TJAA Vol. 6, *Special Issue* 3, *p.*5–8 (2025). DOI: 10.55064/tjaa.1590962 *Research Article*

Eğri Toplanma Disklerinin Kararlılığı

Anahita Yavari[1] ⋆, Suzan Doğan[1]
[1] *Department of Astronomy and Space Sciences, Faculty of Science, Ege University, 35100 İzmir, Turkey*

Accepted: February 12, 2025. Revised: February 12, 2025. Received: November 25, 2024.

Özet
Toplanma diskleri, merkezi bir gök cismi etrafında sarmal yörüngelerde dolanan gazın oluşturduğu astrofiziksel yapılardır. Diskler, gezegen ve yıldız oluşumunda, beyaz cüce, nötron yıldızı ya da kara delik gibi sıkışık cisimler içeren çift sistemlerin evrim ve dinamiğinde, merkezlerinde dev kütleli kara delikler barındıran etkin gökada özeklerinde kritik rol oynarlar. Çoğu durumda, toplanma diskleri eğri bir yapıya sahiptir. Çalışmanın amacı, eğri disklerin kararlılığını viskoz tork bileşenleri ile birlikte ele alarak irdelemek ve disklerin hangi koşullarda kararsız hale geldiğini anlamamıza yardımcı olmaktır. Bu çalışmada öncelikle, eğri disklerin evrimini betimleyen eşitliklere kararsızlık analizi uygulanarak gerekli cebirsel işlemlerle dağılma bağıntıları elde edildi. Ardından, farklı parametrelere sahip eğri disklerin kararsızlık davranışlarını incelemek için bu bağıntıların nümerik çözümleri yapıldı. Yüksek çözünürlüklü nümerik çözümler kullanılarak (disk viskozitesi, disk eğriliği) parametre uzayında kararsızlığın büyüme oranları hesaplandı. Bu hesaplamaların sonucunda, kararsızlığın büyüme oranlarının disk viskozitesi ve eğriliğine bağlı olarak nasıl değiştiğini gösteren üç boyutlu grafikler oluşturuldu. Kararsızlığın büyüme oranları ile viskoz torkların ilişkisi irdelendi. Kararsızlığa ait en yüksek büyüme oranları, dikine viskoz torkların azimutal viskoz torka baskın olduğu ve eğrilikle keskin bir değişim gösterdiği bölgelerde gözlenmektedir. Düşük viskoziteli disklerde, akışkanın eğriliğe gösterdiği dirence ilişkin zaman ölçeği ile içe doğru taşınımına ilişkin zaman ölçeği arasında önemli bir farklılık oluşur ve disk akışkanının radyal doğrultudaki iletişimi kısıtlanır. Bu diskler, kritik eğriliğe sahip olduklarında çok kısa zaman ölçeklerinde parçalanma eğilimindedir. Parçalanma süreci, hem açısal momentumun doğrudan yitimine neden olması hem de halkalı yapılar sergileyen güncel disk gözlemleriyle ilişkilendirilmesi bakımından önem taşımaktadır.

Abstract
Accretion discs are astrophysical structures made of spiralling gas around a central gravitating body. Discs have an important role in Astronomy as they are the essential component for a wide range of phenomena, such as planet and star formation, dynamics of binary systems and the physical processes in Active Galactic Nuclei (AGN). Many accretion discs exhibit warped geometries. The aim of this study is to investigate the stability of warped discs in the presence of viscous torques and to understand the conditions under which these discs become unstable. In this study, instability analysis was applied to equations that describe the evolution of warped discs, with dispersion relations obtained through algebraic methods. These relations were then solved numerically to investigate how instability behaves in discs with different parameters. Using high-resolution numerical solutions, we calculated the instability growth rates in the parameter space defined by (disc viscosity, disc warp). The results were visualized with 3D graphs showing how these growth rates vary depending on disc viscosity and warp. The relationship between instability growth rates and viscous torques was also explored. The highest instability growth rates occurred in regions where vertical viscous torques dominate over azimuthal torques and show sharp changes with warp. In low-viscosity discs, there occurs a significant difference between the timescale related to the fluid's resistance to warping and the timescale associated with its inward transport. This disparity restricts the radial communication of the disc fluid. When these discs reach a critical warp, they are likely to break on very short timescales. This breaking process is crucial as it can directly cause angular momentum loss and is connected to recent observations of discs with ring-like structures.

Anahtar Kelimeler: Accretion, accretion discs – instabilities – black hole physics.

1 Giriş

Toplanma diskleri, evrende yaygın olarak bulunan ve çeşitli ölçeklerde ortaya çıkan önemli astrofiziksel yapılardır. En küçük ölçekte, gezegenöncülü diskler, gezegen ve yıldız oluşumu süreçlerinde kilit rol oynar. Daha büyük ölçekte, çift sistemlerde (örneğin, kataklismik değişenler ve X-ışın çiftlerinde) yoldaş bileşenden madde transferi sonucu oluşan diskler, çiftin evrimi ve dinamiği bağlamında önem kazanır. En büyük ölçekte ise, galaksiler ve özellikle aktif galaktik çekirdeklerde (Active Galactic Nuclei) süper kütleli kara delikleri saran diskler, evrendeki en büyük enerji kaynakları olarak bilinir (Balbus & Hawley 1998; Frank ve diğ. 2002). Toplanma diskleri genellikle düzlemsel olmayan bir yapıdadır. Bazen oluşumları sırasında (Bate ve diğ. 2003), bazen de evrimlerinin sonraki aşamalarında dış torklar nedeniyle, örneğin ışınım torkları (Pringle 1996) veya çift sistemdeki ikinci bileşenin ürettiği torklar (Papaloizou & Terquem 1995; Doğan ve diğ. 2015), diskte eğrilmeye neden olabilir. Ayrıca, çok büyük kütleli sıkışık cisimler, relativistik etkiler nedeniyle kütle çekim etkileşimleri yoluyla toplanma disklerinde eğrilmeye yol açabilir (Lense & Thirring 1918; Bardeen & Petterson 1975). Diski oluşturan gaz halkaları,

⋆ anahita.yavari.72@gmail.com

düz disklerde tek bir düzlemde yer alırken, eğri disklerde halkaların yönelimi radyal ve/veya azimutal doğrultuda değişir. Bu çalışmada, eğri disklerin kararsızlık özellikleri incelenmiştir.

2 Kararsızlık Analizi

Bu çalışmada, eğri disklerin evrimini betimleyen süreklilik eşitliği ve açısal momentumun korunumu eşitliğinden yola çıkılarak kararsızlık analizi uygulanmıştır (Ogilvie 1999; Ogilvie 2000; Ogilvie & Latter 2013):

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t}=\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R v_r \Sigma)=0 \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\Sigma r^2 l \Omega)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(v_r \Sigma r^3 \Omega) &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\mathcal{Q}_1 \Sigma {c_s}^2 r^2 l)\\ &+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\mathcal{Q}_2 \Sigma {c_s}^2 r^3 \frac{\partial l}{\partial r})\\ &+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\mathcal{Q}_3 \Sigma {c_s}^2 r^3 l \times \frac{\partial l}{\partial r})\end{aligned} \tag{2}$$

Burada eğrilik genliği $|\psi|=r\frac{\partial l}{\partial r}$ ile tanımlanır ve eğri disklerde eğrilik genliği asla sıfır değildir ($|\psi| \neq 0$) (Ogilvie 2000). Ayrıca, 1 ve 2 eşitliklerinde, Σ yüzey yoğunluğunu ifade eder, v_r dikine ortalama hız ve Ω ortalama açısal hızdır (Ogilvie 1999). $\mathcal{Q}_1$ azimutal doğrultudaki viskoz tork katsayısını, $\mathcal{Q}_2$ ise dikey doğrultudaki viskoz tork katsayısını temsil eder. $\mathcal{Q}_3$ eğik halkaların presesyonundan kaynaklanan tork katsayısıdır ve diğerlerinin yanında ihmal edilebilecek düzeyde küçüktür. Eğri disk eşitliklerinin tedirgin edilmesi ve gerekli cebirsel işlemler sonucunda dağılma bağıntısı aşağıdaki gibi elde edilmiştir (Doğan ve diğ. 2018):

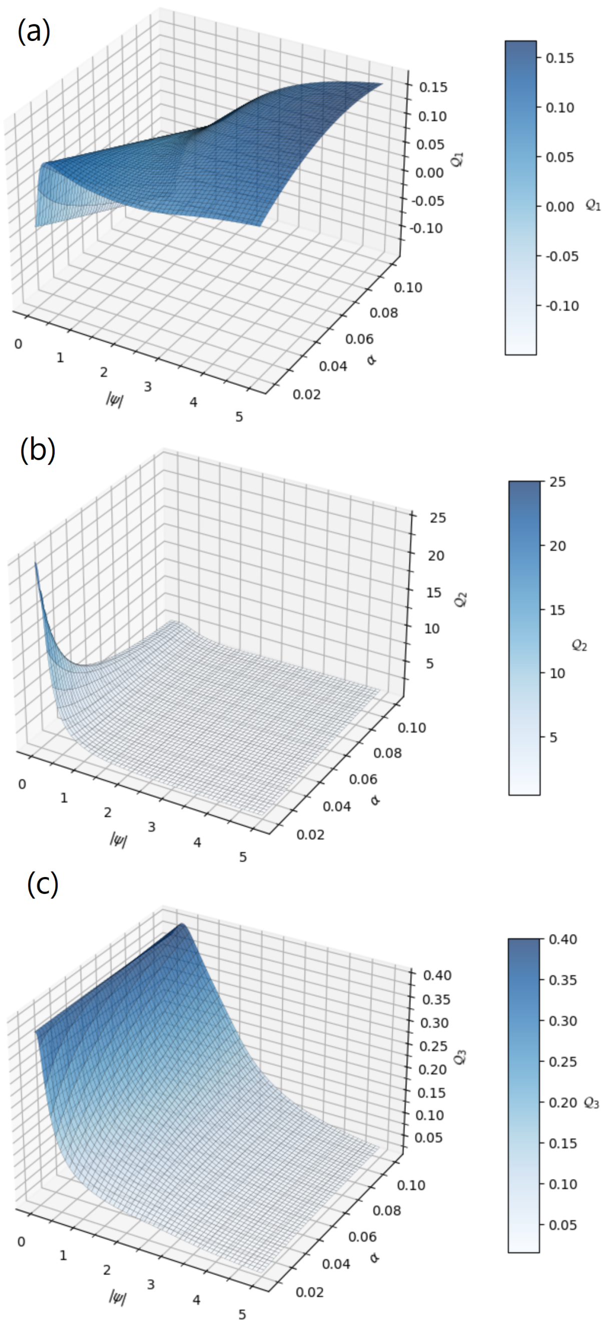
$$\begin{aligned}&s^3-s^2\left[a\mathcal{Q}_1-2\mathcal{Q}_2+|\psi|(a\mathcal{Q}_1'-\mathcal{Q}_2')\right]\\ &\quad -s\left[2a\mathcal{Q}_1\mathcal{Q}_2-\mathcal{Q}_2^2-\mathcal{Q}_3^2\right.\\ &\qquad \left.+|\psi|(a\mathcal{Q}_1\mathcal{Q}_2'-\mathcal{Q}_2\mathcal{Q}_2'-\mathcal{Q}_3\mathcal{Q}_3')\right]\\ &\quad -a\left[\mathcal{Q}_1(\mathcal{Q}_2^2+\mathcal{Q}_3^2)\right.\\ &\qquad \left.+|\psi|\left(\mathcal{Q}_1\mathcal{Q}_2\mathcal{Q}_2'-\mathcal{Q}_1'\mathcal{Q}_2^2+\mathcal{Q}_1'\mathcal{Q}_3^2+\mathcal{Q}_1\mathcal{Q}_3\mathcal{Q}_3'\right)\right]\\ &\quad =0\end{aligned} \tag{3}$$

Burada kararsızlığın büyüme oranları ($s=-(\frac{\Omega}{c_s k})^2\frac{i\omega}{\Omega}$) ile ifade edilmiştir.

2.1 Viskoz Tork Katsayılarının Hesabı

Dağılma bağıntısının sayısal çözümlerinin yapılabilmesi için öncelikle, üç viskoz tork katsayısının ($\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$, $\mathcal{Q}_3$) eğrilik ve viskozite ile olan değişimi hesaplanmıştır (Ogilvie 1999; Ogilvie 2000). Eğri disk akışkanının dinamiğine ilişkin doğrusal olmayan teoride, öncelikle akışkanın eğrilen geometrisini izleyen bir koordinat sistemi tanımlanır. Ardından, akışkan dinamiği eşitlikleri bu koordinatlarda yazılır. Cebirsel işlemler sonucunda elde edilen adi diferansiyel denklem sisteminin çözümleri ile viskoz tork katsayılarının hesabı yapılır (Ogilvie 1999; Ogilvie 2000; Ogilvie & Latter 2013).

Bu bölümde, her tork katsayısı, eğrilik genliği ($|\psi|$) ve viskozite (α) cinsinden hesaplanmıştır. Hesaplamalar, disk viskozitesi (α) 0.01'den başlayarak 0.002 adımlarla 0.1'e kadar ve disk eğriliği ($|\psi|$) 0'dan başlayarak 0.001 adımlarla 5'e kadar yapılmış ve her bir tork için 3 boyutlu grafik oluşturulmuştur (bkz. Şekil 1). Her bir tork katsayısı için yaptığımız üç boyutlu grafiklerden iki temel sonuca varılmıştır:

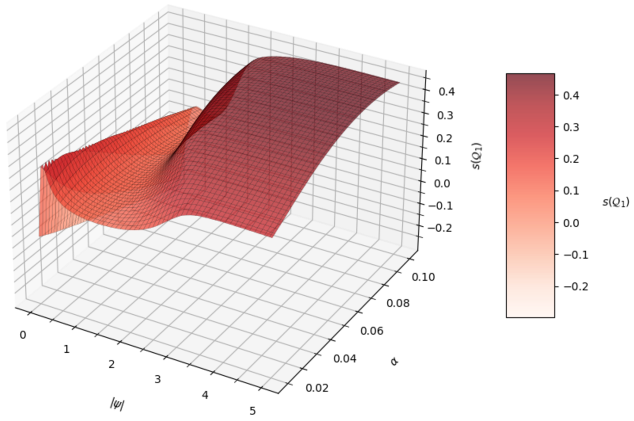


Şekil 1. Viskoz tork katsayıları $\mathcal{Q}_i$, farklı eğrilik genlikleri ($|\psi|$) ve viskozite parametresine (α) bağlı olarak üç boyutlu grafiklerde gösterilmektedir: (a) $\mathcal{Q}_1$, (b) $\mathcal{Q}_2$ ve (c) $\mathcal{Q}_3$. $\mathcal{Q}_i$ değerleri, Ogilvie & Latter (2013) tarafından önerilen yöntemler takip edilerek hesaplanmıştır.

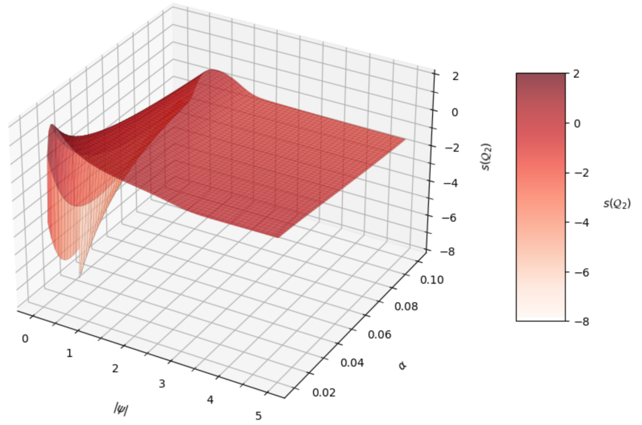
a. Küçük eğrilikler için yani $|\psi|\lesssim 2.5$, dikine tork katsayısı ($\mathcal{Q}_2$) baskın tork katsayısıdır. Bu tork katsayısı, $|\psi|$ ile keskin bir azalma gösterir.
b. Azimutal viskoz tork katsayısı ($\mathcal{Q}_1$) katsayısı, daha büyük eğrilikler için ($|\psi|\gtrsim 2.5$) baskın hale gelir.

2.2 Kararsızlığın Büyüme Oranları

Dağılma bağıntısının yüksek çözünürlüklü nümerik çözümleri gerçekleştirilmiştir. Dağılma bağıntısının kökleri $s(\mathcal{Q}_i)$ olarak



Şekil 2. Üç boyutlu renk haritası, ilk basitleştirilmiş çözüm olarak $s(\mathcal{Q}_1)$'in $|\psi|$ ve α'ya bağlı olarak değişimini göstermektedir. Varsayımımız $\mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q}_3 = 0$'dır.



Şekil 3. Üç boyutlu renk haritası, ikinci basitleştirilmiş çözüm olarak $s(\mathcal{Q}_2)$'in $|\psi|$ ve α'ya bağlı olarak değişimini göstermektedir. Varsayımımız $\mathcal{Q}_1{=}\mathcal{Q}_3{=}0$'dır.

ifade edilecektir; burada i, hesaplamaya dahil edilen tork katsayılarının sayısını temsil etmektedir. $s(\mathcal{Q}_1)$, yalnızca azimutal viskoz tork $\mathcal{Q}_1$ etkilerini dikkate alarak elde edilen dağılma bağıntısının çözümüdür. Diğer tork bileşenlerini $\mathcal{Q}_2$ ve $\mathcal{Q}_3$ sıfıra eşitleyerek, böylece, $\mathcal{Q}_1$ tork katsayısının diskin kararlılığını tek başına nasıl etkilediğine dair bilgi sahibi oluruz (Doğan ve diğ. 2018).

$$s(\mathcal{Q}_1) = a(\mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_1'|\psi|) = -a\frac{\partial}{\partial|\psi|}(-\mathcal{Q}_1|\psi|) \tag{4}$$

Eğer büyüme oranı pozitifse ($R[s(\mathcal{Q}_1)]{>}0$), bu kararsızlığa yol açar. Bu kararsızlık meydana geldiğinde, madde çevresine göre yerel olarak aşırı yoğun olan disk bölgelerine doğru hareket eder. Diskin düşük yoğunluğa sahip bölgesi daha az yoğun hale gelirken, yüksek yoğunluğa sahip bölge daha yoğun hale gelir. Eşitlik 4'de eğrilik genliği $|\psi|$ sıfır olduğunda, yani düz bir disk durumunu gösterdiğinde, kararsızlık kriteri Lightman ve Eardley (1974) tarafından düz diskler için önerilen kararsızlık kriterine indirgenir ($\frac{\partial(\nu\Sigma)}{\partial\Sigma}{<}0$) (Lightman & Eardley 1974; Pringle 1981).

$s(\mathcal{Q}_1)$ değerini Şekil 2'de üç boyutlu renkli harita olarak çiziyoruz. Bu çözümler kapsamında, disk viskozitesi $(0.01{<}\alpha{<}0.1)$ ve disk eğriliği $(0{<}|\psi|{<}5)$ aralığında kararsızlığın büyüme oranları hesaplanmış ve üç boyutlu grafikler oluşturulmuştur. Bu çözümde büyük eğrilikler (yani, $\psi{\geq}2.5$) için kararsızlığın büyüme oranları daha yüksektir.

Benzer şekilde, $s(\mathcal{Q}_2)$ yalnızca dikey viskoz tork $\mathcal{Q}_2$ etkilerini dikkate alarak dağılma bağıntısının çözümünü temsil eder $(\mathcal{Q}_1{=}\mathcal{Q}_3{=}0)$ ve şu şekilde ifade edilir (Doğan ve diğ. 2018).

$$s(\mathcal{Q}_2) = (-\mathcal{Q}_2 + \mathcal{Q}_2'|\psi|) = \frac{\partial}{\partial|\psi|}(\mathcal{Q}_2|\psi|) \tag{5}$$

Eğer büyüme oranı pozitifse ($R[s(\mathcal{Q}_2)]{>}0$), bu kararsızlığa yol açar. Bu durumda, yüksek eğriliğe sahip bölgeler daha da eğrilir ve diskin kırılmasına yol açabilir. Dikine viskoz tork bileşeni kararsızlığın büyüme oranları üzerindeki etkisi irdelenmiştir ve bu ilişkiler Şekil 3'de gösterilmiştir. Bu çözümde, küçük eğrilikler (yani, $\psi{\leq}2.5$) için kararsızlığın büyüme oranları daha yüksek bulunmaktadır.

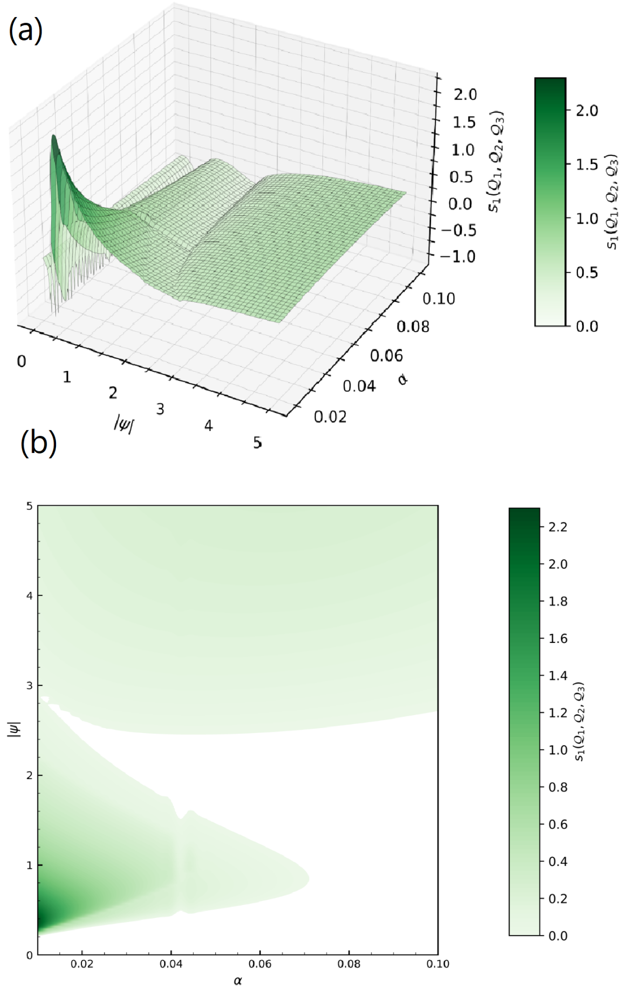
Tüm torklar dağılma bağıntısına dahil edildiğinde, $s(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_3)$ çözümü elde edilir. Şekil 4'te, elde ettiğimiz çözümleri eğrilik genliği $(0{<}|\psi|{<}5)$ ve disk viskozitesi $(0.01{<}\alpha{<}0.1)$ aralığında sunmaktayız. Düşük viskoziteli diskler, çok küçük eğriliklerde bile kararsız davranış sergilemektedir. Şekil 4'te panel (a), üç boyutlu renk haritasında kararsızlığın büyüme oranının disk viskozitesi (α) ve eğrilik genliği $(|\psi|)$ ile nasıl değiştiğini göstermektedir. Şekil 4(a)'da görüldüğü gibi, düşük viskoziteli diskler daha yüksek büyüme oranlarına sahip olmaktadır. Bu disklerde kararsızlık daha güçlüdür ve kritik eğriliğe sahip olduklarında çok kısa zaman ölçeklerinde parçalanmaları beklenmektedir.

Şekil 4 panel (b) ise üç boyutlu renk haritasının $(\alpha,\ |\psi|)$ parametre uzayındaki izdüşümünü temsil etmektedir. Şekilden anlaşılacağı üzere, beyaz alanlar ise kararlı bölgelere karşılık gelir. Herhangi bir viskozite değeri için her zaman diskin kararsız kaldığı bir eğrilik değeri vardır. Küçük eğriliklerde $(\psi{\leq}2.5)$ oluşan koyu renkli kararsız bölgeler, dikine viskoz torklardan kaynaklanırken, büyük eğriliklerde $(\psi{\geq}2.5)$ görülen kararsız bölgeler azimutal viskoz torklardan kaynaklanmaktadır.

3 Sonuçlar

Bu çalışmada, eğri disk kararsızlığının farklı viskoz tork bileşenlerine olan bağlılığı incelenmiştir. Bu analiz, kararsızlığın arkasındaki fiziği daha iyi anlamamıza olanak sağlamaktadır. Kararsızlığa ait en yüksek büyüme oranları, dikine viskoz torkların azimutal viskoz torklara baskın olduğu ve eğrilik ile keskin bir değişim gösterdiği bölgelerde gözlenmektedir. Bunun iki temel sebebi bulunmaktadır:

a. Viskoz zaman ölçekleri: α ve eğriliğin küçük olduğu durumda Papaloizou & Pringle (1983), azimutal viskozitenin (ν_1) α ile, dikine viskozitenin (ν_2) ise $1/\alpha$ ile orantılı olduğunu göstermişlerdir. Bu nedenle, α'nın küçük olduğu disklerde dikine viskoz tork katsayısı $(\mathcal{Q}_2)$, azimutal viskoz tork katsayısından $(\mathcal{Q}_1)$ çok daha büyüktür. Dolayısıyla, diski düz tutmaya çalışan (disk halkalarını aynı hizaya getirmeye çalışan) tork bileşeni $(\mathcal{Q}_2)$, açısal momentumun radyal doğrultuda taşınımından ve maddenin radyal olarak içeriye düşmesini sağlayan tork bileşeninden $(\mathcal{Q}_1)$ çok daha güçlüdür. Bu durum, iki farklı viskoz tork bileşenine ilişkin zaman ölçekleri arasında bir uçurum yaratır. $\mathcal{Q}_2$ hızlı bir şekilde diski



Şekil 4. Panel (a), üç boyutlu renk haritasında x ekseni eğrilik genliği $|\psi|$, y ekseni viskozite α, z ekseni ise elde edilen tüm nümerik çözümleri $s(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_3)$ göstermektedir. Düşük viskoziteli diskler, çok küçük eğrilik değerlerinde bile kararsızlık göstermektedir. Panel (b) ise iki boyutlu renk haritasında x ekseni viskozite (α), y ekseni eğrilik genliği ($|\psi|$) ve renk ölçeği kararsızlığın büyüme oranlarını $s(Q_1, Q_2, Q_3)$ göstermektedir. Küçük eğriliklerde ($\psi \leq 2.5$) oluşan koyu renkli kararsız bölgeler dikine viskoz tork bileşeni, büyük eğriliklerde ($\psi \geq 2.5$) oluşan kararsız bölgeler ise azimutal viskoz tork bileşeni tarafından yönetilmektedir.

düzleştirmeye çalışırken, $\mathcal{Q}_1$'in maddeyi içeriye taşıması çok daha uzun zaman alır. İki torkun büyüklüğü arasındaki fark açıldıkça diskin radyal olarak bütünlüğünü koruması zorlaşır. Diskin bir bütün halinde kalabilmesi için, her iki tork bileşeninin benzer zaman ölçeklerinde çalışıyor olması gereklidir. Bu olmadığında disk halkalara ayrılır. α'nın büyük olduğu durumda ise, (yani 1'e yaklaştıkça) diskin kendisini düzleştirmesi için gerekli zaman ölçeği, maddenin diskin bir bölgesinden diğerine hareket edebilmesi için gerekli zaman ölçeğine yakınlaşır. Zaman ölçeklerindeki bu benzerlik, diskin kendini bir bütün olarak korumasına yardım eder ve böylece disk kararlı kalır.

b. Viskoz tork katsayılarının eğrilikle değişimi: Kararsızlığın en güçlü olduğu bölgenin α ve $|\psi|$ değerlerinin küçük ve dolayısıyla $\mathcal{Q}_2$ torkunun en keskin biçimde değiştiği bölgeye karşılık geldiğini görüyoruz. Eğriliğin artmasıyla $\mathcal{Q}_2$ difüzyon katsayısının keskin bir şekilde düşmesi kararsızlığa neden olmaktadır. Çünkü, eğrilik artıyor olsa da difüzyon katsayısı düşmektedir ve eğrilik yeterince difüzyona uğrayamamaktadır. Bu da eğriliğin giderek daha da keskinleşmesine ve diskin parçalanmasına sebep olmaktadır.

Sonuç olarak, toplanma diskleri kritik eğriliğe sahip olduklarında çok kısa zaman ölçeklerinde parçalanma eğilimindedir. Parçalanma süreci, hem açısal momentumun doğrudan yitimine neden olması hem de halkalı yapılar sergileyen güncel disk gözlemleriyle ilişkilendirilmesi bakımından önem taşımaktadır.

Teşekkür

Bu çalışma, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK - Proje no: 123F017) tarafından desteklenmiştir.

Kaynaklar

Balbus S. A., Hawley J. F., 1998, Reviews of Modern Physics, 70, 1
Bardeen J. M., Petterson J. A., 1975, ApJ, 195, L65
Bate M. R., Bonnell I. A., Bromm V., 2003, MNRAS, 339, 577
Doğan S., Nixon C. J., King A. R., Pringle J. E., 2018, MNRAS, 476, 1519
Doğan S., Nixon C., King A., Price D. J., 2015, MNRAS, 449, 1251
Frank J., King A., Raine D. J., 2002, Accretion Power in Astrophysics: Third Edition. Cambridge University Press
Lense J., Thirring H., 1918, Physikalische Zeitschrift, 19, 156
Lightman A. P., Eardley D. M., 1974, ApJ, 187, L1
Ogilvie G. I., 1999, MNRAS, 304, 557
Ogilvie G. I., 2000, MNRAS, 317, 607
Ogilvie G. I., Latter H. N., 2013, MNRAS, 433, 2403
Papaloizou J. C. B., Pringle J. E., 1983, MNRAS, 202, 1181
Papaloizou J. C. B., Terquem C., 1995, MNRAS, 274, 987
Pringle J. E., 1981, ARA&A, 19, 137
Pringle J. E., 1996, MNRAS, 281, 357

Access:
M25-0303: Turkish J.A&A — Vol.6, Issue 3.