ADÜ Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi, 2024, 1(2): 84-91 **Araştırma Makalesi**

ADÜ Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi
https://dergipark.org.tr/tr/pub/adufmbd

Periyodik Sınır Koşullu Lineer Olmayan Hiperbolik Problemin Yakınsaklık Analizi

Akbala YERNAZAR [1], **İrem BAĞLAN** [2,*]

[1] Kocaeli Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Kocaeli, Türkiye
[2] Kocaeli Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Kocaeli, Türkiye

MAKALE BİLGİSİ

Makale Gönderim *30/11/2024*
Revizyon *08/12/2024*
Kabul *10/12/2024*

Anahtar Sözcükler:

Ters problem
Hiperbolik denklem
Periyodik sınır koşulu
Fourier yöntemi

ÖZET

Bu çalışmada, periyodik sınır koşullarına sahip bir boyutlu lineer olmayan hiperbolik denklemi için zamana bağlı katsayıların belirlenmesine yönelik bir ters problem ele alınmıştır. Periyodik sınır koşullar sinüs, kosinüs biçimindeki özfonksiyonları içerir ve her özdeğer iki özfonksiyona karşılık geldiği için çözüm sürecini karmaşıklaştırmaktadır. Bu tür lokal olmayan sınır koşullarına sahip alanlarda sınır değer problemlerini çözmekte etkili olan genelleştirilmiş Fourier yöntemi kullanılmıştır. Picard ardışık yaklaşımlar yöntemi ile çözümün varlığı, yakınsaklığı ve tekliği kanıtlanmıştır.

1. GİRİŞ

Günümüzde kısmi diferansiyel denklemler teorisindeki başlıca gelişen olan alanlarından biri, araştırmacıların ilgi odağı olan lokal olmayan problemlerdir. Bu problemlerin incelenmesine sadece teorik açıdan değil, aynı zamanda pratikte de gereksinim duyulmaktadır. Fizik, biyoloji, kimya, ekoloji ve diğer birçok alandaki çeşitli olguların matematiksel modellemesinde klasik koşullar yerine, aranan fonksiyonun değerleri arasında belirli bir ilişkinin bölgenin sınırında ve içinde belirtildiği problemler ortaya çıkar. Bu tür koşullara sahip problemler lokal olmayan problem olarak adlandırılır. Kısmi diferansiyel denklemler için lokal olmayan problemlerin sistematik olarak incelenmesi 1960'larda Cannon (1963) ve Kamynin (1964) tarafından yazılan makalelerle başlamıştır. Lokal olmayan problemlerin arasında periyodik sınır koşullarına sahip problemler, büyük ilgi görmektedir. Bu tür koşullar, döngüsel olan tekrara düşen durumlarda, bilgisayar simülasyonlarında moleküler dinamik, akışkanlar mekaniği ve istatistiksel mekanik gibi alanlarda önemlidir. Örneğin, Sieradzan (2015), periyodik sınır koşulunun biyolojik sistemlerin doğru bir şekilde modellenmesindeki önemini vurgulamaktadır.

Matematiksel modellemeler, düz ve ters problemler olarak incelenir. Ters problemlerin uygulama alanı geniştir. Örneğin, hiperbolik denklemin ters katsayı problemi, sıcaklık ve ısı akışı ölçümlerine dayanarak bir malzemenin termal özelliklerini belirlemek, su altı görüntüleme ve tıbbi görüntüleme, akustik ölçümlere dayanarak ortamdaki ses hızını belirlemek, insan vücudunun elektrik akımlarını kullanarak görüntü oluşturmak, sismik dalgaların tespitinde, yer altı kaynaklarının yerinin ve miktarının belirlenmesinde, uydu bilgilerinden yararlanarak bir bölgenin altyapısının araştırılmasında hemen hemen tüm alanlarda karşılaşılmaktadır.

***Sorumlu Yazar:** isakinc@kocaeli.edu.tr

Ters problemlerin uygulama alanı geniştir. Örneğin, hiperbolik denklemin ters katsayı problemi, sıcaklık ve ısı akışı ölçümlerine dayanarak bir malzemenin termal özelliklerini belirlemek, su altı görüntüleme ve tıbbi görüntüleme, akustik ölçümlere dayanarak ortamdaki ses hızını belirlemek, insan vücudunun elektrik akımlarını kullanarak görüntü oluşturmak, sismik dalgaların tespitinde, yer altı kaynaklarının yerinin ve miktarının belirlenmesinde, uydu bilgilerinden yararlanarak bir bölgenin altyapısının araştırılmasında hemen hemen tüm alanlarda karşımıza çıkmaktadır (Yıldız, 2014; Ismailov, Tekin, 2016; Jiang, 2017; Protsakh, 2024; Huang, Imanuvilov ve Yamamoto, 2020; Romanov ve Bugueva 2024; Loc Hoang, 2019).

Lokal olmayan sınır koşulları içeren ters problemlerin çözümü, daha karmaşık ve zorludur. Ters katsayılı hiperbolik problem lokal sınır koşuluyla Mansur ve Tekin (2016) ve Denisov (2019) çalışmalarında ele alınmışsa, Denisov ve Shirkova, (2013) ile Tekin (2019) çalışmalarında lokal olmayan sınır koşullarıyla çalışılmıştır.

Ayrıca, lineer olmayan Euler–Bernoulli denklemi (Kanca ve Baglan, 2018), lineer olmayan iki boyutlu Burgers denklemi (Baglan ve Kanca, 2021), lineer olmayan yüksek mertebeden ters katsayılı quasi-lineer parabolik problemi (Kanca ve Baglan, 2017), lineer olmayan pseudo-parabolik denklemi (Baglan ve Kanca, 2015) periyodik sınır koşullarıyla incelenmiştir.

Bu çalışmada, zamana bağlı bilinmeyen ters katsayılı lineer olmayan hiperbolik denklemi periyodik sınır koşullarıyla incelenecektir. Problemin çözümü için Fourier yöntemi kullanılacaktır. Çözümün yakınsaklığı ve tekliği Picard ardışık yaklaşımlar yöntemiyle ispatlanacaktır.

Bu makalede ikinci bölümüm ilk kısmında problemin varlığından, ikinci kısmında çözümün yakınsaklığından, takip eden üçüncü kısımda ardışık yaklaşımın kesin çözüme yakınsaklığından ve son kısmında çözümün tekliğinden bahsedilecektir. Üçüncü bölüm sonuç ve önerileri içerir.

2. METOT

$\Omega := \{0 < x < \pi, 0 < t < T\}$ bölgesinde,

$$v_{tt} - v_{xx} = \theta(t) f(y,t,v), (y,t) \in \Omega \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &v(x,0) = \phi(x), x \in [0,\pi], t \in [0,T] \\ &v_t(x,t) = \psi(x), x \in [0,\pi], t \in [0,T] \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &v(0,t) = v(\pi,t), x \in [0,\pi], t \in [0,T] \\ &v_x(0,t) = v_x(\pi,t), x \in [0,\pi], t \in [0,T] \end{aligned} \tag{3}$$

$$E(t) = \int_0^{\pi} x v(x,t) dx \tag{4}$$

ters katsayılı yarı lineer hiperbolik problemi ele alınsın. Burada φ, ψ, E ve $f(x,t,v)$ fonksiyonları, sırasıyla $[0,\pi]$ aralığında ve $\bar{\Omega} \times \{-\infty,\infty\}$bölgesindedir. $f(x,t,v)$ fonksiyonu problemdeki lineer olmayan fonksiyondur. Burada $\phi(x), \psi(x)$ başlangıç fonksiyonlarıdır. (2) başlangıç koşulları, (3) periyodik sınır koşulları çözümün bulunması için gereklidir. $E(t)$ integral sınır koşulu ters katsayının bulunması için gerekli önemli bir koşuldur (Ionkin, 1977).

Tanım 1. (1)-(4) eşitliklerindeki $\{\theta, v\}$ çift fonksiyonlarının bulunması problemine ters problem denir.

2.1. (1)-(4) Ters Probleminin Çözümü

Tanım2. $[0,T]$ aralığında sürekli olan fonksiyonlar kümesi $\{v(t)\} = \{v_0(t), v_{sk}(t), v_{ck}(t), k = \overline{1,N}\}$, $\|v(t)\| = \max_{0\le t\le T}|v_0(t)| + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\max_{0\le t\le T}|v_{ck}(t)| + \max_{0\le t\le T}|v_{sk}(t)|\right)$ norm şartını sağlıyorsa B, Banach uzayıdır.

(1)-(4) için aşağıdaki koşullar alınsın:

K1. $E(t) \in C^2[0,T], \theta(t) \in C[0,T]$.

K2. $\phi(x) \in C^1[0,\pi], \psi(x) \in C[0,\pi]$.

K3.1 $f(y,t,v)$ fonksiyonu $\Omega \times (-\infty,\infty)$ bölgesinde sürekli ve aşağıdaki koşullar sağlansın:
$\left|\frac{\partial^{(k)} f(x,t,v)}{\partial x^{(k)}} - \frac{\partial^{(k)} f(x,t,\tilde{v})}{\partial x^{(k)}}\right| \le b(x,t)|v - \tilde{v}|, k = \overline{0,2}$,

Burada $b(x,t) \in L_2(\Omega), b(x,t) \ge 0$.

K3.2 $f(x,t,v) \in C[0,\pi], t \in [0,T]$,
$|f(x,t,v)| \le M$,

K3.3 $\int_0^{\pi} f(x,t,v) dx \ne 0, \forall t \in [0,T]$.

(1)-(3) eşitlikleri ile tanımlı problemin çözümü için Fourier yöntemi kullanılarak

$$\nu(y,t)=\frac{1}{2}\left(\phi_0+\psi_0 t+\int_0^t (t-\tau)\theta(\tau)f_0(\tau)d\tau\right)$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\phi_{ck}\cos\,2kt+\frac{\psi_{ck}}{2k}\sin 2kt+\frac{1}{2k}\int_0^t \theta(\tau)f_{ck}(\tau)\sin 2k(t-\tau)d\tau\right)\cos 2kx$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\phi_{sk}\cos 2kt+\frac{\psi_{sk}}{2k}\sin 2kt+\frac{1}{2k}\int_0^t \theta(\tau)f_{sk}(\tau)\sin 2k(t-\tau)d\tau\right)\sin 2kx \qquad (5)$$

elde edilir.

K1-K3 koşulları altında (4) eşitliğinin diferansiyeli alınırsa

$$E''(t)=\int_0^{\pi} x\nu_{tt}dx. \qquad (6)$$

(5) ve (6) denkleminden ters katsayı

$$\theta(t)=\frac{E''(t)-\pi\sum_{k=1}^{\infty}(2k)\left(\phi_{sk}\cos 2kt+\frac{\psi_{sk}}{2k}\sin 2kt+\frac{1}{2k}\int_0^t \theta(\tau)f_{sk}(\tau)\sin 2k(t-\tau)d\tau\right)}{\int_0^{\pi} xf(x,t,\nu)dx} \qquad (7)$$

elde edilir.

2.2. (1)-(4) Ters Probleminin Çözümün Ardışık Yaklaşımlarının Yakınsaklığı

Bu bölümde ardışık yaklaşıkların yakınsaklığı incelenecektir. Bunun için Picard ardışık yaklaşımlar yöntemi kullanılacaktır.

Teorem 1. K1-K3 koşulları sağlanırsa (1)-(4)'ün çözümü vardır.

İspat. (5) ve (7) denklemine iterasyon verilsin:

$$\nu_0^{(N+1)}(t)=\nu_0^{(0)}+\frac{2}{\pi}\int_0^t\int_0^{\pi}(t-\tau)\theta^{(N)}(\tau)f\left(\xi,\tau,\nu^{(N)}\right)d\xi d\tau,$$
$$\nu_{ck}^{(N+1)}(t)=\nu_{ck}^{(0)}+\frac{1}{\pi k}\int_0^t\int_0^{\pi}\theta^{(N)}(\tau)f(\xi,\tau,\nu^{(N)})\cos 2k\xi\,\sin 2k(t-\tau)d\xi d\tau, \qquad (8)$$
$$\nu_{sk}^{(N+1)}(t)=\nu_{sk}^{(0)}+\frac{1}{\pi k}\int_0^t\int_0^{\pi}\theta^{(N)}(\tau)f(\xi,\tau,\nu^{(N)})\sin 2k\xi\,\sin 2k(t-\tau)d\xi d\tau,$$

$$\theta^{(N+1)}(t)=\frac{E''(t)-\pi\sum_{k=1}^{\infty}(2k)\left(\phi_{sk}\cos 2kt+\frac{\psi_{sk}}{2k}\sin 2kt+\frac{1}{2k}\int_0^t \theta^{(N)}(\tau)f_{sk}(\tau)\sin 2k(t-\tau)d\tau\right)}{\int_0^{\pi} xf(x,t,\nu^{(N)})dx}. \qquad (9)$$

Burada

$$\nu_0^{(0)}=\varphi_0+\psi_0 t,$$
$$\nu_{ck}^{(0)}=\varphi_{ck}\cos 2kt+\frac{\psi_{ck}}{2k}\sin 2kt,$$
$$\nu_{sk}^{(0)}=\varphi_{sk}\cos 2kt+\frac{\psi_{sk}}{2k}\sin 2kt.$$

Teorem1 gereği $\nu^{(0)}(t)\in B, t\in[0,T]$ olduğu aşikardır.

$N=0$ için (8) ve (9) denklemine Cauchy, Lipschitz, Hölder ve Bessel eşitsizlikleri uygulanırsa

$$\left\|\nu^{(1)}(t)\right\|=\max_{0\le t\le T}\frac{\left|\nu_0^{(1)}(t)\right|}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\max_{0\le t\le T}\left|\nu_{ck}^{(1)}(t)\right|+\max_{0\le t\le T}\left|\nu_{sk}^{(1)}(t)\right|\right]$$
$$\le\frac{\|\phi_0\|+\|\psi_0\||T|}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\|\phi_{ck}\|+\|\phi_{sk}\|+\frac{\pi}{2\sqrt{6}}\sum_{k=1}^{\infty}\|\psi_{ck}\|+\|\psi_{sk}\|$$
$$+A\left\|\theta^{(0)}(t)\right\|\|b(x,t)\|\left\|\nu^{(0)}(t)\right\|+A\left\|\theta^{(0)}(t)\right\|M,$$

$$\left\|\theta^{(1)}(t)\right\|\le\frac{2}{\pi^2 M_0}\left(E''(t)+\pi\left\|\phi'_{ck}\right\|+\pi\|\psi_{sk}\|\right)+\frac{4T\sqrt{T}}{\pi M_0}\left(\left\|\theta^{(0)}(t)\right\|\|b(x,t)\|\left\|\nu^{(0)}(t)\right\|+\left\|\theta^{(0)}(t)\right\|M\right)$$

elde edilir. Burada $A=\left(\frac{\sqrt{3}T\sqrt{T}(T+\sqrt{2}\pi)}{3}\right)$.

Teorem1 koşulundan $\nu^{(1)}(t)\in B, t\in[0,T]$'dır.

Aynı işlemler N için de uygulanırsa,

*Sorumlu Yazar: isakinc@kocaeli.edu.tr

$$\left\|\nu^{(N+1)}(t)\right\| = \max_{0\le t\le T}\frac{\left|\nu_0^{(N)}(t)\right|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\max_{0\le t\le T}\left|\nu_{ck}^{(N)}(t)\right| + \max_{0\le t\le T}\left|\nu_{sk}^{(N)}(t)\right|\right]$$
$$\le \frac{\|\varphi_0\|+\|\psi_0\||T|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\|\varphi_{ck}\| + \|\varphi_{sk}\| + \frac{\pi}{2\sqrt{6}}\sum_{k=1}^{\infty}\|\psi_{ck}\| + \|\psi_{sk}\|$$
$$+A\left\|\theta^{(N)}(t)\right\|\|b(y,t)\|\left\|\nu^{(N)}(t)\right\| + A\left\|\theta^{(N)}(t)\right\|M,$$
$$\left\|\theta^{(N+1)}(t)\right\| \le \frac{2}{\pi^2 M_0}\left(E''(t) + \pi\left\|\varphi_{ck}'\right\| + \pi\|\psi_{sk}\|\right) + \frac{4T\sqrt{T}}{\pi M_0}\left(\left\|\theta^{(N)}(t)\right\|\|b(y,t)\|\left\|\nu^{(N)}(t)\right\| + \left\|\theta^{(N)}(t)\right\|M\right)$$

elde edilir. $\nu^{(N)}(t) \in B, t \in [0,T]$ ve teoremden $\nu^{(N+1)}(t) \in B, t \in [0,T]$'dır.

$$\{\nu(t)\} = \{\nu_0(t), \nu_{sk}(t), \nu_{ck}(t), k = 1, \dots\} \in B.$$

Yakınsaklık için $\lim_{N\to\infty}\nu^{(N+1)}(t) = \nu^{(N)}(t)$, $\lim_{N\to\infty}\theta^{(N+1)}(t) = \theta^{(N)}(t)$ olduğu gösterilecektir. Bunun için ardışık yaklaşımların farkını alınırsa,

$$\nu_0^{(1)}(t) - \nu_0^{(0)}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^t\int_0^{\pi}(t-\tau)\theta^{(0)}(\tau)f(\xi,\tau,\nu^{(0)})d\xi d\tau,$$
$$\nu_{ck}^{(1)}(t) - \nu_{ck}^{(0)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k}\int_0^t\int_0^{\pi}\theta^{(0)}(\tau)f(\xi,\tau,\nu^{(0)})\cos 2k\xi \sin 2k(t-\tau)d\xi d\tau,$$
$$\nu_{sk}^{(1)}(t) - \nu_{sk}^{(0)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k}\int_0^t\int_0^{\pi}\theta^{(0)}(\tau)f(\xi,\tau,\nu^{(0)})\sin 2k\xi \sin 2k(t-\tau)d\xi d\tau$$

ve $\int_0^t\int_0^{\pi}\theta^{(0)}(\tau)f(\xi,\tau,0)d\xi d\tau$ ekleme çıkarma yapılsın. Ardından mutlak değeri alınır ve Cauchy eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|\nu_0^{(1)}(t) - \nu_0^{(0)}(t)\right| \le \frac{2}{\pi}\left(\int_0^t(t-\tau)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t\left\{\int_0^{\pi}\left|\theta^{(0)}(\tau)\left[f(\xi,\tau,\nu^{(0)}) - f(\xi,\tau,0)\right]\right|d\xi\right\}^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+\frac{2}{\pi}\left(\int_0^t(t-\tau)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t\left\{\int_0^{\pi}\left|\theta^{(0)}(\tau)f(\xi,\tau,0)\right|d\xi\right\}^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$\left|\nu_{ck}^{(1)}(t) - \nu_{ck}^{(0)}(t)\right| \le \left(\int_0^t d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_0^t\left\{\frac{1}{\pi k}\int_0^{\pi}\theta^{(0)}(\tau)\left[f(\xi,\tau,\nu^{(0)}) - f(\xi,\tau,0)\right]\cos 2k\xi \sin 2k(t-\tau)d\xi\right\}^2 d\tau\right|\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+\left(\int_0^t d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_0^t\left\{\frac{1}{\pi k}\int_0^{\pi}\theta^{(0)}(\tau)f(\xi,\tau,0)\cos 2k\xi \sin 2k(t-\tau)d\xi\right\}^2 d\tau\right|\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$\left|\nu_{sk}^{(1)}(t) - \nu_{sk}^{(0)}(t)\right| \le \left(\int_0^t d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_0^t\left\{\frac{1}{\pi k}\int_0^{\pi}\theta^{(0)}(\tau)\left[f(\xi,\tau,\nu^{(0)}) - f(\xi,\tau,0)\right]\sin 2k\xi \sin 2k(t-\tau)d\xi\right\}^2 d\tau\right|\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+\left(\int_0^t d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left\{\frac{1}{\pi k}\int_0^t\int_0^{\pi}\theta^{(0)}(\tau)f(\xi,\tau,0)\sin 2k\xi \sin 2k(t-\tau)d\xi\right\}^2 d\tau\right|\right)^{\frac{1}{2}},$$

bulunur. Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|\nu_0^{(1)}(t) - \nu_0^{(1)}(t)\right| \le \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{t^3}{3}}\left(\int_0^t\left\{\int_0^{\pi}\left|\theta^{(0)}(\tau)\left[f(\xi,\tau,\nu^{(0)}) - f(\xi,\tau,0)\right]\right|d\xi\right\}^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{t^3}{3}}\left(\int_0^t\left\{\int_0^{\pi}\left|\theta^{(0)}(\tau)f(\xi,\tau,0)\right|d\xi\right\}^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\left|\nu_{ck}^{(1)}(t) - \nu_{ck}^{(1)}(t)\right| \le \sqrt{t}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_0^t\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\theta^{(0)}(\tau)\left[f(\xi,\tau,\nu^{(0)}) - f(\xi,\tau,0)\right]\cos 2k\xi \sin 2k(t-\tau)d\xi\right\}^2 d\tau\right|\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+\sqrt{t}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_0^t\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\theta^{(0)}(\tau)f(\xi,\tau,0)\cos 2k\xi \sin 2k(t-\tau)d\xi\right\}^2 d\tau\right|\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$\left|\nu_{sk}^{(1)}(t) - \nu_{sk}^{(0)}(t)\right| \le \sqrt{t}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_0^t\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\theta^{(0)}(\tau)\left[f(\xi,\tau,\nu^{(0)}) - f(\xi,\tau,0)\right]\sin 2k\xi \sin 2k(t-\tau)d\xi\right\}^2 d\tau\right|\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+\sqrt{t}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^t\int_0^{\pi}\theta^{(0)}(\tau)f(\xi,\tau,0)\sin 2k\xi \sin 2k(t-\tau)d\xi\right\}^2 d\tau\right|\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Bessel eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|\nu_0^{(1)}(t)-\nu_0^{(0)}(t)\right| \le \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{t^3}{3}}\left(\int_0^t\left\{\int_0^\pi\left|\theta^{(0)}(\tau)\left[f(\xi,\tau,\nu^{(0)})-f(\xi,\tau,0)\right]\right|d\xi\right\}^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{t^3}{3}}\left(\int_0^t\left\{\int_0^\pi\left|\theta^{(0)}(\tau)f(\xi,\tau,0)\right|d\xi\right\}^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\nu_{ck}^{(1)}(t)-\nu_{ck}^{(0)}(t)\right| \le \sqrt{t}\sqrt{\frac{\pi^2}{6}}\left(\int_0^t\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\theta^{(0)}(\tau)\left[f(\xi,\tau,\nu^{(0)})-f(\xi,\tau,0)\right]d\xi\right\}^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+\sqrt{t}\sqrt{\frac{\pi^2}{6}}\left(\int_0^t\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\theta^{(0)}(\tau)f(\xi,\tau,0)d\xi\right\}^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\nu_{sk}^{(1)}(t)-\nu_{sk}^{(0)}(t)\right| \le \sqrt{t}\sqrt{\frac{\pi^2}{6}}\left(\int_0^t\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\theta^{(0)}(\tau)\left[f(\xi,\tau,\nu^{(0)})-f(\xi,\tau,0)\right]d\xi\right\}^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+\sqrt{t}\sqrt{\frac{\pi^2}{6}}\left(\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^t\int_0^\pi\theta^{(0)}(\tau)f(\xi,\tau,0)d\xi\right\}^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Lipschitz koşulu uygulanırsa

$$\left|\nu_0^{(1)}(t)-\nu_0^{(0)}(t)\right| \le \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{t^3}{3}}\left(\int_0^t\left\{\int_0^\pi\theta^{(0)}(\tau)b(\xi,\tau)\nu^{(0)}d\xi\right\}^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{t^3}{3}}\left(\int_0^t\left\{\int_0^\pi\theta^{(0)}(\tau)f(\xi,\tau,0)d\xi\right\}^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\nu_{ck}^{(1)}(t)-\nu_{ck}^{(0)}(t)\right| \le \sqrt{t}\sqrt{\frac{\pi^2}{6}}\left(\int_0^t\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\theta^{(0)}(\tau)b(\xi,\tau)\nu^{(0)}d\xi\right\}^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{t}\sqrt{\frac{\pi^2}{6}}\left(\int_0^t\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\theta^{(0)}(\tau)f(\xi,\tau,0)d\xi\right\}^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\nu_{sk}^{(1)}(t)-\nu_{sk}^{(0)}(t)\right| \le \sqrt{t}\sqrt{\frac{\pi^2}{6}}\left(\int_0^t\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\theta^{(0)}(\tau)b(\xi,\tau)\nu^{(0)}d\xi\right\}^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{t}\sqrt{\frac{\pi^2}{6}}\left(\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^t\int_0^\pi\theta^{(0)}(\tau)f(\xi,\tau,0)d\xi\right\}^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Son olarak maksimumu alınırsa

$$\left\|\nu^{(1)}(t)-\nu^{(0)}(t)\right\| \le A\left\|\theta^{(0)}(t)\right\|\left(\|b(x,t)\|\left\|\nu^{(0)}(t)\right\|+M\right)$$

elde edilir.

$$C := A\left\|\theta^{(0)}(t)\right\|\left(\|b(x,t)\|\left\|\nu^{(0)}(t)\right\|+M\right)$$

olsun ve $\left\|\nu^{(1)}(t)-\nu^{(0)}(t)\right\| \le C$'dır.

Ters katsayının ardışık yaklaşımlarının farkı alınsın,

$$\theta^{(1)}-\theta^{(0)}=\frac{\pi\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^\pi\theta^{(0)}(\tau)f(\xi,\tau,\nu^{(0)})\sin 2k\xi\sin 2k(t-\tau)d\xi d\tau}{\int_0^\pi xf(x,\tau,\nu^{(0)})dx}-\frac{\pi\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^\pi\theta^{(1)}(\tau)f\left(\xi,\tau,\nu^{(1)}\right)\sin 2k\xi\sin 2k(t-\tau)d\xi d\tau}{\int_0^\pi xf\left(x,\tau,\nu^{(1)}\right)dx}.$$

Cauchy, Lipschitz, Hölder ve Bessel eşitsizlikleri sırasıyla uygulanırsa

$$\left\|\theta^{(1)}(t)-\theta^{(0)}(t)\right\| \le SC\left\|\theta^{(1)}(t)\right\|\|b(x,t)\|,$$

$$S=\frac{2\sqrt{T}}{M_*-2M\sqrt{T}}$$

elde edilir.

İkinci ve birinci ardışık yaklaşımların farkına

$$\nu_0^{(2)}(t)-\nu_0^{(1)}(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^t\int_0^\pi(t-\tau)\theta^{(1)}(\tau)f(\xi,\tau,\nu^{(1)})d\xi d\tau-\frac{2}{\pi}\int_0^t\int_0^\pi(t-\tau)\theta^{(0)}(\tau)f(\xi,\tau,\nu^{(0)})d\xi d\tau,$$

$$\nu_{ck}^{(2)}(t)-\nu_{ck}^{(1)}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k}\int_0^t\int_0^\pi\theta^{(1)}(\tau)f(\xi,\tau,\nu^{(1)})\cos 2k\xi\sin 2k(t-\tau)d\xi d\tau$$
$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k}\int_0^t\int_0^\pi\theta^{(0)}(\tau)f(\xi,\tau,\nu^{(0)})\cos 2k\xi\sin 2k(t-\tau)d\xi d\tau,$$

$$\nu_{sk}^{(2)}(t)-\nu_{sk}^{(1)}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k}\int_0^t\int_0^\pi\theta^{(1)}(\tau)f(\xi,\tau,\nu^{(1)})\sin 2k\xi\sin 2k(t-\tau)d\xi d\tau$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k}\int_0^t\int_0^\pi \theta^{(0)}(\tau)f(\xi,\tau,\nu^{(0)})\sin 2k\xi \sin 2k(t-\tau)d\xi d\tau$$

aynı yöntemler uygulanırsa

$$\left\|\nu^{(2)}(t)-\nu^{(1)}(t)\right\|$$
$$\leq (A+BM)C\left\|\theta^{(1)}(t)\right\|\left(\int_0^t\int_0^\pi b^2(\xi,\tau)d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

bulunur.

$$\theta^{(2)}(t)-\theta^{(1)}(t)=\frac{\pi\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^\pi \theta^{(1)}(\tau)f\left(\xi,\tau,\nu^{(1)}\right)\sin 2k\xi \sin 2k(t-\tau)d\xi d\tau}{\int_0^\pi xf\left(x,\tau,\nu^{(1)}\right)dx}$$
$$-\frac{\pi\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^\pi \theta^{(2)}(\tau)f(\xi,\tau,\nu^{(2)})\sin 2k\xi \sin 2k(t-\tau)d\xi d\tau}{\int_0^\pi xf(x,\tau,\nu^{(2)})dx}$$

ters katsayısı için Cauchy, Lipschitz, Hölder ve Bessel eşitsizlikleri uygulanırsa

$$\left\|\theta^{(2)}-\theta^{(1)}\right\|\leq B\left\|\theta^{(2)}(\tau)\right\|\|b(x,t)\|\left\|\nu^{(2)}-\nu^{(1)}\right\|$$

elde edilir.

N için

$$\left\|\nu^{(N+1)}(t)-\nu^{(N)}(t)\right\|\leq (A+SM)^N\left\|\theta^{(N)}(t)\right\|\ldots\left\|\theta^{(1)}(t)\right\|\frac{C}{\sqrt{N!}}\left(\int_0^t\int_0^\pi b^2(\xi,\tau)d\xi d\tau\right)^{\frac{N}{2}},$$

$$\left\|\theta^{(N+1)}-\theta^{(N)}\right\|\leq B\left\|\theta^{(N+1)}(t)\right\|\|b(x,t)\|\left\|\nu^{(N+1)}-\nu^{(N)}\right\|.$$

$N\to\infty$ iken $\nu^{(N+1)}\to\nu^{(N)}$ ve $\theta^{(N+1)}\to\theta^{(N)}$'dir.

2.3. (1)-(4) Ters Probleminin Ardışık Yaklaşımın Kesin Çözüme Yakınsaklığı

Burada $\lim_{N\to\infty}\nu^{(N+1)}(t)=\nu(t)$, $\lim_{N\to\infty}\theta^{(N+1)}(t)=\theta(t)$ olduğu gösterilecektir.

Tam ve ardışık ters katsayıların fark alınırsa,

$$\theta(t)-\theta^{(N+1)}(t)=\frac{\pi\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^\pi \theta^{(N+1)}(\tau)f\left(\xi,\tau,\nu^{(N+1)}\right)\sin 2k\xi \sin 2k(t-\tau)d\xi d\tau}{\int_0^\pi xf\left(x,t,\nu^{(N+1)}\right)dx}$$
$$-\frac{\pi\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^\pi \theta(\tau)f(\xi,\tau,\nu)\sin 2k\xi \sin 2k(t-\tau)d\xi d\tau}{\int_0^\pi xf(x,t,\nu)dx}.$$

Son eşitliğe $\int_0^t\int_0^\pi \theta(\tau)f(\xi,\tau,\nu^{(N+1)})d\xi d\tau$ ekleyip çıkarılırsa, ardından sırasıyla Cauchy, Bessel ve Lipschitz eşitsizlikleri uygulanırsa,

$$\left\|\theta(t)-\theta^{(N+1)}(t)\right\|$$
$$\leq S\|\theta(t)\|\|b(x,t)\|\left\|\nu(t)-\nu^{(N+1)}(t)\right\|.$$

elde edilir.

Aynı yöntemler $\nu(t)-\nu^{(N+1)}(t)$ için uygulandığında

$$\left\|\nu(t)-\nu^{(N+1)}(t)\right\|\leq A(A+SM)^N\left\|\theta^{(N)}(t)\right\|\left\|\theta^{(N)}(t)\right\|\ldots\left\|\theta^{(1)}(t)\right\|\frac{C}{\sqrt{N!}}\left(\int_0^t\int_0^\pi b^2(\xi,\tau)d\xi d\tau\right)^{\frac{N}{2}}$$
$$\times\, exp(2A+SM)\,\|\theta(t)\|\|b(x,t)\|.$$

elde edilir.

$N\to\infty$ iken $\nu^{(N+1)}(t)\to\nu(t)$, dolayısıyla $\theta^{(N+1)}(t)\to\theta(t)$ bulunur.

2.4. (1)-(4) Ters Probleminin Çözümünün Tekliği

Teorem 1. K1-K3 koşulları sağlanırsa (1)-(4)'ün çözümü tektir.

İspat. (1)-(4)'ün (ν,ω) ve (θ,ρ) iki çözümü olduğu farzedilsin.

$$\theta(t)-\rho(t)=\frac{\pi\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^\pi \rho(\tau)f(\xi,\tau,\omega)\sin 2k\xi\sin 2k(t-\tau)d\xi d\tau}{\int_0^\pi xf(x,\tau,\omega)dx}-\frac{\pi\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^\pi \theta(\tau)f(\xi,\tau,\nu)\sin 2k\xi\sin 2k(t-\tau)d\xi d\tau}{\int_0^\pi xf(x,\tau,\nu)dx}$$

için Cauchy, Bessel eşitsizlikleri ve Lipchitz koşulu sırasıyla uygulansın. Son olarak taraf tarafa maksimumu alınırsa

$$\|\theta(t)-\rho(t)\|\leq S\|\theta(t)\|\|b(x,t)\|\|\nu(t)-\omega(t)\| \quad (10)$$

elde edilir. İki çözümün farkı için de aynı işlemler yapılırsa

$$\|\nu(t)-\omega(t)\| \leq A(\|\theta(t)\|\|b(x,t)\|\|\nu(t)-\omega(t)\| +\|\theta(t)-\rho(t)\|M) \quad (11)$$

elde edilir. (10), (11) de yerine yazılırsa,

$$\|\nu(t)-\omega(t)\| \leq (A+SM)\|\theta(t)\|\|b(x,t)\|\|\nu(t)-\omega(t)\|$$

elde edilir. Gronwall eşitsizliği uygulanırsa

$$\|\nu(t)-\omega(t)\| \leq 0\times exp(A+SM)\left(\int_0^t\int_0^\pi \theta^2(\tau)b^2(\xi,\tau)d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir.

Böylece $\nu(t)=\omega(t)$, dolaysıyla $\theta(t)=\rho(t)$.

3. SONUÇ

Bu çalışmada, periyodik sınır koşullarına sahip bir boyutlu lineer olmayan hiperbolik denklem için zamana bağlı katsayıların belirlenmesine yönelik bir ters problem incelenmiştir. Çözümü için genelleştirilmiş Fourier yöntemi kullanılmıştır. Çözümün varlığı, yakınsaklığı ve tekliği Picard ardışık yaklaşımlar yöntemi ile ispatlanmıştır.

Bu sınır koşullar kullanılarak farklı yüksek mertetebeden türevli denklemler çözülebilir. Örneğin Euler-Bernoulli denklemi, iki yada üç boyutlu parabolik, hiperbolik denklemler, Burger denklemleri gibi, bunun yanı sıra bu problem farklı sınır koşulları ile de çözülebilir. Ayrıca farklı nümerik yöntemler kullanılarak yaklaşık gerçek çözümler arası yakınsaklık incelenip, örnekle şekilsel olarak da gösterilebilir.

Teşekkür ve Bilgilendirme

Bu çalışma Akbala Yernazar'ın Doktora tezinden üretilmiştir ve 2-4 Ekim 2024 tarihlerinde Kocaeli'nde düzenlenen "*Kocaeli Fen Bilimleri Kongresi*'nde sözlü olarak sunulmuştur.

KAYNAKÇA

Baglan, I. (2015). Determination of a coefficient in a quasilinear parabolic equation with periodic boundary condition. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 23(5), 884-900. doi: 10.1080/17415977.2014.947479

Baglan, I., Kanca, F. (2021). Fourier method for higher dimensional inverse quasi-linear parabolic problem. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 37(3), 2222-2234. doi: 10.1002/num.22682

Cannon, J. R. (1963). The solution of the heat equation subject to the specification of energy. *Quarterly of Applied Mathematics*, 21(2), 155-160.

Denisov, A. M. (2019). Existence of a solution of the inverse coefficient problem for a quasilinear hyperbolic equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 59, 550-558. doi: 10.1134/S096554251904002X

Denisov, A. M., Shirkova, E. Y. (2013). Inverse problem for a quasilinear hyperbolic equation with a nonlocal boundary condition containing a delay argument. *Differential Equations*, 49, 1053-1061. doi: 10.1134/S0012266113090012

Huang, X., Imanuvilov, O. and Yamamoto, M.(2020). Stability for inverse source problems by Carleman estimates. *Inverse Problems,* 36(12), doi: 10.1088/1361-6420/aba892

Ionkin, N.I. (1977). Solution of a boundary value problem in heat conduction with a nonclassical boundary condition, *Differential Equations*, 13, 204-211.

Ismailov, M.I., Tekin, I. (2016). Inverse coefficient problems for a first order hyperbolic system. *Applied Numerical Mathematics*, 106, 98-115. doi: 10.1016/j.apnum.2016.02.008

Jiang, D., Liu, Y., Yamamoto, Y. (2017). Inverse source problem for the hyperbolic equation with a time-dependent principal part. *Journal of Differential Equations*, 262(1), 653-681. doi: 10.1016/j.jde.2016.09.036

Kamynin, L. I. (1964). A boundary-value problem in the theory of heat conduction with non-classical boundary conditions. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz*, 4(6), 1006-1024. doi: 10.1016/0041-5553(64)90080-1

Kanca, F., Baglan, I. (2017). Solution of two-dimensional non-linear Burgers' equations with nonlocal boundary condition. *Malaya Journal of Matematik*, 5(04), 675-679. doi: 10.26637/MJM0504/0010

Kanca, F., Baglan, I. (2018). Inverse problem for Euler-Bernoulli equation with periodic boundary condition. *Filomat*, 32(16). doi: 10.2298/FIL1816691K

Loc Hoang, N. (2019). An inverse space-dependent source problem for hyperbolic equations and the Lipschitz-like convergence of the quasi-reversibility method. *Inverse Problems,*35(3), doi: 10.1088/1361-6420/aafe8f

Protsakh, N. (2024). Inverse problem for semilinear wave equation with strong damping. *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics,* 10, 1-12, doi: 10.3389/fams.2024.1467441

Romanov, V.G. , Bugueva T.V. (2024) . An inverse problem for a nonlinear hyperbolic equation. *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications*. 12(2) , 134–154.

Sieradzan, A. K. (2015). Introduction of periodic boundary conditions into unres force field. *Journal of Computational Chemistry*, 36(12), 940-946. doi:10.1002/jcc.23864

Tekin, I. (2019). Determination of a time-dependent coefficient in a wave equation with unusual boundary condition. *Filomat*, 33(9), 2653-2665. doi: 10.2298/FIL1909653T

Yıldız, M. (2014). Hiperbolik Türden Bir Denklem için Bir Katsayı Ters Problemi. *Karaelmas Fen ve Mühendislik Dergisi*, 4(2): 59-63.