Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
Sayı 21, Nisan 2010 ISSN - 1302 - 3055

FUZZY MATRİS OYUNLARIN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

Adem Cengiz ÇEVİKEL, Mehmet AHLATÇIOĞLU

Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 34210 Davutpaşa-İstanbul
E-mail: acevikel@yildiz.edu.tr, mahlatci@yildiz.edu.tr

Geliş Tarihi: 16.07.2009 Kabul Tarihi: 22.03.2010

ÖZET

Bu makalede fuzzy hedefli ve fuzzy ödemeli iki kişili sıfır toplamlı oyunlar ele alındı ve oyunun çözümleri için uygun bir defüzifikasyon fonksiyonu metodu ve Sakawa'nın metodu tanıtıldı. Örnek üzerinde yöntemler incelenerek sonuçlar karşılaştırıldı.

Anahtar Kelimeler: *Fuzzy hedef, Fuzzy ödeme, İki kişili sıfır toplamlı oyun, Fuzzy ödemeli matris, Fuzzy sayı*

ABSTRACT

In this paper a two person zero-sum game with fuzzy goals and fuzzy payoffs are considered and their solutions are calculated using a suitable defuzzification function and Sakawa's method. Then we compared solutions of the given an example. We have used MAPLE 12 computer algebra system to solve given problem.

KeyWords: Fuzzy goal, Fuzzy payoff, Two person zero-sum game, Fuzzy payoff matrix, Fuzzy number

1. GİRİŞ

Bu makale fuzzy matris oyunlarla ilgilidir. Fuzzy oyunlarla ilgili araştırmalar Aubin [12,13] ve Butnariu [14,15] tarafından geliştirildi. Campos [7] sıfır toplamlı fuzzy matris oyunları inceledi. Campos'un incelediği oyun tek ödemeli bir yapıdaydı ve fuzzy matematiksel programlama metoduyla max-min problemini formüle etti, daha sonra Sakawa ve Nishizaki fuzzy hedefli ve fuzzy ödemeli çok amaçlı iki kişili sıfır toplamlı oyunları incelediler [1]. Matris oyun teorisinin en önemli sonuçlarından biri de her iki kişili sıfır toplamlı matris oyunun iki lineer programlama problemine denk olması ve bu iki lineer programlama probleminin birbirinin duali olmasıdır. Bector [16,17,18], Maeda [19] ve Li [20] bu özelliği kullanarak fuzzy hedefli matris oyunları inceledi ve fuzzy lineer programlama problemlerini primal-dual ilişkisiyle çözdüler. Son olarak Vijay, Chandra ve Bector [8] bir defüzifikasyon fonksiyonu tanımlayarak fuzzy matris oyunları çözdüler. Bu makalede fuzzy hedefli ve fuzzy ödemeli iki kişili sıfır toplamlı oyunların çözümleri için defüzifikasyon metot ve Sakawa'nın metodu sunuldu, örnek üzerinde yöntemler incelenerek sonuçlar karşılaştırıldı.

2. TEMEL TANIMLAR

Tanım (Fuzzy ödemeli sıfır toplamlı oyun) : Oyuncu 1 bir $i \in I$ pür stratejisini ve Oyuncu 2 bir $j \in J$ pür stratejisini seçtiği zaman, Oyuncu 1 için bir fuzzy ödeme $\tilde{a}_{ij}$

$$\tilde{a}_{ij} = (a_{ij}, a'_{ij}, \grave{a}_{ij}) \tag{2.1}$$

şeklinde gösterilsin.

Burada a_{ij} bir orta değer a'_{ij} sol yayılma ve $\grave{a}_{ij}$ sağ yayılmadır, iki kişili sıfır toplamlı bir fuzzy oyun

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{m1} & \cdots & \tilde{a}_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

şeklinde bir fuzzy ödeme matrisiyle gösterilmiş olsun.

Bu matristen, Oyuncu 1 optimal stratejilerini kullanarak maksimum faydayı elde etmeye çalışırken, Oyuncu 2 de optimal stratejilerini kullanarak kaybını minimize etmeye çalışacaktır.

(2.2) fuzzy ödeme matrisi ile tanımlı oyuna fuzzy ödemeli iki kişili sıfır toplamlı oyun denir [1,4].

Bu şekilde tanımlanmış olan $\tilde{A}$ matrisi, Oyuncu 1 için maksimum faydayı ve Oyuncu 2 için minimum kaybı aynı anda verecek olan bir amaç matrisi olarak da yorumlanabilir.

Tanım (Fuzzy beklenen ödeme): Karma stratejilerin herhangi bir çifti $x \in X$ ve $y \in Y$ için, Oyuncu 1'in bulanık beklenen ödemesi:

$$\mu_{x\tilde{A}y}(p) = \begin{cases} 0 & \text{eğer} \quad p < a_{ij} - a'_{ij} \\ \dfrac{p - a_{ij} + a'_{ij}}{a'_{ij}} & \text{eğer} \quad a_{ij} - a'_{ij} \le p < a_{ij} \\ \dfrac{a_{ij} + `a_{ij} - p}{`a_{ij}} & \text{eğer} \quad a_{ij} \le p \le a_{ij} + `a_{ij} \\ 0 & \text{eğer} \quad a_{ij} + `a_{ij} < p \end{cases} \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanabilir [1,6].

Tanım (Fuzzy hedef): Oyuncu 1'in fuzzy ödemesine göre fuzzy hedef $\tilde{G}$,

$$\mu_{\tilde{G}}(p) = \begin{cases} 0 & , \text{eğer} \quad p \le \underline{a} \\ 1 - \dfrac{\overline{a} - p}{\overline{a} - \underline{a}} & , \text{eğer} \quad \underline{a} \le p \le \overline{a} \\ 1 & , \text{eğer} \quad \overline{a} \le p \end{cases} \tag{2.4}$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanabilir.

Oyuncu 1'in tatmin değeri, ödemenin $\underline{a}$ sınır değeri için 0 ve $\overline{a}$ sınır değeri için 1 dir. $\underline{a}$'den daha küçük istenmeyen bir p değeri için $\mu_{\tilde{G}}(p) = 0$, $\overline{a}$'den daha büyük istenen bir p değeri için $\mu_{\tilde{G}}(p) = 1$ ve $\underline{a} \le p \le \overline{a}$ için $\mu_{\tilde{G}}(p)$ sürekli ve kesin artan bir fonksiyon olarak tanıtılmıştır.

Tanım (Fuzzy hedefin başarı derecesi) : (x, y) karma stratejilerinin herhangi bir çifti olmak üzere, Oyuncu 1 için fuzzy beklenen ödeme $x\tilde{A}y$ ve fuzzy hedef $\tilde{G}$ ile gösterilsin. Bu durumda bir fuzzy kümede fuzzy hedefin başarı durumu; $\tilde{G}$ fuzzy hedef ve $x\tilde{A}y$ fuzzy beklenen ödemenin kesişimi olarak belirtilir. Fuzzy kümenin üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\mu_{a(x,y)}(p) = \min(\mu_{x\tilde{A}y}(p), \mu_{\tilde{G}}(p)) \tag{2.5}$$

Fuzzy hedefin başarı derecesi (2.5) üyelik fonksiyonunun maksimumu olarak tanımlanmıştır, yani

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_{a(x,y)}(p^*) &= \max_p \mu_{a(x,y)}(p) \\ &= \max_p \left\{ \min\left(\mu_{x\tilde{A}y}(p), \mu_{\tilde{G}}(p) \right) \right\}\end{aligned} \tag{2.6}$$

dir [4,5].

Bir fuzzy hedefin üyelik fonksiyon değeri, fuzzy hedefin başarı derecesi olarak yorumlanabilir. O zaman bir oyuncu iki farklı ödemeye sahip olduğunda üyelik fonksiyon değeri daha yüksek olan ödemeyi diğer ödemeye tercih eder. Yani oyuncu fuzzy hedefinin başarı derecesini maksimize etmek ister.
Oyuncu 2, Oyuncu 1'in $\mu(x,y)$ fuzzy hedefinin başarı derecesini minimize etmek için bir $y \in Y$ stratejisini seçtiğini kabul edelim. O zaman Oyuncu 1'in fuzzy hedefinin başarı derecesi $v(x) = \min_{y \in Y} \mu(x,y)$ olur. Bu durumda Oyuncu 1, $v(x)$ fuzzy hedefinin başarı derecesini maksimize etmek için bir $x \in X$ stratejisini seçer. Yani maximin prensibine göre hareket eder

Tanım (Birleşmiş fuzzy hedefin başarı derecesine göre maximin çözümü) : (x, y) karma stratejilerinin herhangi bir çifti olmak üzere, Oyuncu 1 için birleşmiş fuzzy hedefin başarı derecesine göre maximin değer:

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} \hat{\mu}_{a(x,y)}(p^*) \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanır. Böyle bir x stratejisine birleşmiş fuzzy hedefin başarı derecesine göre maximin çözümü denir.
Benzer yolla birleşmiş fuzzy hedefin başarı derecesine göre Oyuncu 2'nin minimax çözümünü ayrıca ele alınabilir.

3 SAKAWA'NIN METODU

Bu bölümde tek amaçlı oyunların maximin çözümleri için Sakawa'nın hesaplama yöntemi verilecektir.
Kabul edelim ki fuzzy sayılar ile gösterilen fuzzy ödemeler için şekil fonksiyonları ve fuzzy hedeflerin üyelik fonksiyonları lineer olsun. Oyuncu 1'in fuzzy hedefinin üyelik fonksiyonu

$$\mu_{\tilde{G}}(p) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } \; p < \underline{a} \\ \dfrac{p - \underline{a}}{\overline{a} - \underline{a}} & \text{eğer } \; \underline{a} \le p \le \overline{a} \\ 1 & \text{eğer } \; \overline{a} < p \end{cases} \tag{3.1}$$

şeklinde gösterilsin.
Burada $\underline{a}$ Oyuncu 1'in tatmin derecesi en kötü ödemesi ve $\overline{a}$ Oyuncu 1'in tatmin derecesi en iyi ödemesidir. Yani Oyuncu 1, $\underline{a}$ dan daha az bir ödemeye tatmin olmazken $\overline{a}$ den daha büyük bir ödemeye tam anlamıyla tatmin olur.
Oyuncu 1 ve Oyuncu 2 sırasıyla $i \in I$ ve $j \in J$ pür stratejilerini seçtiğinde Oyuncu 1 için bir ödeme $\tilde{a}_{ij} = (a_{ij}, a'_{ij}, `a_{ij})$ fuzzy sayısı ile gösterilsin. Üyelik fonksiyonu

$$\mu_{\tilde{a}_{ij}}(p) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } \; p < a_{ij} - a'_{ij} \\ \dfrac{p - a_{ij} + a'_{ij}}{a'_{ij}} & \text{eğer } \; a_{ij} - a'_{ij} \le p < a_{ij} \\ \dfrac{a_{ij} + `a_{ij} - p}{`a_{ij}} & \text{eğer } \; a_{ij} \le p \le a_{ij} + `a_{ij} \\ 0 & \text{eğer } \; a_{ij} + `a_{ij} < p \end{cases} \tag{3.3}$$

ile karakterize edilmiş olsun.
Bu durumda Oyuncu 1'in maximin değeri birleşmiş fuzzy hedefin başarı derecesine göre aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y}\hat{\mu}_{a(x,y)}(p^{*})=\max_{x\in X}\min_{y\in Y}\max_{p}\min(\mu_{\tilde{a}_{ij}}(p),\mu_{\tilde{G}}(p)). \tag{3.4}$$

üyelik fonksiyonları lineer olduğunda birleşmiş fuzzy hedefin başarı derecesine göre maximin strateji aşağıdaki teorem ile verilen matematiksel programlama probleminin çözülmesiyle elde edilebilir.

Teorem: İki kişili sıfır toplamlı oyunlar için fuzzy hedefin üyelik fonksiyonu ve fuzzy ödemenin şekil fonksiyonu (3.1) ve (3.3) gibi lineer olsun. Birleşmiş fuzzy hedefin başarı derecesine göre Oyuncu 1'in maximin çözümü aşağıdaki lineer olmayan programlama probleminin bir optimal çözümüne denktir.

$$\left.\begin{array}{ll}
\underset{x,\sigma}{\text{maximize}} & \sigma \\
\text{kısıtlar} & \dfrac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}+\grave{a}_{ij}\right)x_i y_j-\underline{a}}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\grave{a}_{ij}x_i y_j+\bar{a}-\underline{a}}\geq\sigma,\ \forall y\in Y \\
 & \sum_{i=1}^{m}x_i=1 \\
 & x_i\geq 0,\ i=1,\ldots,m
\end{array}\right\} \tag{3.5}$$

Eğer σ^{*} optimal değerse $0\leq\sigma^{*}\leq 1$ dir [1].
(3.5) problemine Shimizu ve Aiyoshi nin rahatlatma prosedürünü uygularsak, $y^{l},\ l=1,\ldots,L,\ y^{l}\in Y$ ile tanımlı noktaları alarak, yani $\sum_{j=1}^{n}y_j^{l}=1,\ y_j^{l}\geq 0,\ \mathrm{j}=1,\ldots,n$ alarak (3.5) problemi için aşağıdaki rahatlatılmış problemi ele alabiliriz [2].

$$\left.\begin{array}{ll}
\underset{x,\sigma}{\text{maximize}} & \sigma \\
\text{kısıtlar} & \dfrac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}+\grave{a}_{ij}\right)x_i y_j^{l}-\underline{a}}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\grave{a}_{ij}x_i y_j^{l}+\bar{a}-\underline{a}}\geq\sigma,\ l=1,\ldots,L \\
 & \sum_{i=1}^{m}x_i=1 \\
 & x_i\geq 0,\ i=1,\ldots,m
\end{array}\right\} \tag{3.6}$$

Rahatlatılmış problem (3.6) nin bir optimal çözümü (x^{L},σ^{L}) ile gösterilsin. Eğer (x^{L},σ^{L}) (3.5) orijinal problemine uygunsa o zaman (x^{L},σ^{L}), (3.5) orijinal probleminin optimal çözümü olur. Uygunluğun test edilmesi ve en çok bozulan kısıt'ın üretimi aşağıdaki minimizasyon probleminin çözülmesiyle elde edilebilir.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{minimize} & \dfrac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}+\grave{a}_{ij}\right)x_i^L y_j-\underline{a}}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\grave{a}_{ij}x_i^L y_j+\overline{a}-\underline{a}}\\ \text{kısıtlar} & \sum_{j=1}^{n}y_j=1\\ & \mathrm{y}_j\geq 0,\ \mathrm{j}=1,\dots,n\end{array}\right\} \tag{3.7}$$

$y^{L+1}=\hat{y}(x^L)$, (3.7) minimizasyon probleminin optimal çözümü olsun. Eğer $(x^L,\hat{y}(x^L),\sigma^L)$, (3.5) orijinal probleminin kısıtlarını sağlarsa bu durumda $(x^L,\hat{y}(x^L),\sigma^L)$, orijinal problemin optimal çözümü olur. Aksi takdirde eğer $(x^L,\hat{y}(x^L),\sigma^L)$, (3.5) orijinal probleminin kısıtlarını sağlamaz ise, o zaman (3.8) kısıt'ı (3.6) probleminin kısıtlarına eklenir ve problem (3.6) yeniden çözülür.

$$\left.\dfrac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}+\grave{a}_{ij}\right)x_i y_j^{L+1}-\underline{a}}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\grave{a}_{ij}x_i y_j^{L+1}+\overline{a}-\underline{a}}\geq\sigma\right\} \tag{3.8}$$

Bu prosedür sonlu sayıda tekrarlanarak optimal çözüm elde edilebilir [2]. Fakat (3.6) rahatlatılmış problemini çözmek hala zordur çünkü problem lineer olmayan kısıtlara sahiptir.
(3.6) rahatlatılmış problemi Sakawa'nın metodu kullanılarak lineer hale getirilebilir [9]. Bu metot Bisection yöntemi ve Simpleks metoda dayanır.
(3.6) rahatlatılmış probleminde σ değişkeni $0\leq\sigma\leq 1$ koşulunu sağlar çünkü σ değişkeni fuzzy hedefin başarı derecesine göre maximin değerine karşılık gelir. $\sigma=\hat{\sigma}$ olsun, burada $\hat{\sigma}$, [0,1] aralığında bir değere sahiptir. Bu durumda (3.6) rahatlatılmış probleminin kısıtları aşağıdaki gibi olur:

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}+\grave{a}_{ij}\right)x_i y_j^l-\underline{a}\geq\hat{\sigma}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\grave{a}_{ij}x_i y_j^l+\overline{a}-\underline{a}\right),\ l=1,\dots,L\\ \sum_{i=1}^{m}x_i=1\\ x_i\geq 0,\ i=1,\dots,m\end{array}\right\}. \tag{3.9}$$

Yukarıdaki (3.7) minimizasyon problemi aşağıdaki değişken dönüşümü kullanılarak lineer programlama problemine indirgenebilir [3].

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\grave{a}_{ij}x_i^L y_j+\overline{a}-\underline{a}}=t. \tag{3.10}$$

ve

$$y_j t = z_j . \tag{3.11}$$

Böylece (3.7) minimizasyon problemi aşağıdaki lineer programlama problemine indirgenmiş olur.

$$\left.\begin{array}{l} \min\limits_{z,t} \ \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\left(a_{ij}+`a_{ij}\right)x_i^L z_j - \underline{a}t \\ \text{kısıtlar} \ \sum\limits_{j=1}^{n} z_j = t \\ \qquad \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} `a_{ij}x_i^L z_j + (\overline{a}-\underline{a})t = 1 \\ \qquad z_j \geq 0, \ \mathrm{j}=1,\dots,n \end{array}\right\} . \tag{3.12}$$

(3.12) bir lineer programlama problemidir, $z=\left(z_1, z_2, \dots, z_n\right)$ ve t karar değişkenlerine sahiptir. İki eşitlik kısıt'ı ve değişkenlerin negatif olmama koşulu vardır. Fuzzy ödemeli ve fuzzy hedefli iki kişili sıfır toplamlı bir oyunda maximin çözümün hesaplanması aşağıdaki algoritmayla özetlenebilir.

ALGORİTMA

Adım 1: Ödemeler için bir fuzzy hedef tanımla, her hangi bir $y^1 \in Y$ seç ve $l=1$ al. Sonra (3.6) rahatlatılmış problemini formüle et.

Adım 2: (3.6) rahatlatılmış probleminin kısıtlarında $\sigma = \hat{\sigma}$ alarak (3.9) kısıtlarını formüle et, Bisection metodu ve simplex metodu kullanarak $(x^*, \hat{\sigma} = \sigma^*)$ optimal değerini hesapla, sonra $x^* = x^L$ al.

Adım 3: (3.12) deki minimizasyon problemini x^L ile formüle et.

Adım 4: (3.12) deki minimizasyon problemini çöz ve optimal çözüm (z^*, t^*) elde et. Amaç fonksiyonunun değeri $\Phi(z^*, t^*)$ olsun

Adım 5: eğer $\Phi(z^*, t^*) \geq \sigma^* + \varepsilon$ ise algoritma sona erer, burada ε önceden belirtilmiş bir sabittir. Bu durumda x^L fuzzy hedefin başarı derecesine göre maximin çözümdür. Aksi takdirde eğer $\Phi(z^*, t^*) < \sigma^* + \varepsilon$ ise $l = l+1$ al ve $\hat{\sigma}$ 'yı düzenleyerek adım 2 ye dön.

Sakawa gösterdi ki aşağıdaki programlama problemi (3.5) problemine denktir [1].

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x,\sigma}{\text{maximize}} \ \sigma \\ \text{kısıtlar} \ \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m}\left(a_{ij}+`a_{ij}\right)x_i - \underline{a}}{\sum\limits_{i=1}^{m} `a_{ij}x_i + \overline{a} - \underline{a}} \geq \sigma, \ \mathrm{j}=1,\dots,n \\ \qquad \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ \qquad x_i \geq 0, \ i=1,\dots,m \end{array}\right\} \tag{3.13}$$

4 DEFÜZİFİKASYON FONKSİYON METODU

Bütün fuzzy sayıların kümesi $N(\mathbb{R})$, $\tilde{A}$ elemanları fuzzy sayılar olan $m\times n$ matris, $\tilde{b}$ ve $\tilde{c}$ sırasıyla elemanları fuzzy sayılar olan $m\times 1$ ve $n\times 1$ vektörler olmak üzere uygun olacak şekilde seçilmiş $\tilde{p}$ ve $\tilde{q}$ için sırasıyla

$$\tilde{A}x \lesssim_{\tilde{p}} \tilde{b} \text{ ve } \tilde{A}^T y \gtrsim_{\tilde{q}} \tilde{c}$$

iki fuzzy kısıt olsun. Yager'in [10] çözüm yönteminden $\tilde{A}x \lesssim_{\tilde{p}} \tilde{b}$ kısıt'ını $\tilde{p}$ fuzzy vektörünün i. bileşeni $\tilde{p}_i$, $i=1,\dots,m$ için

$$\tilde{A}x \bar{\le} \tilde{b} + \tilde{p}(1-\lambda),\ \lambda\in[0,1]$$

şeklinde yazabiliriz. Benzer şekilde $\tilde{A}^T y \gtrsim_{\tilde{q}} \tilde{c}$ kısıt'ını $\tilde{q}$ fuzzy vektörünün j. bileşeni $\tilde{q}_j$, $j=1,\dots,n$ için

$$\tilde{A}^T y \bar{\ge} \tilde{c} - \tilde{q}(1-\eta),\ \eta\in[0,1]$$

şeklinde yazabiliriz.

Burada $\bar{\le}$ ve $\bar{\ge}$ iki fuzzy sayı arasındaki bağlantıdır ve fuzzy sayılar pozitif skalerle çarpıldığında sıralamayı korurlar. Örneğin herhangi bir sıralama fonksiyonu

$F: N(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ için eğer $\tilde{a} \bar{\le} \tilde{b}$ ise $F(\tilde{a}) \le F(\tilde{b})$ dir [7].

Bu F fonksiyonu verilen fuzzy lineer programlama problemlerinde belirsizliği ortadan kaldırmak içinde kullanılabilir, o zaman bu fonksiyona defuzzification fonksiyon denir. O halde $\tilde{A}x \lesssim_{\tilde{p}} \tilde{b}$ ve $\tilde{A}^T y \gtrsim_{\tilde{q}} \tilde{c}$ fuzzy kısıtları aşağıdaki gibi olur.

$$\tilde{A}_i x \bar{\le} \tilde{b}_i + (1-\lambda)\tilde{p}_i,\ \lambda\in[0,1] \text{ ve } (i=1,\dots,m)$$

ve

$$\tilde{A}_j^T y \bar{\ge} \tilde{c}_j - (1-\eta)\tilde{q}_j,\ \eta\in[0,1] \text{ ve } (j=1,\dots,n)$$

Buradan

$$F(\tilde{A}_i x) \le F(\tilde{b}_i) + (1-\lambda)F(\tilde{p})$$

ve

$$F(\tilde{A}_j^T y) \bar{\ge} F(\tilde{c}_j) - (1-\eta)F(\tilde{q}).$$

elde edilir.

$\tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_i, \tilde{p}_i, \tilde{c}_j$ ve $\tilde{q}_j$ fuzzy üçgensel sayılar ve F

$$F(D) = \frac{\int_{d_l}^{d_u} x\mu_D(x)dx}{\int_{d_l}^{d_u} \mu_D(x)dx},$$

[10] dir. Burada d_l ve d_u fuzzy sayıların alt ve üst limitleridir. Fuzzy üçgensel sayıların özel durumları için $\tilde{A}x \lesssim_{\tilde{p}} \tilde{b}$ ve $\tilde{A}^T y \gtrsim_{\tilde{q}} \tilde{c}$ kısıtları sırasıyla aşağıdaki gibi olur:

$$\sum_{j=1}^{n}\left((a_{ij})_l + a_{ij} + (a_{ij})_u\right)x_j \le \left((b_i)_l + b_i + (b_i)_u\right) + (1-\lambda)\left((p_i)_l + p_i + (p_i)_u\right)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left((a_{ij})_l + a_{ij} + (a_{ij})_u\right)y_i \ge \left((c_j)_l + c_j + (c_j)_u\right) - (1-\eta)\left((q_j)_l + q_j + (q_j)_u\right)$$

$$\forall\lambda \in [0,1],\ \eta \in [0,1],\ i = 1,...,m \text{ ve } j = 1,...,n.$$

Burada

$$\tilde{a}_{ij} = \left((a_{ij})_l + a_{ij} + (a_{ij})_u\right),\ \tilde{b}_i = \left((b_i)_l + b_i + (b_i)_u\right),\ \tilde{p}_i = \left((p_i)_l + p_i + (p_i)_u\right),$$

$$\tilde{c}_j = \left((c_j)_l + c_j + (c_j)_u\right) \text{ ve } \tilde{q}_j = \left((q_j)_l + q_j + (q_j)_u\right)$$

fuzzy üçgensel sayılardır.

$S^m = \left\{x \in \mathbb{R}^m_+, e^T x = 1\right\}$, $S^n = \left\{y \in \mathbb{R}^n_+, e^T y = 1\right\}$ ve $\tilde{A}$ elemanları fuzzy sayılardan oluşan bir matris olmak üzere, $\tilde{v}$ ve $\tilde{w}$ sırasıyla Oyuncu 1 ve Oyuncu 2'nin tatmin seviyeleri olsun. Bu durumda fuzzy hedefli ve fuzzy ödemeli iki kişili sıfır toplamlı bir oyunu FG ile gösterirsek

$$FG = \left(S^m, S^n, \tilde{A}, \tilde{v}, \lesssim, \tilde{p}, \tilde{w}, \gtrsim, \tilde{q}\right)$$

şeklinde olur. Burada $\lesssim$ ve $\gtrsim$ sırasıyla $\le$ ve $\ge$'in fuzzy versiyonları, $\tilde{p}$ ve $\tilde{q}$ sırasıyla Oyuncu 1 ve Oyuncu 2'nin fuzzy telorans seviyeleridir. Şimdi fuzzy matris oyun FG 'nin çözümünü inceleyeceğiz.

Tanım: Eğer

$$(\tilde{x})^T \tilde{A} y \gtrsim_{\tilde{p}} \tilde{v},\ \forall y \in S^n$$

$$x^T \tilde{A} \tilde{y} \lesssim_{\tilde{q}} \tilde{w},\ \forall x \in S^m$$

ise $(x, y) \in S^m \times S^n$ noktasına FG fuzzy matris oyununun çözümü denir. Burada $\tilde{x}$ 'ya Oyuncu 1'in optimal stratejisi ve $\tilde{y}$ 'ya Oyuncu 2'nin optimal stratejisi denir.

O halde Oyuncu 1 ve Oyuncu 2 için fuzzy lineer programlama problemleri çiftini aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

(GFP1)
$$\text{öyle bir } x \in S^m \text{ bul ki}$$
$$x^T \tilde{A} y \gtrsim_{\tilde{p}} \tilde{v},\ \forall y \in S^n$$

ve

(GFD1)
$$\text{öyle bir y} \in S^n \text{ bul ki}$$
$$x^T \tilde{A} y \lesssim_{\tilde{q}} \tilde{w},\ \forall x \in S^m$$

Bu ifadeye Yager'in [10] çözüm metodu ve Zimmermann'ın [11] yaklaşımı uygulanırsa fuzzy lineer programlama problemi aşağıdaki probleme indirgenir.

(GFP2)
$$\max\ \lambda$$
$$\textit{kısıtlar}\ x^T \tilde{A} y \bar{\ge} \tilde{v} - \tilde{p}(1-\lambda),\ \forall \text{y} \in S^n$$
$$x \in S^m$$
$$\lambda \in [0,1]$$

ve

(GFD2)

$$\begin{aligned} &\max \quad \eta \\ &kısıtlar\ x^T \tilde{A} y \lesssim \tilde{w} + \tilde{q}(1-\eta),\ \forall x \in S^m \\ &\qquad y \in S^n \\ &\qquad \eta \in [0,1] \end{aligned}$$

(GFP2) ve (GFD2) kısıtları $F : N(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ defuzzification fonksiyonu yardımıyla şu şekilde yazılabilir.

(GFP3)

$$\begin{aligned} &\max \quad \lambda \\ &kısıtlar\ F(x^T \tilde{A} y) \geq F(\tilde{v}) - F(\tilde{p})(1-\lambda),\ \forall \mathrm{y} \in S^n \\ &\qquad e^T x = 1 \\ &\qquad \lambda \leq 1 \\ &\qquad x, \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

ve

(GFD3)

$$\begin{aligned} &\max \quad \eta \\ &kısıtlar\ F(x^T \tilde{A} y) \leq F(\tilde{w}) + F(\tilde{q})(1-\eta),\ \forall x \in S^m \\ &\qquad e^T y = 1 \\ &\qquad \eta \leq 1 \\ &\qquad y, \eta \geq 0 \end{aligned}$$

Daha evvel bahsettiğimiz gibi defuzzification fonksiyon sıralamayı değiştirmeyeceğinden (GFP3) ve (GFD3) aşağıdaki gibi yazılabilir.

(GFP4)

$$\begin{aligned} &\max \quad \lambda \\ &kısıtlar\ x^T F(\tilde{A}) y \geq F(\tilde{v}) - F(\tilde{p})(1-\lambda),\ \forall \mathrm{y} \in S^n \\ &\qquad e^T x = 1 \\ &\qquad \lambda \leq 1 \\ &\qquad x, \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

ve

(GFD4)

$$\begin{aligned} &\max \quad \eta \\ &kısıtlar\ x^T F(\tilde{A}) y \leq F(\tilde{w}) + F(\tilde{q})(1-\eta),\ \forall x \in S^m \\ &\qquad e^T y = 1 \\ &\qquad \eta \leq 1 \\ &\qquad y, \eta \geq 0 \end{aligned}$$

Burada $F(\tilde{A})$ bir $m \times n$ matris ve elemanları $F(\tilde{a}_{ij})$ $i = 1,\ldots,m$ ve $j = 1,\ldots,n$ dir. S^m ve S^n konveks olduğundan, (GFP4) ve (GFD4)'ün kısıtlarında S^m ve S^n 'nin yalnızca uç noktaları etkindir. Bu da bizi Oyuncu 1 ve Oyuncu 2 için sırasıyla aşağıdaki iki fuzzy lineer programlama problemine götürür.

(GFP5)

$$\begin{aligned} &\max \quad \lambda \\ &kısıtlar\ x^T F(\tilde{A})_j \geq F(\tilde{v}) - F(\tilde{p})(1-\lambda),\ (\mathrm{j}=1,\ldots,\mathrm{n}) \\ &\qquad e^T x = 1 \\ &\qquad \lambda \leq 1 \\ &\qquad x, \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

ve

(GFD5)
$$
\begin{aligned}
&\max \quad \eta \\
&\text{kısıtlar } F(\tilde{A})_i\, y \le F(\tilde{w}) + F(\tilde{q})(1-\eta),\ (i=1,\dots,m) \\
&\qquad e^T y = 1 \\
&\qquad \eta \le 1 \\
&\qquad y,\eta \ge 0
\end{aligned}
$$

Burada $F(\tilde{A})_i$ ve $F(\tilde{A})_j$ sırasıyla $F(\tilde{A})$'nın $i.$ satırı ve $j.$ sütunudur. O halde FG fuzzy matris oyununu çözmek için, sırasıyla Oyuncu 1 ve Oyuncu 2 için (GFP5) ve (GFD5) lineer programlama problemlerini çözmek zorundayız. Ayrıca eğer (x^*,λ^*), (GFP5)'in bir optimal çözümü ise o zaman x^* Oyuncu 1 için bir optimal strateji ve λ^* Oyuncu 1'in tatmin seviyesidir. Aynı ifadeler problem (GFD5)'in bir optimal çözümü olan (y^*,η^*) içinde söylenebilir.

Teorem : $FG=\left(S^m,S^n,\tilde{A},\tilde{v},\underset{\sim}{\le},\tilde{p},\tilde{w},\underset{\sim}{\ge},\tilde{q}\right)$ şeklinde tanımlanmış olan FG fuzzy matris oyunu (GFP5) ve (GFD5) lineer programlama problemlerine denktir [8] .

Örnek : $\tilde{A}=\begin{pmatrix}(175,180,190) & (150,156,158)\\ (80,90,100) & (175,180,190)\end{pmatrix}$ şeklinde tanımlanmış fuzzy matrisi ele alalım. Üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun.

$$
\mu_{\hat{G}}(p)=\begin{cases} 0 & \text{.eğer} \quad p<90 \\ \dfrac{(p-90)}{90} & \text{.eğer} \quad 90\le p\le 180 \\ 1 & \text{.eğer} \quad 180<p \end{cases},
$$

Bu durumda bu problemi Sakawa'nın metodu ile çözersek aşağıdaki sonuçlar elde edilir.
$(x_1=0.7785859, x_2=0,2214141,\ \sigma^*=0.800727311198660585)$
Aynı problemi $\tilde{p}_1=\tilde{p}_2=(18,21,24)$ telorans seviyesi ve $\tilde{v}=(155,165,175)$ tatmin seviyesi için Defuzzification fonksiyon metodu ile çözersek sonuçlar şu şekilde olur.
$(x_1=0.772472, x_2=0,227528,\ \sigma^*=0.800472623506331304)$

5 SONUÇ

Fuzzy hedefli ve fuzzy ödemeli iki kişili sıfır toplamlı oyunların çözümleri için Sakawa'nın metodu ve Defuzzifikasyon fonksiyon metot sunuldu. Bu metotlar bir örnek üzerinde incelendi. Sonuçlara dikkat edilirse aynı sonuçların elde edildiği görülür ($\sigma^*=0.8$). Örneğin çözümlerinde Maple 12 bilgisayar programı kullanılmıştır.

KAYNAKÇA

[1] M. Sakawa, and I. Nishizaki, Max-Min solutions for fuzzy multiobjective matrix games, Fuzzy set and Systems, Vol.67, pp.53-69, 1994.

[2] K. Shimizu, and E. Aiyoshi, Necessary conditions for min-max problems and algorithm by a relaxation procedure, IEEE Trans. Automat. Control AC-25, 62-66 ,1980

[3] A. Charnes, and W. Cooper, Programming with linear fractional function, Naval Res. Logist. Quart. 9, 181-186, 1962

[4] I.; Nishizaki, M. Sakawa, Fuzzy and Multiobjective Games for Conflict Resolution**,** Heidelberg; New York: Physica-Verl. 2001

[5] W.D. Cook, Zero-sum games with multiple goals, Naval Res. Logist. Quart. 23, 615-622 1976

[6] M. Zeleny, Games with multiple payoffs, International Journal of Game Theory, Vol.4, pp. 179-191, 1975.

[7] L. Campos Fuzzy linear programming models to solve fuzzy matrix games, Fuzzy Sets and Systems, Vol.32, pp.275-289, 1989

[8] V. Vijay, S. Chandra, C.R. Bector, Matrix games with fuzzy goals and fuzzy payoffs, Omega, Vol.33, pp. 425-429, 2005

[9] M. Sakawa, Interactive computer program for fuzzy linear programming with multiple objectives, International journal of man-machine studies, Vol.18, pp.489-503, 1983.

[10] R.R. Yager, A procedure for ordering fuzzy numbers of the unit interval, Information Sciences, Vol.24, pp.143-161, 1981

[11] H.J. Zimmermann, fuzzy programming and linear programming with several objective functions, Fuzzy sets and systems, Vol.1, pp.45-55, 1978

[12] J.P. Aubin, Mathematical Methods of Game and Economic Theory 1979

[13] J.P. Aubin, Cooperative fuzzy game, Math. Of Oper. Res. 6 1-13, 1981

[14] D. Butnariu, Fuzzy games : A description of the concept, Fuzzy sets and systems 1, 181-192, 1978

[15] D. Butnariu, Stability and shapley value for n-person fuzzy game, Fuzzy sets and systems 4, 63-72, 1980

[16] C.R. Bector, S. Chandra, On duality in linear programming under fuzzy environment, Fuzzy sets and systems 125:3, 17-25, 2002

[17] C.R. Bector, S. Chandra, V. Vijay, Matrix games with fuzzy goals and fuzzy linear programming duality, Fuzzy Optimization and Decision Making 3:2 55-69, 2004

[18] C.R. Bector, S. Chandra, Vijay V, Duality in linear programming with fuzzy parameters and matrix games with fuzzy payoffs, Fuzzy sets and systems 146:2, 53-69, 2004

[19] T. Maeda On characterization of equilibrium strategy of two person zero-sum games with fuzzy payoffs, Fuzzy sets and systems 139:2, 83-96, 2003

[20] Li D-F. A fuzzy multiobjective approach to solve fuzzy matrix games, The journal of Fuzzy Mathematics 7:907-12, 1999