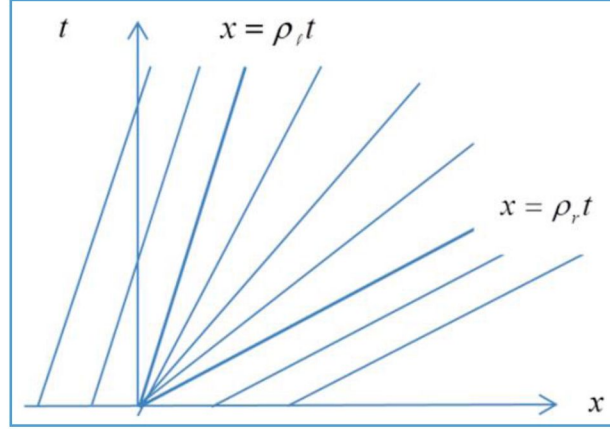
olmaktadır. Burada ξ karakteristiklerin denklemi olup

$$\xi = x - Q'(\rho)t \quad (10)$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi, (10) ifadesi ile tanımlanan karakteristikleri inceleyelim.

Genel teoriden bilindiği üzere, $\rho_\ell > \rho_r$ olduğunda çözümde çok değerlilik oluşamaz. $\rho_\ell > \rho_r$ ve $\rho_r \leq \rho \leq \rho_\ell$ olduğu için (7) denkleminin $x = \rho_r t$ ve $x = \rho_\ell t$ doğruları arasında kalan tüm otomodel

çözümleri koordinat başlangıcından geçen doğrulardır, yani $\xi = 0$ olur, Şekil 3.



Şekil 3.

(7), (8) probleminin fiziksel anlamlı çözümünü yazmak için

$$x = v_{\max} \left(1 - \frac{2}{\rho_{\max}} \rho \right) t \quad (11)$$

doğrusu ile $\rho = \rho_r$ ve $\rho = \rho_\ell$ doğrularını başlangıç koşulunu koruyacak ve aynı zamanda çözümün sürekliliğini sağlayacak şekilde birleştirmek gerekmektedir. Dolayısıyla

- $\xi < 0$ olduğunda $\rho = \rho_\ell$ olup

$$\frac{x}{t} < v_{\max} \left(1 - \frac{2}{\rho_{\max}} \rho_\ell \right),$$

- $\xi > 0$ olduğunda $\rho = \rho_r$ olup

$$\frac{x}{t} > v_{\max} \left(1 - \frac{2}{\rho_{\max}} \rho_r \right),$$

- $\xi = 0$ olduğunda ise (11) ifadesinden

$$\rho = -\frac{\rho_{\max}}{v_{\max}} \frac{x}{2t} + \frac{\rho_{\max}}{2}$$

elde edilir. Bu ifadeleri dikkate alarak problemin çözümünü aşağıdaki şekilde

$$\rho(x,t) = \begin{cases} \rho_\ell, & \frac{x}{t} < v_{\max} \left(1 - \frac{2}{\rho_{\max}} \rho_\ell\right), \\ -\frac{\rho_{\max}}{v_{\max}} \frac{x}{2t} + \frac{\rho_{\max}}{2}, & v_{\max} \left(1 - \frac{2}{\rho_{\max}} \rho_\ell\right) < \frac{x}{t} < v_{\max} \left(1 - \frac{2}{\rho_{\max}} \rho_r\right), \\ \rho_r, & \frac{x}{t} > v_{\max} \left(1 - \frac{2}{\rho_{\max}} \rho_r\right) \end{cases} \quad (12)$$

alırız. (12) ifadesi ile tanımlanan çözümün grafiği Şekil 4 de gösterilmiştir.

Şimdi arabaların başlangıç dağılımının Şekil 5 de gösterildiği biçimde olduğu, yani $\rho_\ell < \rho_r$ durumunu inceleyelim. Bu durumda (7) , (8) probleminin yerine, [3] de olduğu gibi

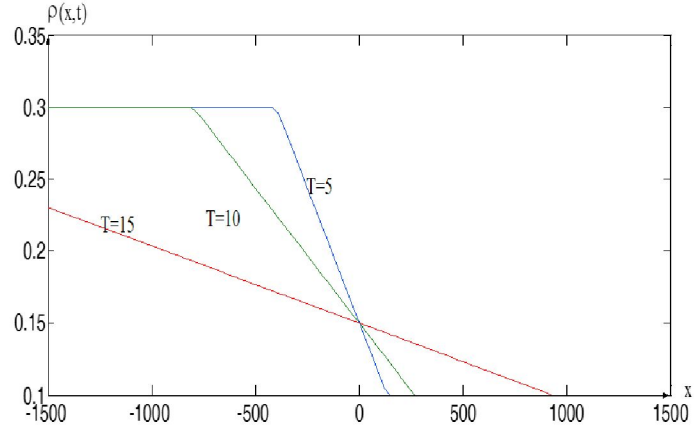
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + Q \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) = 0 \quad (13)$$

$$u(x,0) = \begin{cases} \rho_\ell x, & x < 0 \\ \rho_r x, & x > 0 \end{cases} \quad (14)$$

problemini çözmemiz gerekir. Söz konusu çözüm

$$u(x,t) = \begin{cases} u_-, & \xi < 0 \\ u_+, & \xi > 0 \end{cases} \quad (15)$$

olmaktadır.



Şekil 4

(13), (14) problemi [3] ve [4] de incelenmiştir ve $\rho(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ ifadesinin (7), (8) probleminin çözümü olduğu ispatlanmıştır. Burada

$$u_- = -\frac{v_{\max}}{\rho_{\max}} \rho_{\ell}^2 t + \rho_{\ell} \left[x - v_{\max} \left(1 - \frac{2\rho_{\ell}}{\rho_{\max}} \right) \right] t \quad (16)$$

ve

$$u_+ = -\frac{v_{\max}}{\rho_{\max}} \rho_r^2 t + \rho_r \left[x - v_{\max} \left(1 - \frac{2\rho_r}{\rho_{\max}} \right) \right] t \quad (17)$$

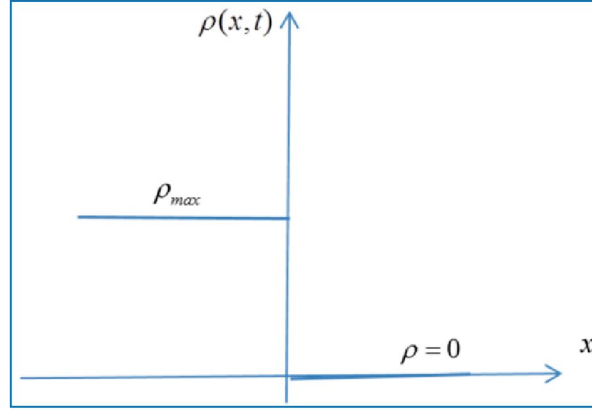
dır. Bu duruma karşılık gelen problemin karakteristikleri Şekil 6 da gösterilmiştir.

Genel teoriye göre bu durumda çözümde sıçrayış oluşur.

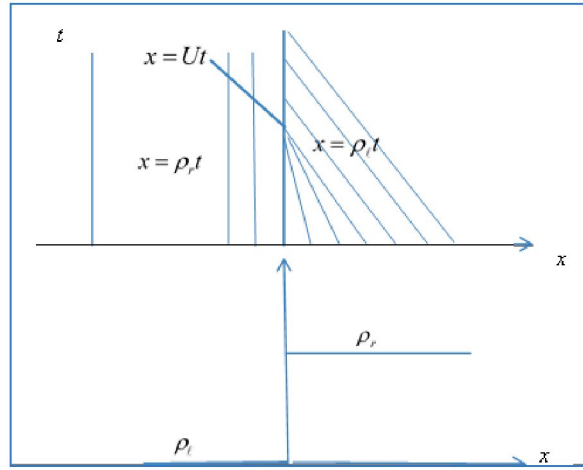
Sıçrayışın yerini $u_- = u_+$ denkleminde

$$\frac{x}{t} = v_{\max} - \frac{v_{\max}}{\rho_{\max}} (\rho_{\ell} + \rho_r) \equiv U \quad (18)$$

olarak buluruz. (18) ifadesini dikkate alarak (5) , (6) probleminin çözümünü



Şekil 5



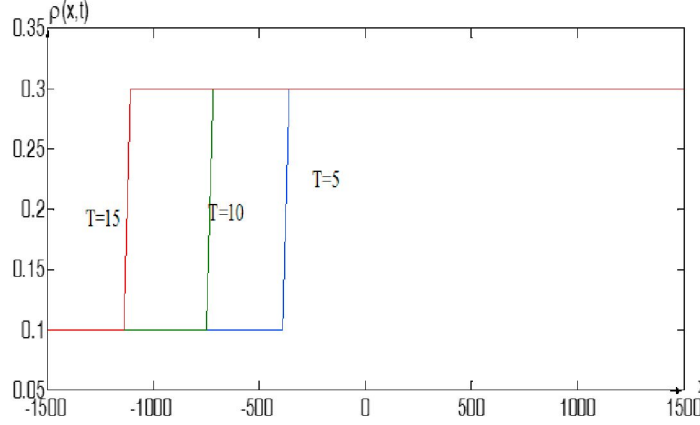
Şekil 6

$$\rho(x,t) = \begin{cases} \rho_l, & \frac{x}{t} < U \\ \rho_r, & \frac{x}{t} > U \end{cases} \quad (19)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu duruma karşılık gelen çözümün grafikleri Şekil 7 de gösterilmiştir.

Bu sonuçlar çerçevesinde trafik ışıklarını düzenlemek mümkün olur. Bunun için (x,t) düzleminde karakteristikler ailesinin grafiklerini kurmak

yeterlidir. Bunlar sabit yoğunluklu doğrulardır öyle ki, onların $c(\rho)$ eğimi $\rho(x,t)$ nun bu doğrular üzerinde aldığı sabit değerlerini belirlemektedir.



Şekil 7

Yukarıdaki teoriyi trafikteki yeşil ışık problemine uygulayalım. Varsayalım ki, $\rho_\ell = \rho_{max}$ ve $\rho_r = 0$ olsun. Bu durum fiziksel olarak $x = 0$ noktasında kırmızı ışık yandıktan sonra trafiğin durmasını ifade etmektedir. Görüldüğü gibi, araba yoğunluğu $x = 0$ noktasında sıçrayışa sahip olur. Söz konusu arabaların dağılım durumu (başlangıç durumu) Şekil 4 de gösterilmiştir.

Trafik ışığı kırmızıdan yeşile değiştiğinde arabaların dağılım dinamiğinin bulunması talep edilmektedir. Genel teoriye göre $\frac{dx}{dt} = c(\rho) = Q'(\rho) = v_{max} \left(1 - \frac{2}{\rho_{max}} \rho\right)$ ve karakteristikler üzerinde sabit kaldığı görülmektedir. Görüldüğü gibi ox eksenini pozitif yöndeki herhangi bir $x = x_0 > 0$ noktasında kesen karakteristiğin eğimi

$$\frac{dx}{dt} = c(\rho) = Q'(\rho) = v_{max} \left(1 - \frac{2}{\rho_{max}} \rho(x, 0)\right) = v_{max}$$

olur. Bu tür karakteristikler ailesinin denklemleri $x = v_{max}t + x_0$ olur. Diğer yandan ox eksenini negatif yönündeki noktalarla kesişen karakteristiklerin eğimi ise

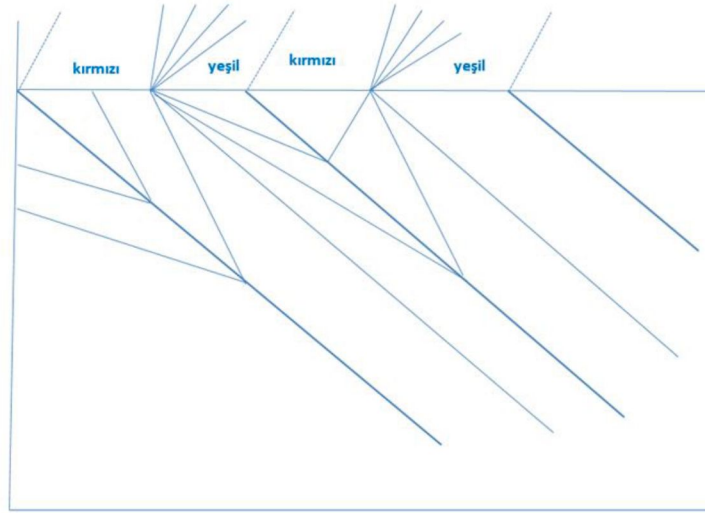
$$\frac{dx}{dt} = c(\rho) = Q'(\rho) = v_{max} \left(1 - \frac{2}{\rho_{max}} \rho(x, 0)\right) = -v_{max}$$

olmaktadır. Açıkça ki, bu tür karakteristikler ailesinin denklemi $x = -v_{max}t + x_0$ gibi yazılır.

$-v_{max}t < x < v_{max}t$ bölgesinde yerleşen karakteristiklerin hepsinin bir ortak noktası olmaktadır, yani $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t}$ olur. Bu durumda karakteristikler ailesinin denklemi Şekil 5 de gösterildiği gibi olur.

Bu sonuçlar çerçevesinde trafik ışıklarını düzenlemek mümkün olur. Bunun için (x, t) düzleminde karakteristikler ailesinin grafiklerini kurmak yeterlidir. Bunlar sabit yoğunluğu olan doğrulardır öyle ki, $c(\rho)$ eğimi $\rho(x, t)$ nin bu doğrular üzerinde aldığı sabit değerlerini belirlemektedir.

Trafik ışıkları önünde ağır hareket eden trafik akış dinamiği Şekil 9 dan kolayca anlaşılabilir.



Şekil 8

4. SONUÇ

Önerilen modelin avantajları aşağıda listelenmiştir:

- Otobanın herhangi bir noktasındaki araba yoğunluklarının belirlenmesi,
- Otobanda maksimum araba akışını tahmin etmek için ortalama araba hızının tespiti,
- Olası trafik tıkanmalarının karşısını almak amacıyla trafik ışıklarının idare edilmesi.

KAYNAKLAR

- [1] Herty, M., Pareschi, L., Seaid, M., Discrete-Velocity Models and Relaxation Schemes for Traffic Flows, SIAM J. Sci. Comp., Vol. 28, No 4, pp. 1582-1596, 2006.
- [2] Lighthill, M.J., Whitham, G.B., On Kinematic Waves, I. Flood Movement in Long Rivers; II. Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads, Proc. Royal Soc. London Ser. A(229), pp. 281-345,1955.
- [3] Rasulov, M., Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Korunum Kuralları, Seçkin Yayınevi, İstanbul 2011.
- [4] Rasulov, M., Sinsoysal, B., Hayta, S., Numerical Simulation of Initial and Initial-Boundary Value Problems for Traffic Flow in a Class of Discontinuous Functions, WSEAS Transactions on Mathematics, Vol. 5, No.12, pp. 1339-1342, 2006
- [5] Richards, P.I., Shock Waves on the Highway, Operations Research, 4, pp.42-51, 1956.
- [6] Siebel, F., Mauser, W., On the Fundamental Diagram of Traffic Flow, SIAM J. Appl. Math., Vol. 66, No 4, pp. 1150-1162, 2006.
- [7] Whitham, G.B., Linear and Nonlinear Waves, Wiley Int., New York, 1974.

