Uşak Üniversitesi Fen ve Doğa Bilimleri Dergisi
Usak University Journal of Science and Natural Sciences

http://dergipark.gov.tr/usufedbid
https://doi.org/10.47137/usufedbid.1593502

Araştırma Makalesi (Research Article)

Üç Boyutlu De Sitter Uzayında Dönel Yüzeyler

Ali İhsan YILMAZ[1*], Murat Kemal KARACAN[2],Yılmaz TUNÇER[2]

[1*]*Özel Yavuzoğlu Koleji, Afyonkarahisar, Türkiye*
[2]*Uşak Üniversitesi Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Matematik Bölümü, Uşak, Türkiye*

Geliş: 29 Kasım 2024 *Revizyon: 13 Ocak 2025* *Kabul: 13 Ocak 2025*
Received: 29 October 2024 *Revised: 13 January 2025* *Accepted: 13 January 2025*

Özet

Bu çalışmada, üç boyutlu De Sitter uzayında K −flat ve minimal dönel yüzeyleri ve yüzeyin pozisyon vektörünü kullanarak Laplace operatörünün $\Delta X = 0$, $\Delta X = \lambda X$ ve $\Delta X = AX$ eşitliğini sağlayan konformal ve non-konformal yüzeyleri araştırdık.

Anahtar Kelimeler: *De Sitter uzayı, dönel yüzeyler, konformal uzaylar.*

Surfaces of Revolution in De Sitter 3-Space

Abstract

In this study, we investigated K −flat and minimally surfaces of revolution in three-dimensional De Sitter space and also we study conformal and non-conformal surfaces that satisfy the equations of the Laplace operatör $\Delta X = 0$, $\Delta X = \lambda X$ ve $\Delta X = AX$ by using the position vector of the surface.

Keywords: *De Sitter space, surface of revolution, conformal surfaces.*

1. Giriş

Bir eğrinin bir eksen doğrusu etrafında döndürülmesi ile elde edilen dönel yüzeyler uygulama alanları bakımından zengin olan yüzeylerdir. Fizikte sanayide modellemede ve sanatta yaygın teknik uygulamalara sahiptir. Matematikte ise farklı uzay formlarında incelenmiş geniş bir literatüre sahiptir. Chen üç boyutlu Öklid uzayında sonlu tip yüzeyleri, ‘’yüzeyin koordinat fonksiyonlarının Laplacianının Eigen fonksiyonlarının sonlu toplamı olarak kendi ismi ile anılan sonlu tip yüzeyler’’ şeklinde ele almıştır. Burada sonlu tip kavramı Öklid uzayında veya Pseudo- Öklid uzayında bir yüzey üzerinde incelenmiştir. Sonlu tip alt manifoldların teorisi birçok geometrici tarafından çalışılmıştır.[1,2,3]. De Sitter uzayı sabit pozitif skaler eğriliğe(Ricci skaleri) sahip bir hiperbolik uzay formudur ve $H^3(-c^2)$ ile gösterilir. Bu uzayda $H_h = c$ sabit ortalama eğrilikli yüzeylerin geometrik özellikleri Öklid uzayındaki H_e ortalama eğriliğine sahip minimal yüzeylerin geometrisine oldukça benzerdir ve bu benzerlik bire bir benzerliktir. Bu durum sabit ortalama eğrilikli yüzeylerin karşılıklı olarak aynı Gauss-Codazzi eşitliklerini sağlamasından kaynaklanır. Bu benzerlik Lawson bağıntısı olan $H_e = \sqrt{H_h^2 - c^2}$ eşitliğinden kaynaklanır. Lee ve Zarske bu uzayda $H_h = c$ sabit ortalama eğriliğe sahip yüzeyleri ve minimal dönel yüzeyleri incelemiş ve $c \to 0$ limit halinde sabit eğrilikli yüzeyin Öklid uzayında minimal dönel yüzey olan katenoid olduğunu göstermiştir.Lee ve Martin üç boyutlu De-Sitter uzayında sabit ortalama eğrilikli spacelike ve timelike yüzeyleri

*Corresponding author: Ali İhsan YILMAZ
E-mail:aliihsan0204@gmail.com (ORCID ID:0009-0002-3503-4801)
E-mail:murat.karacan@usak.edu.tr (ORCID ID: 0000-0002-2832-9444)
E-mail:yilmaz.tuncer@usak.edu.tr (ORCID ID: 00000-0002-2398-866X)

çalışmışlardır.[4,5,6] . Kaimakamis, Papantoniou ve Peteumenos üç boyutlu anti De-Sitter uzayında Lorentz invaryant spacelike yüzeyleri çalışmıştır[7].

$X: M \to E^m$ m boyutlu Öklid uzayında bağlantılı n boyutlu monifoldunun izometrik inversiyonu olsun ve H, K ve delta sırasıyla ortalama eğrilik, Gaus eğriliği ve M nin Laplacian oparetörü olsun. Takahashi ve Garay sırasıyla $\Delta X = \lambda X$ ve $\Delta X = AX, : A \in Mat\ (m, R)$ eşitliğini sağlayan minimal yüzeyleri incelemişlerdir[8,9]. N, M yüzeyinin Gauss dönüşümü olmak üzere Dillen ve Verstraelen $\Delta N = AN, A \in Mat\ (3, R)$ [3,10].

2. Temel Bilgiler

x_0, x_1, x_2, x_3 koordinat sistemi olmak üzere R^{3+1} Minkowski uzayında metrik

$$ds^2 = -(dx_o)^2 + (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2$$

şeklinde tanımlıdır. 3 boyutlu hiperbolik uzay, sabit kesitsel eğriliği $-c^2$ olan

$$H^3(-c^2) = \left\{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in R^{3+1} : -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -\frac{1}{c^2}\right\}$$

ile tanımlı iki parçalı hiperboloidtir. Bu uzayda

$$U = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in H^3(-c^2):\ x_0 + x_1 > 0\}$$

yamasını göz önüne alalım ve

$$u = -\tfrac{1}{c^2}\log_c(x_0 + x_1),$$

$$x = \frac{x_2}{c(x_0 + x_1)}$$

$$y = \frac{x_3}{c(x_0 + x_1)}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda koordinatlar u, x, y olan IR^3 te $H^3(-c^2)$ De Sitter uzayının düzlemsel bir modelinin metriği

$$g_c = (du)^2 + e^{-2cu}\{(dx)^2 + (dy)^2\}$$

olacaktır. $c \to 0$ yaklaştıkça $H^3(-c^2)$ uzayı 3-boyutlu Öklid uzayına yaklaşır.[5]

$$ds^2 = (du)^2 + e^{-2cu}\{(dx)^2 + (dy)^2\} \tag{2.1}$$

metriği ile birleştirilmiş (R^3,g) uzayı sabit $-c^2$ eğriliğine sahiptir. Bu uzay $H^3(-c^2)$ ile gösterilir.

Diğer taraftan,

$$X: M \to H^3(-c^2)$$

parametrik bir yüzey olsun. (2.1) metriği her bir $T_p\ H^3(-c^2)$ tanjant uzayında bir iç çarpıma indirgenir. Bu iç çarpım $H^3(-c^2)$ uzayındaki konformal yüzeyler için

$$< x_u, x_v > = 0, |x_u| = |x_v| = e^{\frac{\omega}{2}}$$

şartları ile tanımlanabilir, burada u, v M de lokal koordinat sistemi ve $\omega: M \to R$ reel değerli fonksiyondur. $X(u, v)$ yüzeyinin ortalama eğriliğini hesaplayabilmek için yüzeyin normalinin $H^3(-c^2)$ uzayında değil de her bir $T_p\ H^3(-c^2)$ tanjant uzayında aşağıdaki şekilde tanımlı bir vektörel çarpımla hesaplayabiliriz

$$v = v_1\left(\frac{d}{dt}\right)_p + v_2\left(\frac{d}{dt}\right)_p + v_3\left(\frac{d}{dt}\right)_p,$$

$$w = w_1 \left(\frac{d}{dt}\right)_p + w_2 \left(\frac{d}{dt}\right)_p + w_3 \left(\frac{d}{dt}\right)_p,$$

olmak üzere

$$v \times w = (v_2 w_3 - v_3 w_2) \left(\frac{d}{dt}\right)_p + e^{2ct}(v_3 w_1 - v_1 w_3) \left(\frac{d}{dt}\right)_p + e^{2ct}(v_1 w_2 - v_2 w_1) \left(\frac{d}{dt}\right)_p.$$

$X(u,v)$ parametrik yüzeyinin birim normal vektör alanı N olsun. Her bir tanjant uzayında I. Temel formun katsayıları

$$g_{11} =< x_u, x_u >, g_{22} =< x_v, x_v >, g_{33} =< x_u, x_v > \quad (2.2)$$

ve II. Temel formun katsayıları da

$$h_{11} =< x_{uu}, N >, g_{22} =< x_{vv}, N >, g_{33} =< x_{uv}, N > \quad (2.3)$$

olmak üzere

$$\|x_u \times x_v\|^2 = e^{4ct(u,v)}(g_{11}g_{22} - g_{12}^2),$$

şeklindedir. Burada c sıfıra yaklaştıkça

$$\|x_u \times x_v\|^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$$

dır.Bu durumunda yüzeyin Gauss ve ortalama eğriliği

$$K = \widetilde{K} + \varepsilon \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \quad (2.4)$$

$$H = \frac{g_{22}h_{11} + g_{11}h_{22} - 2g_{12}h_{12}}{2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)} \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlıdır. Δ, M yüzeyinin Laplacian operatörü olmak üzere

$$\Delta X = -\frac{1}{\sqrt{|g_{11}g_{22} - g_{12}^2|}} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{g_{22}x_u - g_{12}x_v}{\sqrt{|g_{11}g_{22} - g_{12}^2|}} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{g_{12}x_u - g_{11}x_v}{\sqrt{|g_{11}g_{22} - g_{12}^2|}} \right) \right] \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanır [3,7,11,12].

3. Bulgular

$$\alpha(u) = (u, h(u), 0)$$

ux-düzleminde profil eğrisi olmak üzere, bu eğrinin u-ekseni etrafında v açısı ile döndürülmesi ile elde edilen dönel yüzey

$$X(u,v) = (u, h(u)\cos v, h(u) sinv) \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır [5]. (3.1) eşitliğinde yüzeye ait I. ve II. Temel formun katsayıları (2.2) ve (2.3) eşitliklerinden

$$g_{11} = e^{2cu}(h'(u)^2 - e^{-2cu}), \qquad g_{22} = e^{2cu}h'(u)^2, \qquad g_{12} = 0$$

ve

$$h_{11} = \frac{-h''(u)h(u)}{\sqrt{h(u)^2(h'(u)^2 - e^{-2cu})}}, \qquad h_{22} = \frac{h(u)^2}{\sqrt{h(u)^2(h'(u)^2 - e^{-2cu})}}, \qquad h_{12} = 0$$

şeklinde elde edilir. $g_{11} = g_{22}$ konformallik koşulu değerlendirildiğinde M yüzeyi için

$$h'(u)^2 e^{2cu} - h(u)^2 e^{2cu} - 1 = 0 \tag{3.2}$$

denklemine ait genel çözüm

$$h(u) = \frac{\sqrt{\left(-u + \int_0^Z \left(-\frac{1}{-ca + \sqrt{a^2+1}}\right) da + c_1\right)}}{e^{cu}}$$

olup, $c = 0$ için

$$h(u) = \pm \sinh(-u + c_1)$$

çözümü elde edilir. Bu durumda konformal dönel yüzeyin denklemi

$$X(u,v) = (u, \pm \sinh(-u + c_1)\cos(v), \sinh(-u + c_1)\sin(v))$$

olacaktır. Diğer taraftan (2.4) ve (2.5) eşitliklerinden Gauss ve ortalama eğrilikleri,

$$K = \widetilde{K} + \frac{-h''(u)e^{-4cu}}{h(u)(h'(u)^2 - e^{-2cu})}$$

ve

$$H = \frac{1}{2}\frac{-h(u)h''(u) - e^{-2cu} + h'(u)^2}{e^{-2cu}(-e^{-2cu} + h'(u)^2)\sqrt{h(u)^2(e^{-2cu} - h'(u)^2)}}$$

olarak elde edilir. Konformal olmayan sıfır kesitsel eğriliğe sahip K −flat dönel yüzey için $h(u) = c_1 u + c_2$ olacağı kolaylıkla söylenebilir, fakat konformallik şartını sağlayan K −flat yüzey için *h(u)* çözümü olmayacağı ve dolayısıyla konformal K −flat dönel yüzey olmadığı belirtilmelidir. $c = 0$ Öklidyen durumda $h(u) = \pm 1$ için -1 sabit kesitsel eğriliğe sahip konformal K −flat dönel yüzey

$$X(u,v) = (u, \pm\cos(v), \pm\sin(v))$$

şeklinde silindir yüzeyi olacaktır.

M yüzeyi için minimal yüzey olma şartı düşünüldüğünde, $H = 0$ için

$$h(u) = \frac{e^{\left(-c+\sqrt{c^2-c_1}\right)u} + 4(c_2)^2(c_1 - c^2)e^{\left(-c-\sqrt{c^2-c_1}\right)u}}{4c_2(c_1 - c^2)}$$

çözümü elde edilir. O halde konformal olmayan minimal dönel yüzey denklemi

$$\varphi = e^{\left(-c+\sqrt{c^2-c_1}\right)u} + 4(c_2)^2(c_1 - c^2)e^{\left(-c-\sqrt{c^2-c_1}\right)u}$$

olmak üzere

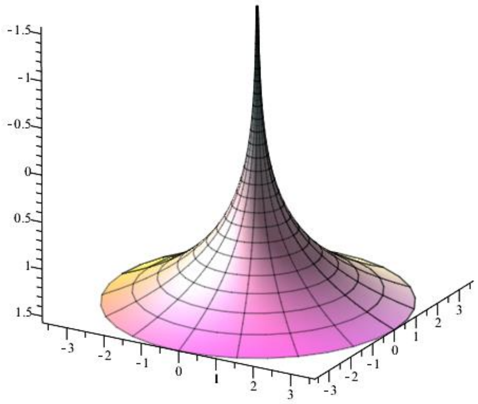
$$X(u,v) = \left(u, \frac{\varphi\cos(v)}{4c_2(c_1 - c^2)}, \frac{\varphi\sin(v)}{4c_2(c_1 - c^2)}\right)$$

şeklinde olacaktır. Konformallik şartı düşünüldüğünde minimal-konformal dönel yüzey olmadığı kolayca görülür.

Sonuç 3.1: De Sitter uzayında konformal olmayan minimal dönel yüzey

$$X(u,v) = \left(u, \frac{\varphi\cos(v)}{4c_2(c_1 - c^2)}, \frac{\varphi\sin(v)}{4c_2(c_1 - c^2)}\right)$$

formundadır ve minimal-konformal dönel yüzey yoktur.



Şekil 1. $c=-1, c_1=\frac{1}{2},\ c_2=1, h(u)=\frac{e^{\left(-c+\sqrt{c^2-c_1}\right)u}+4(c_2)^2(c_1-c^2)e^{\left(-c-\sqrt{c^2-c_1}\right)u}}{4c_2(c_1-c^2)}, -\frac{\pi}{2}\leq u\leq\frac{\pi}{2}$ ve $-\frac{3\pi}{2}\leq v\leq\frac{3\pi}{2}$ için non-konformal minimal dönel yüzey

Birinci temel formun katsayılarıyla oluşturulan Δ-Laplace operatörü hesaplandığında (2.7) eşitliğinden,

$$\Delta X=\begin{pmatrix} -\dfrac{h'(u)^3e^{2cu}+h'(u)h''(u)h(u)e^{2cu}-ch(u)-h'(u)}{h(u)(h'(u)^2e^{2cu}-1)^2}, \\ -\dfrac{\cos(v)\,e^{-2cu}(-ch'(u)h(u)e^{2cu}+h'(u)^2e^{2cu}-h(u)h''(u)e^{2cu}-1)}{h(u)(h'(u)^2e^{2cu}-1)^2}, \\ -\dfrac{\sin(v)\,e^{-2cu}(-ch'(u)h(u)e^{2cu}+h'(u)^2e^{2cu}-h(u)h''(u)e^{2cu}-1)}{h(u)(h'(u)^2e^{2cu}-1)^2} \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

bulunur. $\Delta X=0$ harmoniklik koşulu düşünüldüğünde $\Delta X=((\Delta X)_1,(\Delta X)_2,(\Delta X)_3)$ olmak üzere $(\Delta X)_2=(\Delta X)_3=0$ eşitliğinden,

$$h(u)=-\frac{1}{2}e^{\pm\frac{e^{c_1}c_2c-2c_1c-e^{-cu-c_1}}{c}}+\frac{1}{2}\,e^{\mp\frac{e^{c_1}\,c_2\,c-e^{-cu-c_1}}{c}}$$

çözümü elde edilir fakat bu çözümlerin $(\Delta X)_1=0$ eşitliğini sağlamamaktadır. O halde $c\neq 0$ için harmonik ve non-konformal dönel yüzey yoktur. $c=0$ alınırsa,

$$\Delta X=\begin{pmatrix} -\dfrac{h'(u)^3+h'(u)h''(u)h(u)-h'(u)}{h(u)(h'(u)^2-1)^2}, \\ -\dfrac{\cos(v)\,(h'(u)^2-h(u)h''(u)-1)}{h(u)(h'(u)^2-1)^2}, \\ -\dfrac{\sin(v)\,(h'(u)^2-h(u)h''(u)-1)}{h(u)(h'(u)^2e^{2cu}-1)^2} \end{pmatrix}$$

elde edilir ve burada $(\Delta X)_1=(\Delta X)_2=(\Delta X)_3=0$ eşitliklerini sağlayan $h(u)$ fonksiyonu

$$h(u)=\frac{\pm c_1}{2}\left(\frac{e^{\frac{2(c_2+u)}{c_1}}-1}{e^{\frac{2(c_2+u)}{c_1}}}\right)$$

olarak bulunur. Bu durumda harmonik ve non-konformal dönel yüzey

$$X(u,v)=\left(u,\frac{\pm c_1}{2}\left(\frac{e^{\frac{2(c_2+u)}{c_1}}-1}{e^{\frac{2(c_2+u)}{c_1}}}\right)\cos(v),\frac{\pm c_1}{2}\left(\frac{e^{\frac{2(c_2+u)}{c_1}}-1}{e^{\frac{2(c_2+u)}{c_1}}}\right)\sin(v)\right)$$

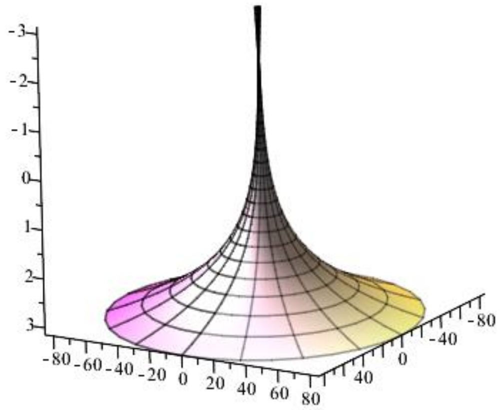
olarak elde edilir.

Sonuç 3.2: De Sitter uzayında $c \neq 0$ durumunda harmonik ve non-konformal dönel yüzey yoktur.

$c = 0$ durumunda ise harmonik ve non-konformal dönel yüzey

$$X(u,v) = \left(u, \frac{\pm c_1}{2}\left(\frac{e^{\frac{2(c_2+u)}{c_1}} - 1}{e^{\frac{2(c_2+u)}{c_1}}}\right)\cos(v), \frac{\pm c_1}{2}\left(\frac{e^{\frac{2(c_2+u)}{c_1}} - 1}{e^{\frac{2(c_2+u)}{c_1}}}\right)\sin(v)\right)$$

formundadır, burada $\varepsilon = \pm 1$ dir.



Şekil 2. $\varepsilon = 1, c_1 = 1,\ c_2 = 2, h(u) = \frac{\pm c_1}{2}\left(\frac{e^{\frac{2(c_2+u)}{c_1}} - 1}{e^{\frac{2(c_2+u)}{c_1}}}\right), -\pi \leq u \leq \pi$ ve $-\frac{3\pi}{2} \leq v \leq \frac{3\pi}{2}$ için non-konformal harmonik dönel yüzey

Diğer taraftan $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ 3x3 matris olmak üzere $\Delta X = \mathrm{A}X$ eşitliğini sağlayan non-konformal yüzeyler için;

$$a_{11}u + a_{12}h(u)\cos(v) + a_{13}h(u)\sin(v) = -\frac{\begin{Bmatrix} h'(u)^3 e^{2cu} - h'(u)h''(u)h(u)e^{2cu} \\ -ch(u) - h'(u) \end{Bmatrix}}{h(u)(h'(u)^2 e^{2cu} - 1)^2}$$

$$a_{21}u + a_{22}h(u)\cos(v) + a_{23}h(u)\sin(v) = -\frac{\cos(v)\, e^{-2cu}\begin{pmatrix} -ch'(u)h(u)e^{2cu} + h'(u)^2 e^{2cu} \\ -h(u)h''(u)e^{2cu} - 1 \end{pmatrix}}{h(u)(h'(u)^2 e^{2cu} - 1)^2}$$

$$a_{31}u + a_{32}h(u)\cos(v) + a_{33}h(u)\sin(v) = -\frac{\sin(v)\, e^{-2cu}\begin{pmatrix} -ch'(u)h(u)e^{2cu} + h'(u)^2 e^{2cu} \\ -h(u)h''(u)e^{2cu} - 1 \end{pmatrix}}{h(u)(h'(u)^2 e^{2cu} - 1)^2}$$

eşitlikleri elde edilir. *cosinüs* ve *sinüs* fonksiyonları lineer bağımsız olduğundan $a_{11} = \lambda$ ve $a_{22} = a_{33} = \mu$ ve $a_{12} = a_{21} = a_{31} = a_{13} = a_{32} = a_{23} = 0$

için

$$\lambda u = -\frac{\begin{Bmatrix} h'(u)^3 e^{2cu} - h'(u)h''(u)h(u)e^{2cu} \\ -ch(u) - h'(u) \end{Bmatrix}}{h(u)(h'(u)^2 e^{2cu} - 1)^2},$$

$$\mu h(u)\cos(v) = -\frac{\cos(v)\, e^{-2cu}\begin{pmatrix} -ch'(u)h(u)e^{2cu} + h'(u)^2 e^{2cu} \\ -h(u)h''(u)e^{2cu} - 1 \end{pmatrix}}{h(u)(h'(u)^2 e^{2cu} - 1)^2}$$

$$\mu h(u)\sin(v) = -\frac{\sin(v)\, e^{-2cu}\begin{pmatrix} -ch'(u)h(u)e^{2cu} + h'(u)^2 e^{2cu} \\ -h(u)h''(u)e^{2cu} - 1 \end{pmatrix}}{h(u)(h'(u)^2 e^{2cu} - 1)^2}.$$

2. ve 3. denklemden

$$\mu = -\frac{e^{-2cu}(-ch'(u)h(u)e^{2cu} + h'(u)^2 e^{2cu} - h(u)h''(u)e^{2cu} - 1)}{h(u)(h'(u)^2 e^{2cu} - 1)^2}$$

olup 1. denklem de kullanılırsa,

$$\lambda u \begin{Bmatrix} -ch'(u)h(u) + h'(u)^2 \\ -h(u)h''(u) - e^{-2cu} \end{Bmatrix} = \mu \begin{Bmatrix} h'(u)^3 e^{2cu} - h'(u)h''(u)h(u)e^{2cu} \\ -ch(u) - h'(u) \end{Bmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin $\{c \neq 0, \lambda = 0, \mu \neq 0\}$ ve $\{c \neq 0, \lambda \neq 0, \mu \neq 0\}$ için analitik çözümü yoktur.

$\{c \neq 0, \lambda \neq 0, \mu = 0\}$ için;

$$-ch'(u)h(u) + h'(u)^2 - h(u)h''(u) - e^{-2cu} = 0$$

denkleminin çözümü

$$h(u) = \frac{1}{2}\frac{(e^{\frac{\pm 2c_1(-c_2+e^{-cu})}{c}} - 1)e^{\frac{\mp 2c_1(-c_2+e^{-cu})}{c}}}{c_1},$$

bulunur. $\{c = 0, \lambda = 0, \mu \neq 0\}$ için

$$h'(u)^3 - h'(u)h''(u)h(u) - h'(u) = 0$$

denkleminden

$$h(u) = \frac{\pm 1}{2} c_1 \left\{ \frac{\left(e^{\frac{C_2}{c_1}}\right)^2 \left(e^{\frac{u}{c_1}}\right)^2 - 1}{\left(e^{\frac{C_2}{c_1}}\right)\left(e^{\frac{u}{c_1}}\right)} \right\}, h(u) = c_1$$

bulunur. $\{c = 0, \lambda \neq 0, \mu = 0\}$için

$$h'(u)^2 - h(u)h''(u) - 1 = 0$$

eşitliğinden

$$h(u) = \frac{\pm 1}{2} c_1 \left\{ \frac{\left(e^{\frac{C_2}{c_1}}\right)^2 \left(e^{\frac{u}{c_1}}\right)^2 - 1}{\left(e^{\frac{C_2}{c_1}}\right)\left(e^{\frac{u}{c_1}}\right)} \right\}$$

bulunur. $\{c = 0, \lambda \neq 0, \mu \neq 0\}$ için

$$\lambda u\{h'(u)^2 - h(u)h''(u) - 1\} = \mu\{h'(u)^3 - h'(u)h''(u)h(u) - h'(u)\}$$

denkleminden

$$h(u) = \frac{1}{2}\frac{\lambda u^2}{\mu} + c_1, h(u) = \frac{\pm 1}{2} c_1 \left\{ \frac{\left(e^{\frac{C_2}{c_1}}\right)^2 \left(e^{\frac{u}{c_1}}\right)^2 - 1}{\left(e^{\frac{C_2}{c_1}}\right)\left(e^{\frac{u}{c_1}}\right)} \right\}$$

çözümleri elde edilir.

Sonuç 3.3: De Sitter uzayında $\Delta X=\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}X$ eşitliğini sağlayan non-konformal dönel yüzeylerin denklemleri aşağıdaki gibidir,

$$X(u,v)=\left(\begin{array}{c} u,\dfrac{1}{2}\dfrac{(e^{\frac{\pm 2c_1(-c_2+e^{-cu})}{c}}-1)e^{\frac{\mp 2c_1(-c_2+e^{-cu})}{c}}}{c_1}\cos(v)\,, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{(e^{\frac{\pm 2c_1(-c_2+e^{-cu})}{c}}-1)e^{\frac{\mp 2c_1(-c_2+e^{-cu})}{c}}}{c_1}\sin(v) \end{array}\right),$$

$X(u,v)=(u,c_1\cos(v)\,,c_1\sin(v))$.

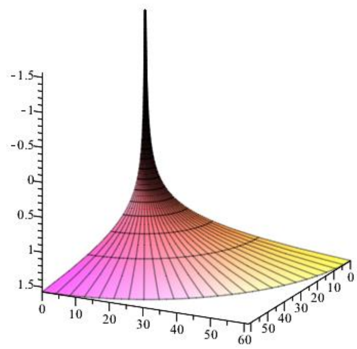
$c=0$ Öklidiyen durumunda $\Delta X=\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}X$ ve $\Delta X=\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \mu & 0\\ 0 & 0 & \mu\end{bmatrix}X$ olacak şekilde non-konformal dönel yüzeylerin denklemleri sırasıyla aşağıdakiler gibidir.

$$X(u,v)=\left(u,\frac{+1}{2}c_1\left\{\frac{\left(e^{\frac{c_2}{c_1}}\right)^2\left(e^{\frac{u}{c_1}}\right)^2-1}{\left(e^{\frac{c_2}{c_1}}\right)\left(e^{\frac{u}{c_1}}\right)}\right\}\cos(v)\,,\frac{\pm 1}{2}c_1\left\{\frac{\left(e^{\frac{c_2}{c_1}}\right)^2\left(e^{\frac{u}{c_1}}\right)^2-1}{\left(e^{\frac{c_2}{c_1}}\right)\left(e^{\frac{u}{c_1}}\right)}\right\}\sin(v)\right),$$

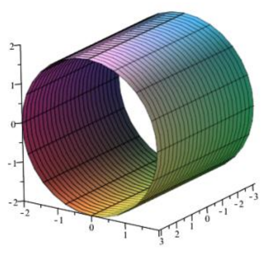
ve

$$X(u,v)=\left(u,\left(\frac{1}{2}\frac{\lambda u^2}{\mu}+c_1\right)\cos(v)\,,\left(\frac{1}{2}\frac{\lambda u^2}{\mu}+c_1\right)\sin(v)\right),$$

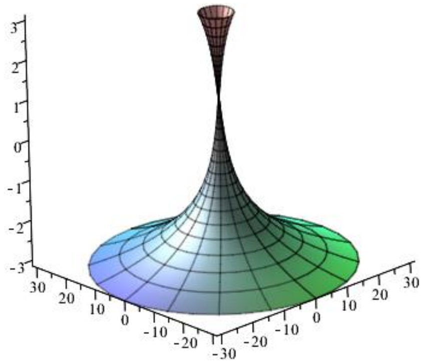
$$X(u,v)=\left(u,\frac{\pm 1}{2}c_1\left\{\frac{\left(e^{\frac{c_2}{c_1}}\right)^2\left(e^{\frac{u}{c_1}}\right)^2-1}{\left(e^{\frac{c_2}{c_1}}\right)\left(e^{\frac{u}{c_1}}\right)}\right\}\cos(v)\,,\frac{\pm 1}{2}c_1\left\{\frac{\left(e^{\frac{c_2}{c_1}}\right)^2\left(e^{\frac{u}{c_1}}\right)^2-1}{\left(e^{\frac{c_2}{c_1}}\right)\left(e^{\frac{u}{c_1}}\right)}\right\}\sin(v)\right).$$



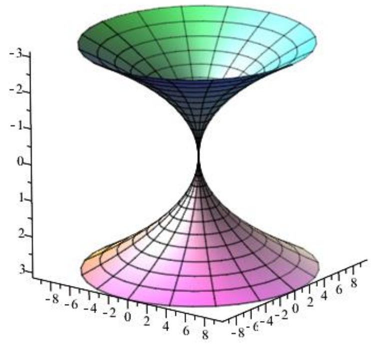
Şekil 3. $\lambda\neq 0,\mu=0,\varepsilon=1,c=-1,\ c_1=1,\ c_2=0,h(u)=\frac{1}{2}\frac{(e^{\frac{\pm 2c_1(-c_2+e^{-cu})}{c}}-1)e^{\frac{\mp 2c_1(-c_2+e^{-cu})}{c}}}{c_1},-\frac{\pi}{2}\leq u\leq\frac{\pi}{2}$ ve $0\leq v\leq\frac{\pi}{2}$ için non-konformal dönel yüzey



Şekil 4. $\lambda\neq 0,\mu=0,c=0,\ c_1=2\ ,h(u)=c_1,-\frac{\pi}{2}\leq u\leq\frac{\pi}{2}$ ve $0\leq v\leq\frac{\pi}{2}$ için non-konformal dönel yüzey



Şekil 5. $\lambda = 0, \mu \neq 0, \varepsilon = 1, c = 0,\ c_1 = 1,\ c_2 = -1, h(u) = \frac{\pm 1}{2} c_1 \left\{ \frac{\left(e^{\frac{C_2}{c_1}}\right)^2 \left(e^{\frac{u}{c_1}}\right)^2 - 1}{\left(e^{\frac{C_2}{c_1}}\right)\left(e^{\frac{u}{c_1}}\right)} \right\}, -\pi \leq u \leq \pi$ ve $-\frac{3\pi}{2} \leq v \leq \frac{3\pi}{2}$ için non-konformal dönel yüzey



Şekil 6. $c_1 = 0, \lambda = 2, \mu = 1$, $h(u) = \frac{1}{2}\frac{\lambda u^2}{\mu} + c_1, -\pi \leq u \leq \pi$ ve $-\frac{3\pi}{2} \leq v \leq \frac{3\pi}{2}$ için non-konformal dönel yüzey

Diğer taraftan $\Delta X = \eta X$ eşitliğini sağlayan yüzeyler için

$$\eta u = -\frac{\left\{ \begin{matrix} h'(u)^3 e^{2cu} - h'(u)h''(u)h(u)e^{2cu} \\ -ch(u) - h'(u) \end{matrix} \right\}}{h(u)(h'(u)^2 e^{2cu} - 1)^2}$$

$$\eta h(u)\cos(v) = -\frac{\cos(v)\, e^{-2cu} \left(\begin{matrix} -ch'(u)h(u)e^{2cu} + h'(u)^2 e^{2cu} \\ -h(u)h''(u)e^{2cu} - 1 \end{matrix} \right)}{h(u)(h'(u)^2 e^{2cu} - 1)^2}$$

$$\eta h(u)\sin(v) = -\frac{\sin(v)\, e^{-2cu} \left(\begin{matrix} -ch'(u)h(u)e^{2cu} + h'(u)^2 e^{2cu} \\ -h(u)h''(u)e^{2cu} - 1 \end{matrix} \right)}{h(u)(h'(u)^2 e^{2cu} - 1)^2}$$

eşitliklerinden 2. ve 3. Kullanılırsa,

$$-\frac{e^{-2cu} \left(\begin{matrix} -ch'(u)h(u)e^{2cu} + h'(u)^2 e^{2cu} \\ -h(u)h''(u)e^{2cu} - 1 \end{matrix} \right)}{h(u)(h'(u)^2 e^{2cu} - 1)^2} = \eta$$

olup 1. denklemden

$$h(u) \left\{ \begin{matrix} h'(u)^3 e^{2cu} - h'(u)h''(u)h(u)e^{2cu} \\ -ch(u) - h'(u) \end{matrix} \right\} = u \left\{ \begin{matrix} -ch'(u)h(u) + h'(u)^2 \\ -h(u)h''(u) - e^{-2cu} \end{matrix} \right\}$$

elde edilir. Bu denklemin bir analitik çözümü yoktur. c=0 için

$$h(u)\{h'(u)^3 - h'(u)h''(u)h(u) - h'(u)\} = u\{h'(u)^2 - h(u)h''(u) - 1\}$$

denkleminin çözümü

$$h(u) = \pm\sqrt{u^2 + c_1},\, h(u) = \frac{\pm 1}{2} c_1 \left\{ \frac{\left(e^{\frac{C_2}{c_1}}\right)^2 \left(e^{\frac{u}{c_1}}\right)^2 - 1}{\left(e^{\frac{C_2}{c_1}}\right)\left(e^{\frac{u}{c_1}}\right)} \right\}$$

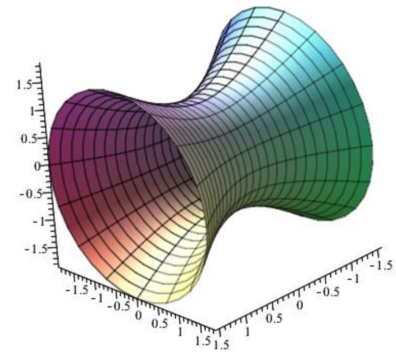
olarak elde edilir.

Sonuç 3.4: c=0 Öklidiyen durumunda $\Delta X = \eta X$ non-konformal dönel yüzeyler aşağıdakilerden birisidir,

$$X(u,v) = \left(u, \pm\sqrt{u^2 + c_1}\cos(v), \pm\sqrt{u^2 + c_1}\sin(v)\right)$$

$$X(u,v) = \left(u, \frac{\pm 1}{2} c_1 \left\{ \frac{\left(e^{\frac{C_2}{c_1}}\right)^2 \left(e^{\frac{u}{c_1}}\right)^2 - 1}{\left(e^{\frac{C_2}{c_1}}\right)\left(e^{\frac{u}{c_1}}\right)} \right\} \cos(v), \frac{\pm 1}{2} c_1 \left\{ \frac{\left(e^{\frac{C_2}{c_1}}\right)^2 \left(e^{\frac{u}{c_1}}\right)^2 - 1}{\left(e^{\frac{C_2}{c_1}}\right)\left(e^{\frac{u}{c_1}}\right)} \right\} \sin(v) \right),$$

$c \neq 0$ için De Sitter uzayında $\Delta X = \eta X$ eşitliğini sağlayan non-konformal dönel yüzey yoktur.



Şekil 7. $\varepsilon = 1, c = 0, c_1 = 1, h(u) = \sqrt{u^2 + 1}, h(u) = \pm\sqrt{u^2 + c_1}, -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ ve $-\frac{3\pi}{2} \leq v \leq \frac{3\pi}{2}$ için non-konformal dönel yüzey

Diğer taraftan (2.1) eşitliğinde

$$h'(u)^2 e^{2cu} - 1 = h(u)^2 e^{2cu}$$

konformallik şartı kullanılırsa

$$\Delta X = \begin{pmatrix} \frac{-h(u)h'(u)e^{2cu} - h'(u)h''(u)e^{2cu} - c}{h(u)^4 e^{4cu}}, \\ -\frac{\cos(v)\left(-ch'(u) + h(u) - h''(u)\right)}{h(u)^4 e^{4cu}}, \\ -\frac{\sin(v)\left(-ch'(u) + h(u) - h''(u)\right)}{h(u)^4 e^{4cu}} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

elde edilir. Konformal ve aynı zamanda harmonik M yüzeyi için $(\Delta X)_1 = (\Delta X)_2 = (\Delta X)_3 = 0$ eşitliklerinden

$$h(u)h'(u)e^{2cu} - h'(u)h''(u)e^{2cu} - c = 0,$$

$$-ch'(u) + h(u) - h''(u) = 0$$

yazılabilir. Her iki denklemi sağlayan bir h(u) çözümü yoktur. Ayrıca c=0 durumunda ikinci denklemden

$$h(u) = c_1 e^{-u} + c_2 e^{u}$$

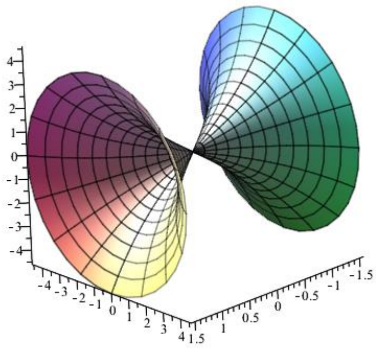
çözümü elde edilir. Konformallik şartı da düşünüldüğü zaman

$$(-c_1e^{-u}+c_2e^{u})^2-(c_1e^{-u}+c_2e^{u})^2=1$$

eşitliği elde edilir ki düzenlendiğinde $4c_1c_2+1=0$ elde edilir. Bu ifadeyi sağlayan c_1,c_2 değerleri için $h(u)$ çözüm fonksiyonu vardır.

Sonuç 3.5: c=0 Öklidiyen durumunda $4c_1c_2+1=0$ olmak üzere konformal-harmonik dönel yüzey aşağıdaki gibidir

$X(u,v)=(u,(c_1e^{-u}+c_2e^{u})\cos(v),(c_1e^{-u}+c_2e^{u})\sin(v))$.



Şekil 8. $c=0, c_1=-\frac{1}{2},\ c_2=\frac{1}{2}, h(u)=-\frac{1}{2}e^{-u}+\frac{1}{2}e^{u}, -\frac{\pi}{2}\leq u\leq\frac{\pi}{2}$ ve $-\frac{3\pi}{2}\leq v\leq\frac{3\pi}{2}$ için konformal-harmonik dönel yüzey

$A=\lfloor a_{ij}\rfloor$ 3x3 matris olmak üzere (2.2) eşitliği kullanılarak $\Delta X=AX$ eşitliğini sağlayan konformal yüzeyler için;

$$a_{11}u+a_{12h(u)\cos}(v)+a_{13}h(u)\sin(v)=-\frac{h(u)h'(u)e^{2cu}-h'(u)h''(u)e^{2cu}-c}{h(u)^4e^{4cu}},$$

$$a_{21}u+a_{22}\cos(v)+a_{13}h(u)\sin(v)=-\frac{\cos(v)\left(-ch'(u)+h(u)-h''(u)\right)}{h(u)^4e^{4cu}},$$

$$a_{31}u+a_{32}\cos(v)+a_{33}h(u)\sin(v)=-\frac{\sin(v)(-ch'(u)+h(u)-h''(u))}{h(u)^4e^{4cu}}$$

cos ve sin fonksiyonları lineer bağımsız olduğundan $a_{11}=\lambda$ ve $a_{22}=a_{33}=\mu$ ve $a_{12}=a_{21}=a_{31}=a_{13}=a_{32}=a_{23}=0$ için

$$\lambda u=-\frac{h(u)h'(u)e^{2cu}-h'(u)h''(u)e^{2cu}-c}{h(u)^4e^{4cu}},$$

$$\mu h(u)=-\frac{-ch'(u)+h(u)-h''(u)}{h(u)^4e^{4cu}},$$

denklemleri elde edilir. Son iki eşitlikten

$$\lambda uh(u)^4e^{4cu}-\mu h(u)^5h'(u)e^{6cu}+ch'(u)^2e^{2cu}-c=0$$

elde edilir. $\{c\neq0,\lambda=0,\mu\neq0\}$,$\{c\neq0,\lambda\neq0,\mu=0\}$, $\lambda=0$ ve $c=0$,$\{c\neq0,\lambda\neq0,\mu\neq0\}$ için çözüm yoktur.

$\lambda=0$ ve $\mu=0$ ve $c\neq0$ için,

$$h(u)=\pm\frac{1}{ce^{cu}}+c_1$$

bulunur fakat bu fonksiyon konformallik şartını sağlamaz.

Diğer taraftan $\Delta X = \eta X$ eşitliğini sağlayan konformal yüzeyler için (3.4) kullanılarak,

$$-\frac{h(u)h'(u)e^{2cu} - h'(u)h''(u)e^{2cu} - c}{h(u)^4 e^{4cu}} = \eta u,$$

$$-\frac{\cos(v)\left(-ch'(u) + h(u) - h''(u)\right)}{h(u)^4 e^{4cu}} = \eta h(u)\cos(v),$$

$$-\frac{\sin(v)\left(-ch'(u) + h(u) - h''(u)\right)}{h(u)^4 e^{4cu}} = \eta h(u)\sin(v)$$

elde edilir. 2. ve 3. denklemlerden

$$\frac{h''(u) + ch'(u) - h(u)}{h(u)^5 e^{4cu}} = \eta$$

bulunur. 1. denklemden

$$u\{h''(u) + ch'(u) - h(u)\} + h(u)\{h(u)h'(u)e^{2cu} - h'(u)h''(u)e^{2cu} - c\} = 0$$

elde edilir. Denklemin bir analitik çözümü yoktur. c=0 özel halinde

$$u\{h''(u) - h(u)\} + h(u)\{h(u)h'(u) - h'(u)h''(u)\} = 0$$

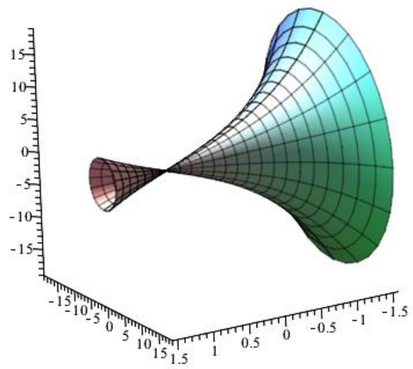
denkleminin çözümü,

$$h(u) = \pm\sqrt{u^2 + c_1}, h(u) = c_1 e^{-u} + c_2 e^{u}$$

olarak elde edilir. Burada sadece $h(u) = c_1 e^{-u} + c_2 e^{u}$ fonksiyonu $4c_1c_2 + 1 = 0$ eşitliğini sağlayan c_1, c_2 ler için konformallik şartını sağlar.

Sonuç 3.6: De Sitter uzayında $\Delta X = \eta X$ eşitliğini sağlayan konformal dönel yüzey yoktur. c=0 Öklidiyen durumunda $4c_1c_2 + 1 = 0$ olmak üzere konformal dönel yüzey aşağıdaki gibidir,

$$X(u,v) = (u, (c_1 e^{-u} + c_2 e^{u})\cos(v), (c_1 e^{-u} + c_2 e^{u})\sin(v)).$$



Şekil 9. $c = 0, c_1 = 4,\ c_2 = -1, h(u) = 4e^{-u} - e^{u}, -\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}$ ve $-\frac{3\pi}{2} \le v \le \frac{3\pi}{2}$ için konformal-harmonik dönel yüzey.

Etik Kurul Onayı

Bu çalışma için etik kurul onayı gerekmemektedir.

Çıkar Çatışması

Makalede yazarlar arasında herhangi bir çıkar çatışması söz konusu değildir.

Kaynaklar

1. Chen B.Y, *A report on submanifold of finite type*. Soochow J. Math. 1996;(22):117–337.
2. Guler E, Kisi O, *The Second Laplace-Beltrami Operator on Rotational Hypersurfaces in the Euclidean 4-Space*, Mathematica Aeterna. 2018;8(1):1–12.
3. Yuksel N, Karacan M.K, *Classsification of Conformal Surfaces of Revolution in Hyperbolic 3-Space*, Facta Universitatis Ser. Math. İnform, 2020;35(2):333-349.
4. Lee S, *Spacelike surfaces of constant mean curvature one in de Sitter 3-space*. Illinois Journal of Mathematics, 2005;49(1):63–98.
5. Lee S, Zarske K, *Surfaces of revolution with constant mean curvature in Hyperbolic 3-space*, Differential Geometry- Dynamical Systems (DGDS), 2014;(16):203–218.
6. Lee S, Martin J, *Timelike surfaces of revolution with constant mean curvature in de sitter 3-space*, International Electronic Journal of Geometry (IEJG), 2015;8(1):116–127.
7. Kaimakamis G, Papantoniou B, Petoumenos K,*Surfaces of revolution in the 3-dimensional Lorentz-Minkowski space satisfying* $\Delta^{III}r = Ar$, Bull. Greek Math. Soc, 2005;(50):75–90.
8. Takahashi T, *Minimal immersions of Riemannian manifolds*. J. Math. Soc. Japan, 1996;(18):380–385.
9. Garay O. J, *n extension of Takahashi's theorem*. Geom. Dedicata, 1990;(34):105–112.
10. Dillen F, Pas J, Vertraelen L, *On the Gauss map of surfaces of revolution*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 1990;(18):239–246.
11. Bekkar M, Zoubir H, *Surfaces of Revolution in the 3-Dimensional Lorentz-Minkowski Space Satisfying* $\Delta x^i = \lambda^i x^i$, Int. J. Contemp. Math. Sciences, 2008;3(24):1173 - 1185.
12. Senoussi B, Bekkar M, *Helicoidal surfaces with* $\Delta^J r = Ar$ *in 3-dimensional Euclidean space*. Stud. Univ. Babes-Bolyai Math, 2015;60(3):437–448.