Dumlupınar Üniversitesi **Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi**

Sayı 31, Ağustos 2013 **ISSN – 1302 – 3055**

Lie Cebirleri İçin (Ön)Çaprazlanmış Modüller Üzerine

Ahmet Faruk ASLAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik-Bilgisayar Bölümü, Eskişehir,
afaslan@ogu.edu.tr

ÖZET

Liecebirleri üzerinde önçaprazlanmış modüller kategorisinde eşçarpımların inşaası ve epimorfizmalar ve örten fonksiyonlar arasındaki ilişki verilmiştir.

On (Pre)crossed Modules Over Lie Algebras

ABSTRACT

The construction of the coproduct of precrossed modules over Lie Algebras and the relation between epimorphisms and surjections are given.

1.GİRİŞ

Homotopi tipleri ve geometrinin en temel kısımlarından biridir. Cebirsel modeler de konu içinde önemli bir yer teşkiletmektedir. Top; topolojik uzaylar kategorisini ele alalım. *X* ve *Y* iki topolojik uzay, *f:X→Y* ve *g: Y→X* sürekli dönüşümler olmak üzere $H: fog \simeq 1_Y$ve$K: gof \simeq 1_X$ ise *X* ve *Y* uzayları *aynı homotopi tipindedir*. (veya *X* ve *Y* uzaylarına homotopi denir) denir. Bu durumda Top/$\simeq$ homotopi kategorisi (yani Topdan elde edilen bölüm kategorisi) tanımlanabilir. Bu kategorinin objeleri Top kategorisinin objeleriyle aynı, morfizmler kümesi, homotopi sınıflarının kümesi yani

$$[X,Y] = Mor_{Top/\simeq}(X,Y) = \{[f]_{\simeq}: f \in Mor_{Top}(X,Y)\}$$

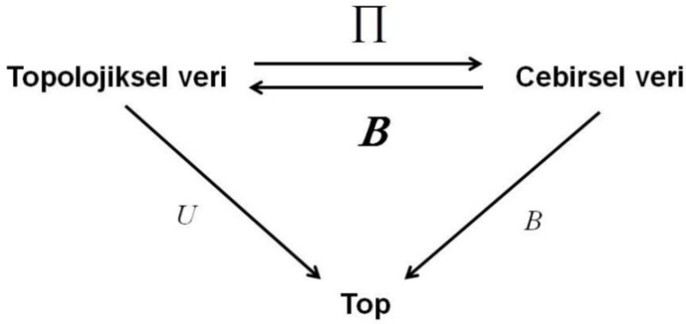
dir. Homotopi denk uzayların oluşturduğu bir sınıfa bir *homotopi tipi* denir. *X* bir topolojik uzay, $x_0 \in X$ ve (X, x_0) bir noktalanmış topolojik uzay olsun.

$$(X, x_0) = [(S^n, 1), (X, x_0)]$$

Homotopi grubu, $(S^n, 1)$den (X, x_0)a giden noktalanmış dönüşümlerin homotopi sınıfların kümesi olarak tanımlanır ve $n \geq 1$için $\pi_n(X, x_0)$ grup yapısına sahiptir ve $n \geq 2$ için bu yapı Abelyendir.

20 inci yüzyılın başlarında, Abelyen olmayan bir boyutlu $\pi_1(X, x_0)$ temel grubunun; geometri, topoloji ve analizdeki uygulamaları, $n \geq 0$ için Abelyen *n*-boyutlu $H_n(X)$ homoloji grubu ve baplantılı bir *X* uzayı için $H_1(X) = \pi_1(X, x_0)^{Ab}$ olduğu biliniyordu. Son eşitlikten de görülebileceği üzere Abelyen olmayan $\pi_1(X, x_0)$ temel grubu, incelenen *X* uzayı hakkında birinci homoloji grubundan daha fazla bilgi içeriyordu ve

bu nedenle Temel grubun yüksek mertebeden değişmeli olmayan versiyonlarının tanımlanması doğrultusunda önemli bir ihtiyaç doğmuştur. Bu problem daha genel olarak Homotopi tiplerin cebirsel modellerinin tanımlanması şeklinde ele alınmıştır. Bu genel problem diyagramatik olarak şu şekilde resmedilebilir;



Bu diyagramda U, forgetful funktor olmak üzere $B = UoB$ dir. Π funktoru homotopiksel olarak tanımlanmıştır. (Π, B) adjointikilidir. Bu X Top. Data ve Acebirsel data olmak üzere $(X \to B(A)) \leftrightarrow (\Pi(X) \to A)$ olduğu anlamına gelir. Yine $\Pi oB \cong 1_{Ceb.Dat}$ olup bu, Cebirsel datanın geometriyi modellediği ve $Bo\Pi \cong 1_{Top.Dat}$ olduğundan homotopiksel bilgi içerdiği anlamına gelir.

Örnek olarak, taban noktalı uzaylar ve tabann oktalarından oluşan kümeli uzaylar gibi topolojik datalara karşılık gelen cebirsel datalar sırasıyla gruplar ve gruboidlerdir.

Bu bağlamda Tabanlı Çiftler (Based Pairs) olarak bilinen topolojik dataya karşılık gelen cebirsel data nedir? (veya buna denk olarak *2*inci Mertebeden Abelyen olmayan temel grup nedir?) sorusu akla gelmektedir. Bu sorunun cevabı, 1939-50 de J.H. Whitehead [7] tarafından verilmiş ve *2*-tiplere karşılık Çaprazlanmış modül olarak adlandırılan cebirsel yapıyı tanımlamışlardır. Şöyleki; X bir topoljik uzay ve $A \subset X, x_0 \in A$ için I^n, n-küp olmak üzere $\pi_n(X, A, x_0) = [I^n, X]$ kümesi, (X, A) ikilisinin n inci göreceli (relative) homotopi grubu olup

$$\partial: \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_{n-1}(A, x_0)$$

Bir homomorfizmdir. $X^n, i \leq n$ için i-hücrelerin birleşimi olmak üzere $n = 2$ için J.H.Whitehead

$$\partial: \pi_2(X, X^1, x_0) \to \pi_1(X^1, x_0)$$

Dönüşümünün cebirsel yapısının, *2*-tipden X uzayını modellediğini göstermiştir ve bu yapı çaprazlanmış modül olarak adlandırılmıştır. Bu yapı tanımlandıktan sonar matematiğin ve fiziğin çeşitli alt disiplinlerinde geniş uygulama sahası bulmuştur. Özellikle çaprazlanmış modül genişlemelerinin, üçüncü kohomoloji gruplarının temsiliyle ilgisi kavranı temel cebirsel yapılardan biri haline gelmiştir. Sonraki zaman diliminde, çaprazlanmış modüller assosyatif cebirler, değişmeli cebirler ve Lie cebirleri gibi değişik cebirsel yapılar üzerinde tanımlanmıştır [1,2,4,5,6].

Bu çalışmada Lie cebirleri üzerinde (ön)çaprazlanmış modüller kategorisi tanımlanacak ve muhtelif örnekler verilecektir. Daha sonrasında, (ön)çaprazlanmış modül morfizmaları ile ilgili olarak her epimorfizmanın bir örten dönüşüm olduğu ispatlanıp çalışma, tanımlanan bu kategorin bir özel alt kategorisinde herhangi iki objenin eşçarpımı inşaası ile nihayet bulacaktır. Burada özellikle neden önçaprazlanmış modüller kategorisi üzerinde çalıştığımızı şu şekilde açıklayabiliriz; her LLie cebirine karşılık $L \to 0$ önçaprazlanmış modülü vardır. Bu bağlamda

$$\mathrm{Lie} \subseteq \mathrm{PXLie}$$

olup, önçaprazlanmış modüller kategorisi olan PXLie kategorisi, Lie Lie cebirleri kategorisinin genellemesidir. Böylelikle daha genel bir kategoride elde edeceğimiz sonuçlar, özel olarak Lie cebirleri kategorisinde de geçerli olacaktır. Ayrıca önçaprazlanmış modüller kategorisi bir interest kategorisine izomorf olmadığından, actor obje gibi belli bazı genel tanımlar direct olarak bu kategoriye uygulanamamaktadır. Dolayısıyla gruplar kategorisi (ön)çaprazlanmış modüller kategorisinden farklılık arzetmektedir.

2. Lie Cebirleri Üzerinde Önçaprazlanmış Modüller

Tanım 1. *L_0veL_1 birer Lie cebiri olsun. L_0 ın L_1 üzerine ($l_0 \in L_0, l_1 \in L_1$ için $l_0 \cdot l_1$ şeklinde gösterilen) etkisi ile birlikte $d: L_1 \to L_0$ dönüşümü her $l_0 \in L_0, l_1 \in L_1$ için*

$$d(l_0 \cdot l_1) = [l_0, d(l_1)]$$

Şartını sağlıyorsa $L: L_1 \xrightarrow{d} L_0$ yapısına Lie cebirleri üzerinde bir önçaprazlanmış modül denir. Buna ek olarak, her $l_1, l_1{}' \in L_1$ için

$$d(l_1) \cdot l_1{}' = [l_1, l_1{}']$$

Şartını sağlıyorsa L ye bir çaprazlanmış modül denir. Bu son eşitliğe Peiffer özdeşliği denir.

Örnek 1. *L* bir Lie cebirive *N*, *L* nin bir ideali olsun. Bu durumda $N \xrightarrow{inc.} L$ bir önçaprazlanmış modüldür. Burada etki, adjoint representation ile tanımlanır. Özel olarak, $L \xrightarrow{id} L$ve$0 \xrightarrow{i} L$ yapıları da birer önçaprazlanmış modüldür.

Örnek 2. *M* bir non-abelian *L*-Lie cebiri olsun. Bu durumda $M \xrightarrow{0} L$ bir önçaprazlanmış modüldür. Özel olarak, eğer *L* bir non-abelian Lie cebiri ise, *(L,L,0)* ve *(L,0,0)* da birer önçaprazlanmış modüldür ve bu üç örnek de çaprazlanmış modül değildir.

Örnek 3. L bir Lie cebiri olsun. $\pi_1(x_1, x_2) = x_1$, $x_1, x_2 \in L$ şeklinde tanımlanan $\pi_1: L \times L \to L$ dönüşümünü ve L nin $L \times L$ üzerine $x \cdot (x_1, x_2) = ([x, x_1], 0)$, $x, x_1, x_2 \in L$ şeklinde tanımlı etkisini düşünelim. Bu durumda $L \times L \xrightarrow{\pi_1} L$ bir önçaprazlanmış modül olup çaprazlanmış modül değildir.

Örnek 4. *M* bir non-abelian Lie cebiri olsun. $M_{ab} = M/[M, M]$ olsun. M_{ab} nin *M* üzerine aşikar etkisi ile birlikte $\pi: M \to M_{ab}$ bir önçaprazlanmış modül olup çaprazlanmış modül değildir.

Örnek 5. *M* ve L birer Lie cebiri ve L nin *M* üzerine etkisi olsun. $\pi_1: L \ltimes M \to L$, $\pi_1(l, m) = l$, kanonik izdüşümünü ve L nin $L \ltimes M$ üzerine $l \cdot (l', m) = ([l, l'], l \cdot m)$ şeklinde tanımlı etkisini düşünelim. Bu durumda $L \ltimes M \xrightarrow{\pi_1} L$ bir önçaprazlanmış modül olup çaprazlanmış modül değildir.

Tanım 2. $L: L_1 \xrightarrow{d} L_0veM: M_1 \xrightarrow{d\prime} M_0$ *önçaprazlanmış modüller,* $f: L_1 \to M_1 ileg: L_0 \to M_0$ *birer Lie cebir homomorfizması olma küzere*

$$d' \cdot f = gd$$

ve her $l_0 \in L_0, l_1 \in L_1$ *için*

$$f(l_0 \cdot l_1) = g(l_0) \cdot f(l_1)$$

oluyorsa (f,g) ikilisine L ve M arasında bi rönçaprazlanmış modül morfizması denir.

Böylelikle Lie cebirleri üzerinde önçaprazlanmış modüller kategorisi tanımlanabilir. Bu kategoriyi PXLie ile göstereceğiz. Bu kategori bir semi-abelian kategoridir. Tanım için [3] numaralı makaleye bakılabilir.

Tanım 3. *Eğer* L_1', L_0' *sırasıyla* L_1 *ve* L_0 *ın alt cebirleri,* $d' = d\,\big|_{L_1}$ *ve* L_0' *ın* L_1' *üzerine etkisi* L_0 *ın* L_1 *üzerine etkisinden indirgeniyor ise* $L': L_1' \xrightarrow{d\prime} L_0'$ *önçaprazlanmış modülüne* $L: L_1 \xrightarrow{d} L_0$*ın bir önçaprazlanmış alt modülü denir.*

Tanım 4. $L': L_1' \xrightarrow{d\prime} L_0'$, $L: L_1 \xrightarrow{d} L_0$ *ın önçaprazlanmış alt modülü olsun.* L_1' *ile* L_0' *sırasıyla* L_1 *ve* L_0 *ın idealleri, her* $l_0 \in L_0, l_1' \in L_1'$ *için* $l_0 \cdot l_1' \in L_1'$ *ve her* $l_0' \in L_0', l_1 \in L_1$ *için* $l_0' \cdot l_1 \in L_0'$ *ise* L' *ne L nin bir çaprazlanmış ideali denir ve bu durum* $L' \trianglelefteq L$ *şeklinde gösterilir.*

Bunun bir sonucu olarak $L/L': L_1/L_1' \to L_0/L_0'$ bölüm önçaprazlanmış modülü elde edilir. Çaprazlanmış ideal tanımı bölüm objesindeki etkinin iyi tanımlılığını garanti eder.

$(f,g): L \to M$ bir önçaprazlanmış modül morfizması olsun. Bu durumda $(Kerf, Kerg, d\,\big|)$ ye (f,g) nin çekirdeği denir ve bu önçaprazlanmış modül *L* nin bir çaprazlanmış idealidir. Benzer şekilde $(Imf, Img, d'\,\big|)$ ye (f,g) nin görüntüsü denir ve bu önçaprazlanmış modül *M* nin bir çaprazlanmış alt modülüdür.

3.Eşçarpımlar ve Epimorfizmler

L bir sabit Lie cebiri olsun. Değer kümesi L olan tüm önçaprazlanmış modüller, PXLie nin bir dolu alt kategorisidir. Bu kategoriyi PXLie/L ile gösterelim.

Teorem 1. $PXLie/L_0$ *da eşçarpımlar mevcuttur.*

İspat $L \xrightarrow{d} L_0$ve$K \xrightarrow{d\prime} L_0$ birer önçaprazlanmış modül olsun. K nın L üzerine her $k \in K, l \in L$ için $k \cdot l = [d'(k), l]$ şeklinde tanımlanan bir etkisi mevcuttur. Bu etkiyi$*$ ile gösterelim. Buradan hareketle

$K' \ltimes L$ semi direct çarpımını tanımlayabiliriz. $\sigma: K \ltimes L \to L_0$ homomorfizmini $\sigma(k,l) = d'(k) + d(l)$ şeklinde tanımlayalım. Her $(k,l),(k',l') \in K \ltimes L$için

$$\begin{aligned} \sigma[(k,l),(k',l')] \quad &= \sigma([k,k'], k\cdot l' - k'\cdot l + [l,l']) \\ &= d'[k,k'] + d(k * l') - d(k' * l) + d[l,l'] \quad , \\ [d'k + dl, d'k' + dl'] \quad &= [d'k + dl, d'k'] + [d'k + dl, dl'] \\ &= [d'k, d'k'] + [dl, d'k'] + [d'k, dl'] + [dl, dl'] \\ &= d'[k,k'] - d(k' * l) + d(k * l') + d[l,l'] \end{aligned}$$

Olduğundan $\sigma: K \ltimes L \to L_0$ bir Lie cebir homomorfizmasıdır. L_0ın $K \ltimes L$ üzerine, her $l_0 \in L_0, l \in L, k \in K$ için $l_0 \cdot (k,l) = (l\cdot k, l_0 \cdot l)$ şeklinde tanımlanan etkisini düşünelim.

$$\begin{aligned} \sigma(l_0 \cdot (k,l)) \quad &\overset{?}{=} [l_0, \sigma(k,l)] \\ &= \sigma(l_0\cdot k, l_0 \cdot l) \\ &= d'(l_0\cdot k) + d(l_0 \cdot l \\ &= [l_0, dk] + [l_0, dl] \\ &= [l_0, dk + dl] \\ [l_0, \sigma(k,l)] \quad &= [l_0, d'k + d(l)] \end{aligned}$$

Olduğundan tanımlanan bu etki ile birlikte $\sigma: K \ltimes L \to L_0$ bir önçaprazlanmış modüldür (fakat bir çaprazlanmış modül değildir). Rutin hesaplamalar sonucunda bu yapı, verilen $L \xrightarrow{d} L_0$ ve $K \xrightarrow{d\prime} L_0$ önçaprazlanmış modüllerinin $PXLie/L_0$ de bir eşçarpımıdır.

Not 1. $C \to L_0$, $K \to L_0$, $L \to L_0$ birer önçaprazlanmış modül olsun. $(f, id): (C \to L_0) \to (K \to L_0)$ ve $(g, id): (C \to L_0) \to (L \to L_0)$ birer önçaprazlanmış modül homomorfizması olsun. Bu durumda *I*, her $x \in C$ için $(g(x), 0)(0 - f(x)) = (g(x), f(x))$ formundaki elemanlar tarafından üretilen çaprazlanmış ideal olmak üzere $\frac{K \ltimes L}{I} \to L_0$ önçaprazlanmış modülü, $(K \to L_0)$ ve $(L \to L_0)$ önçaprazlanmış modüllerinin bir ileri itmesi (push out) dir.

Teorem 2. $L: L_1 \xrightarrow{d} L_0$, $L': L_1{}' \xrightarrow{d\prime} L_0{}'$ *birer önçaprazlanmış modül olsun.* $(\alpha, \beta): L \to L'$ *bir epimorfizm ise* α*ve*β *birer örten Lie cebir homomorfizmasıdır.*

İspat $L: L_1 \xrightarrow{d} L_0$, $L': L_1{}' \xrightarrow{d\prime} L_0{}'$ birer önçaprazlanmış modül ve $(\alpha, \beta): L \to L'$ bir epimorfizm olsun. Direk hesaplama sonucu β bir epimorfizmdir ki Lie cebirleri kategorisinde her epimorfizm bir örten homomorfizm olduğundan β örtendir. $\alpha(L_1) \xrightarrow{d\prime} L_0$ bir önçaprazlanmış modüldür ve $inc.: \alpha(L_1) \to L_1{}'$ homomorfizmi vardır. *I*, $K \ltimes L$ nin $\{(a,a) \mid a \in \alpha(L_1)\}$ tarafından üretilen ideali olmak üzere, yukarıdaki notta ifade edilen ileri itmelerin inşaasında $C = \alpha(L_1)$, $L_0 = P_2$, $K = L = L_1'$, $f = g = inc.$ alırsak, $(J_1, id)o(\alpha, \beta) = (J_2, id)o(\alpha, \beta)$ bulunur ve (α, β) bir epimorfizm olduğundan $J_1 = J_2$ dir. $\alpha(L_1) \neq L_1{}'$ olduğunu Kabul edelim. Bu durumda en az bir $x \in L_1' - \alpha(L_1)$ vardır. Dolayısıyla $J_1(x) \neq J_2(x)$ bulunur ki bu bir çelişkidir. Böylece $\alpha(L_1) = L_1{}'$olup bir örten Lie homomorfizmidir.

KAYNAKLAR

[1] J.M. Casas, M. Ladra, T. Pirashvili, Crossed modules for Lie-Reinhart algebras, *Journal of Algebra*, 274, 192-201, (2004).

[2] G. J. Ellis, Homotopical aspects of Lie algebras, *J. Ausral. Math. Soc. (Series A)*, 54, 393-419, (1993).

[3] G. Janelidze, L. Márki,W. Tholen, Semi-abelian categories, *J. Pure Appl. Algebra*, 168, (2002), 367-386.

[4] C. Kassel, J.L. Loday, Extensions centralesd'algébres de Lie, *Ann. Ins. Fourier (Grenoble)*, 33, 119-142, (1982).

[5] Y. Sheng, D. Chen, Hom-Lie 2-algebras, *Journal of Algebra*, 376, 174-195, (2013).

[6] T. Porter, Homology of commutative algebras and an invariant of Simis and Vas-conceles,*Journal of Algebra*, 2, 99, (1987).

[7] J.H.C. Whitehead, Combinatorial Group Theory II, *American Math. Soc.*, (1949).