



## A new q-rung picture fuzzy grey relational analysis method and investigation of its effectiveness

Büşra Güler<sup>1</sup> , Ahmet Sarucan<sup>2\*</sup> , Evrencan Özcan<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering and Natural Sciences, Konya Technical University, 42250, Konya, Türkiye

<sup>2</sup>Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering and Natural Sciences, Kırıkkale University, 71450, Kırıkkale, Türkiye

### Highlights:

- A new q-RPFGRA method was proposed by integrating q-RPF sets into the GRA method
- The proposed q-RPFGRA method was compared with 8 different operators used for q-RPFSs in the literature
- The rankings obtained by the Borda method were obtained

### Keywords:

- Picture fuzzy set
- q-Rung orthopair fuzzy set
- q-Rung picture fuzzy set
- q-Rung picture fuzzy grey relational analysis
- Borda method

### Article Info:

Research Article

Received: 04.12.2024

Accepted: 16.01.2026

### DOI:

10.17341/gazimmfd.1596116

### Correspondence:

Author: Ahmet Sarucan  
e-mail: asarucan@ktun.edu.tr  
phone: +90 505 875 2506

### Graphical/Tabular Abstract

In this study, a new method, q-RPFGRA, was proposed to eliminate the deficiency and uncertainty in the data used in decision problems and to enable experts to evaluate the problem from a wider perspective by analyzing the problem from positive, neutral and negative membership perspectives. With this method, the advantages of picture fuzzy set (PFS), q-rung orthopair fuzzy set (q-ROFS) and grey relational analysis (GRA) were obtained. The effectiveness of the method was tested by using the project selection problem studied in the literature. The q-RPFGRA method was compared with 8 different operators used for q-RPFS. Sensitivity analyses were performed by creating scenarios and the obtained rankings were combined using the Borda method (Figure A).

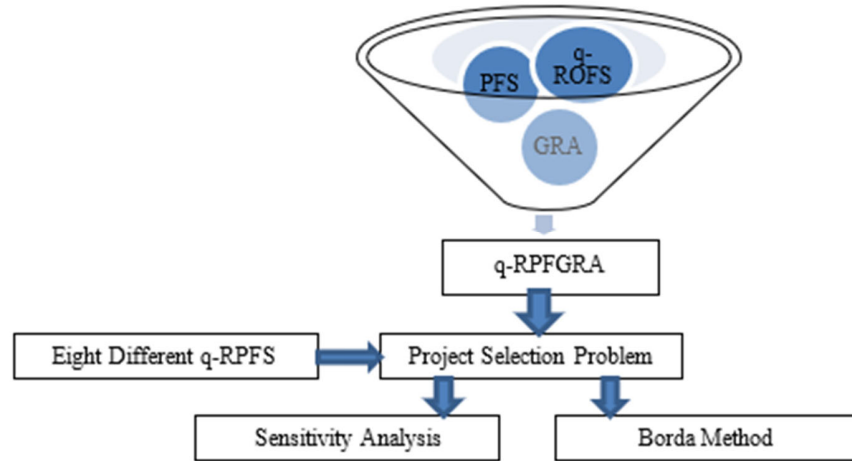


Figure A. Methodological framework of the study

**Purpose:** The aim of this study is to develop an integrated method to utilize the advantages of PFS, q-ROFS and GRA methods in one method.

**Theory and Methods:** q-RPF linguistic terms were used to construct the decision matrix. The ranking was obtained by calculating the grey relational degrees of the decision alternatives. Sensitivity analysis was performed according to the scenarios created by changing the criteria weights. The results were compared with the proposed method using q-RPFS operators. The different rankings obtained were combined with the Borda method.

**Results:** Using the q-RPFWA operator in the proposed q-RPFGRA method, the ranking of five different projects was obtained as  $A_2 > A_5 > A_1 > A_4 > A_3$ . When the ranking results obtained with different operators were compared, it was observed that the top two preferences of the operators and the proposed method were the same, except for one operator. Additionally, the last two rankings were found to involve the same projects across all five operators.

**Conclusion:** The q-RPFGRA method was proposed by combining the higher capacity of q-RPF in modelling fuzziness, its superiority in expressing uncertain information, the flexibility it offers to the decision maker and the advantage of GRA in examining the relationship between different variables, reducing uncertainty and complexity. In this way, it was shown that the method provides the advantages of both q-RPF and GRA through the project selection problem.



## Yeni bir q-rung görüntü bulanık gri ilişkisel analiz yöntemi ve etkinliğinin incelenmesi

Büşra Güler<sup>1</sup> , Ahmet Sarucan<sup>2\*</sup> , Evrencan Özcan<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Konya Teknik Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Endüstri Mühendisliği Bölümü, 42250, Konya, Türkiye

<sup>2</sup>Kırıkkale Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Endüstri Mühendisliği Bölümü, 71450, Kırıkkale, Türkiye

### Ö N E Ç I K A N L A R

- GRA yöntemine q-RPFS entegre edilerek yeni bir q-RPFGRA yöntemi önerilmiştir
- Önerilen q-RPFGRA yöntemi, literatürdeki q-RPFS'ler için kullanılan 8 farklı operatörle kıyaslanmıştır
- Borda yöntemi ile elde edilen sıralamalar birleştirilmiştir

### Makale Bilgileri

Araştırma Makalesi

Geliş: 04.12.2024

Kabul: 16.01.2026

### DOI:

10.17341/gazimmfd.1596116

### Anahtar Kelimeler:

Görüntü bulanık küme,  
q-rung orthopair bulanık  
küme, q-rung görüntü  
bulanık küme, q-rung  
görüntü bulanık gri ilişkisel  
analiz yöntemi,  
Borda yöntemi

### ÖZ

Bulanık mantık, sistemlerdeki belirsiz ve kesin olmayan durumları modelleyerek karar verme sürecinde önemli bir rol oynar. Karar vericilerin etkili bir karar alma süreci gerçekleştirmesi için bulanık küme alanındaki çalışmalar devam etmektedir. Bu çalışmalar bulanık kümelerin genişletilmiş versiyonları olarak adlandırılmaktadır. Bunlardan biri de q-rung görüntü bulanık kümelerdir (q-RPFS: q-Rung Picture Fuzzy Sets). Bu kümelerin kullanılması ile karar vericilerin görüşlerini ifade etmedeki belirsizliğe en yüksek esneklik sağlanmış olur. Diğer versiyonlar q-rung orthopair bulanık kümeler (q-ROFS: q-Rung Orthopair Fuzzy Sets) ve görüntü bulanık kümeler (PFS: Picture Fuzzy Sets) ise bulanıklığı ve belirsizliği tasvir etmede iki güçlü araçtır. Bu araçların üstünlüklerini içeren q-RPFS yöntemi, belirsiz ve tutarsız verileri yakalamada oldukça etkili sonuçlar vermektedir. Çalışmada, q-ROFS ve PFS'nin birleşimi olan q-RPFS'nin genişletilmesi ile elde edilen yeni bir q-rung görüntü bulanık gri ilişkisel analiz yöntemi (q-RPFGRA: q-Rung Picture Fuzzy Grey Relational Analysis) önerilmiştir. Bu yöntem, problemlerdeki belirsizliği ve bilgi kaybını azaltarak karar süreçlerinde daha hassas ve güvenilir sonuçların elde edilmesine katkı sunmaktadır. q-RPFGRA yönteminin etkinliği literatürde yer alan proje seçim örneği üzerinde gösterilmiştir. Önerilen yöntemin geçerliliğini ve uygulanabilirliğini göstermek için mevcut operatörlerle karşılaştırmalı bir analiz yapılarak elde edilen sonuçlar Borda yöntemi ile birleştirilmiştir. Çalışmada q-RPFGRA yöntemi, bulanık ortamda değerlendirme ve karar verme problemlerinde ilk kez uygulanmıştır.

## A new q-rung picture fuzzy grey relational analysis method and investigation of its effectiveness

### H I G H L I G H T S

- A new q-RPFGRA method is proposed by integrating q-RPFS into the GRA method
- The proposed q-RPFGRA method was compared with eight different operators used for q-RPFS in the literature
- The rankings obtained by the Borda method were combined

### Article Info

Research Article

Received: 04.12.2024

Accepted: 16.01.2026

### DOI:

10.17341/gazimmfd.1596116

### Keywords:

Picture fuzzy set,  
q-rung orthopair fuzzy set, q-  
rung picture fuzzy set, q-  
rung picture fuzzy grey  
relational analysis method,  
Borda method

### ABSTRACT

Fuzzy logic plays an important role in decision making by modelling uncertain and imprecise situations. Recent studies in decision processes focus on extended versions of fuzzy sets designed to better represent uncertainty. One of these extensions is the q-Rung Picture Fuzzy Set (q-RPFS), which provides greater flexibility for decision makers when expressing their opinions under uncertainty. Other related extensions, such as q-Rung Orthopair Fuzzy Sets (q-ROFS) and Picture Fuzzy Sets (PFS), are also powerful tools for representing fuzziness and uncertainty. Combining the advantages of these approaches, q-RPFS offers an effective structure for handling uncertain and inconsistent data. In this study, a new q-Rung Picture Fuzzy Grey Relational Analysis (q-RPFGRA) method is proposed based on the q-RPFS framework. The proposed approach aims to improve the reliability and precision of decision-making results by reducing uncertainty and information loss. The effectiveness of the q-RPFGRA method is demonstrated through a project selection example taken from the literature. To verify the validity and applicability of the proposed method, a comparative analysis with existing operators is conducted and the results are integrated using the Borda method. This study represents the first application of the q-RPFGRA method in evaluation and decision making problems under a fuzzy environment.

## 1. Giriş (Introduction)

Zadeh [1] ilk olarak bulanık mantığı kullanarak bulanık küme kavramını tanımlamıştır. Sistemlerdeki belirsizliği ve kesin olmama durumlarını açıklamıştır. Bulanık mantıktan önce klasik mantıkta doğru veya yanlış 0 veya 1 olarak ifade edilmekteydi. Makkar [2] klasik mantıktaki 0 veya 1 değeri, bulanık mantıkta (0, 1) aralığında gerçek sayılara genişlediği belirtmiştir. Üyelik fonksiyonu ( $\mu(x)$ ) ile gerçeğin derecesi temsil edilmektedir. Bir eleman bir kümeye ait ise üyelik derecesi 1, ait değil ise 0 ve kısmi üyelik söz konusu ise 0 ile 1 arasında değer almaktadır. Belirsiz olan ifadeler, sözel değişkenler aracılığıyla bulanık kümelerle matematiksel olarak ifade edilebilir.

q-ROFS ve PFS, bulanıklığı ve belirsizliği tasvir etmek için iki güçlü araçtır. Li vd. [3] q-ROFS ve PFS'nin üstünlüklerini içeren q-RPFS modelini önermişlerdir. Bu yöntemler, belirsiz ve tutarsız verileri yakalamada iyi sonuçlar vermiştir. Bir ögeye üç üyelik derecesi atanır ve bu sayede görüntü ve küresel bulanık kümelerin kısıtlaması büyük ölçüde hafifletilir.

Bu çalışmada Çok Kriterli Karar Verme (ÇKKV)'deki belirsizliği gidermek, karar vericiye alacağı kararlarda daha fazla esneklik sağlamak, verilerdeki eksikliği gidermek ve alan açmak için q-RPFS'ye Gri İlişkisel Analiz (GRA: Grey Relational Analysis) entegre edilerek q-RPFGRA yöntemi önerilmiştir. Bu sayede PFS'nin, q-ROFS'nin ve GRA'nın sağladığı avantajlar q-RPFGRA yöntemiyle elde edilmiştir. Literatürde çalışılan He vd. [4]'nin proje seçim örneği kullanılarak önerilen yöntemin etkinliği test edilmiştir. q-RPFS'ler için kullanılan 8 farklı operatörle önerilen yöntem karşılaştırılmıştır. Senaryolar oluşturularak duyarlılık analizi yapılmış ve elde edilen sıralamalar Borda yöntemi kullanılarak birleştirilmiştir.

Araştırmanın, önerilen yöntemin yeniliği ve ana katkıları şunlardır:

- q-RPFS'ler kriterleri değerlendirmek için karar vericilere daha fazla özgürlük sağlamaktadır. Literatürde q-RPFS'nin çeşitli yöntemler ile entegre edilerek genişletildiği görülmüştür. Yapılan literatür taraması sonucunda q-RPFGRA yönteminin birlikte kullanıldığı bir çalışmaya rastlanmamıştır.
- GRA ile her bir kriter ile kıyas yapılan referans serisi arasındaki ilişki derecesi belirlenmektedir. GRA, faktörler arasındaki ilişkilerin daha karmaşık olduğu karar problemlerine uygulanabilen kullanışlı bir yöntemdir. Genişletme sonucunda elde edilen q-RPFGRA aynı şekilde hem q-RPFS hem de GRA yöntemlerinin avantajlarını içermektedir.
- Çalışmada q-RPFGRA yöntemi proje seçim örneğinde kullanılmıştır. Uygulama değerlendirildiğinde yöntemin kullanımının pratik ve kolay olduğu görülmüştür.
- Duyarlılık analizi ile kriter ağırlıklarının projelerin değerlendirilmesindeki etkisi incelenmiştir.
- Borda yöntemi kullanılarak elde edilen bütünleşik sıralamanın q-RPFS'de kullanılmadığı görülmüştür. Borda yöntemi kullanılarak sonuç sıralaması elde edilmiştir.

Çalışma q-ROFS ve q-RPFS'nin literatür araştırması ile devam etmiştir. 3. bölümde q-ROFS yöntemi açıklanmış, 4. bölümde PFS ve q-RPFS yöntemi incelenmiştir. 5. bölümde çalışmada önerilen q-RPFGRA Yöntemi açıklanarak avantajları listelenmiştir. 6. bölümde önerilen yöntem proje seçim örneğinde uygulanarak duyarlılık analizi ve literatürdeki q-RPFS'de kullanılan yöntemlerin karşılaştırmalı analizi verilmiştir. 7. bölümde ise sonuçlar sunulmuştur.

## 2. Literatür Araştırması (Literature Review)

Literatür araştırması yapılırken öncelikle q-rung orthopair ve bunların uzantılarına, daha sonra ise q-RPFS ile ilgili çalışmalara

odaklanılmıştır. İncelenen çalışmalarda, yöntemlerin farklı problemlerde ve çeşitli operatörlerle kullanıldığı görülmüştür.

2016 yılında Yager [5], Sezgisel Bulanık Kümeler (IFS- Intuitionistic Fuzzy Sets) ve PFS'in yeni bir uzantısı olarak q-ROFS'i tanıtmıştır. Bu model, q derecesi arttıkça izin verilen orthopair üyelik derecesinin temsil alanı genişleterek, sistem modelleyicileri için esneklik, özgürlük ve kavramları temsil etmede karmaşıklık sağlar.

Literatürdeki q-ROFS ile yapılan çalışmalardan bazıları şunlardır: Xing vd. [6] q-rung orthopair bulanık Hamy ortalama operatörleri ailesini önermiş ve bu operatörleri en iyi şirket yeri seçim probleminde kullanmışlardır. Fahmi ve Aslam [7] q-rung üçgen orthopair bulanık sayılar kavramını önermişlerdir. Bu çalışmada, bir süt ürünleri firması için yeşil tedarikçi seçim problemi ele alınmıştır. Akram ve Shahzadi [8], Yager norm-standart işlemleri ile q-rung orthopair bulanık (q-ROF: q-Rung Orthopair Fuzzy) ortam altında toplama operatörlerini analiz edip geliştirmişlerdir. Bu çalışmada, yolsuzluk yoğunluğunun değerlendirilmesi ve yatırım için en uygun şirket seçim problemi sunulmuştur. Yang vd. [9] şirket için yatırım ortağı bulma ve bir tüketicinin ceket seçim problemlerine q-ROFS ile çözüm getirmişlerdir. Long vd. sosyal katılımcı tahsis ağı yönteminin yetkilendirilmiş değerlendirme mekanizmasını için q-ROF ortam altında bir yöntem önermişlerdir. Türkarşlan vd. [11] q-ROF topolojik uzay kavramını tanımlamış ve kavramın bazı özelliklerini incelemişlerdir. Li vd. [12] Arşimet t-norm ve t-conorm'a dayalı q-rung dual tereddütlü bulanık elemanlar için geniş bir genelleştirilmiş işlem ve bazı yeni toplama operatörlerini tanıtmışlardır. Verma [13] iki dilsel q-ROFS arasında bazı yeni genelleştirilmiş trigonometrik benzerlik ölçülerini tanımlamış ve risk sermaye şirketinin bir girişim projesine yatırım örneğini vermiştir. Arya ve Kumar [14], q-ROFS için yeni bir entropi ölçüsü önermiş ve kurumsal bilgi sistem seçim problemi için örnek bir uygulama göstermişlerdir. Mahmood ve Ali [15] yeni bir karmaşık q-ideal çözüme benzerliğe göre tercih sıralaması yöntemini önermişlerdir. Yang ve Garg [16] q-rung orthopair belirsiz dilsel etkileşim gücü bölünmüş Maclaurin Simetrik ortalama operatörlerini sunmuş ve bunların hidroelektrik santral ve rüzgâr çiftliği yer seçim problemlerinde uygulanmasını göstermişlerdir. Albahri vd. [17] q-ROFS bulanık ağırlıklı sıfır tutarsızlık yöntemi ve bulanık görüş puanı yöntemi olmak üzere iki önemli ÇKKV yöntemi geliştirmişlerdir. Bu yöntemleri, koronavirüs hastalığı 2019 için aşı dozlarının adil dağılımının sağlanması amacıyla bir vaka çalışmasında kullanmışlardır.

Mevcut çalışmalar incelendiğinde q-ROFS'nin çok çeşitli uygulama alanlarında karar vermede kullanıldığını göstermektedir. Bu alanlar arasında şirket seçim problemi, tedarikçi seçim problemi, yatırımcı seçimi, yatırıma karar verme ve santral inşaa yeri seçimi gibi konular yer almaktadır. Literatürdeki mevcut q-RPFS örnekleri incelenmiş ve Tablo 1'de bu çalışmalara ait kaynak, yöntem ve uygulama bilgilerini içeren kısa bir özet sunulmuştur.

İncelenen q-RPF örneklerinde genellikle operatörler, graflar ve genişletme çalışmaları yapıldığı görülmüştür. Uygulama alanları ise oldukça çeşitlidir: ERP seçimi, sosyal ilişkilerin incelenmesi, satın alma kararı, proje değerlendirmesi, iş yeri seçimi, hizmet değerlendirmesi, tıbbi tanı problemi ve verimlilik değerlendirme gibi farklı alanlarda kullanılmıştır. Literatür araştırması sonucunda, q-RPF'nin genişletilmiş hali olan q-RPF çalışmalarda GRA yönteminin kullanılmadığı tespit edilmiştir.

## 3. q-Rung Orthopair Bulanık Kümeler (q-Rung Orthopair Fuzzy Sets)

q-ROFS, IFS ve PFS'nin bir uzantısı olup, üyelik ve üye olmama derecelerinin q kuvvetinin toplamı 1 ile sınırlandırılmıştır [8].

**Tablo 1.** q-RPFS literatür özeti (q-RPFS literature review)

Kaynak	Yöntem	Uygulamalar
Li vd. [3]	q-RPLS, HM q-RPLS	ERP sistemi seçimi
Akram vd. [18]	Toplam kenar düzgünlüğü ve q-rung görüntü bulanık graf mükemmel kenar düzgünlüğü	Farklı insan grupları arasındaki sosyal ilişkilerin incelenmesi
Luqman vd. [19]	q-Rung görüntü bulanık (q-RPF: q-Rung Picture Fuzzy) hipergrafları	Ekspres servis talep eden bir mağaza örneği
Akram ve Habib [20]	q-RPF graf	Protein-protein etkileşimlerinin q-RPF graf analizi
He vd. [4]	Bazı q-RPF operatörleri	Sayısal bir proje değerlendirme örneği
Akram vd. [21]	q-RPLS	Ekonomik rekabetin gücünü hesaplanması örneği
Liu vd. [22]	q-RPF Yager toplama operatörleri	Gelişmekte olan teknoloji girişiminin seçimi, yatırım için uygun firma seçimi
Yang vd. [23]	q-Rung görüntü normal bulanık HM	Sağlık hizmet ürünü satın alınmasına ilişkin karar verme
Akram ve Luqman [24]	q-RPF hipergrafları	Ekspres hiper ağ örneği
Pınar ve Boran [25]	q-RPF ELECTRE	Proje değerlendirme örneği
Akram vd. [26]	Karmaşık q-RPF Einstein ortalama operatörü	Gıda şirketi için yatırım planı incelemesi
Sitara vd. [27]	q-RPF graf yapıları	Farklı bölgelerde uyuşturucu kaçakçılığının belirlenmesi
Yang vd. [28]	Aralık değerli q-RPF HM operatörleri	Uygun bir tedarik zinciri ortağı bulmak için işletme seçimi
Silambarasan [29]	q-RPF matrisleri	q-RPF matrisler üzerinde yeni bir işlem tanımlanması
Akram vd. [30]	q-RPF Einstein ağırlıklı ortalama operatörleri	Uygun bir iş yeri seçimi, bir tedarikçi seçim problemi.
Sitara ve Zafar [31]	q-RPF graf yapıları	Ülkeler arası en iyi havayolu hizmetlerinin bulunması
Akram vd. [32]	2-li dilsel karmaşık q-RPFS	En iyi makinenin seçimi
Kamacı ve Petchimuthu [33]	Tanimoto Benzerlik Katsayıları Bipolar q-RPF	Tıbbi teşhis ve örüntü tanıma problemi
Kausar vd. [34]	q-RPF dinamik Einstein operatörleri	Kanser tedavisinin iyileştirilme problemi
Feng ve Guan [35]	q-RPF Schweizer-Sklar ağırlıklandırılmış Maclaurin simetri ortalama	Proje değerlendirmesi örneği
Ali vd. [36]	q-rung orthopair görüntü bulanık ağırlıklandırılmış ortalama	Tıbbi tanı problemi
Akram vd. [37]	2-Tuple dilsel q-RPFS	Proje seçim örneği
Khan vd. [38]	2-Tuple dilsel q-RPFS	Trafik yönetim sistemi seçimi
Sirbiladze vd. [39]	q-RPLS	Eğitim programları verimlilik değerlendirme problemi
Dhumras ve Bajaj [40]	q-RPF AHP/WASPAS	Potansiyel stratejik planların ana hatlarını çizme problemi
Albahri vd. [41]	q-RPF tabanlı karar modeli	Dijital inovasyonu teşvik etmek için kurum kültürünün değerlendirilmesi
Ahmad vd. [42]	q-RPF ile bazı ÇKKV yöntemlerinin bütünleştirilmesi	Sağlık personelinin karşılaştığı çeşitli mesleki tehlikelerin değerlendirilmesi
Chitra ve Prabakaran [43]	q-RPF Frank ağırlıklı ortalama ve ağırlıklı geometrik operatörü	ÇKKV problemi
Ahmad vd. [44]	2-Tuple dilsel q RPF-ELECTRE I	Arttırılmış gerçeklik çözüm seçimi, yeşil bir tedarikçinin seçimi
Sun vd. [45]	q-Rung görüntü belirsiz dilsel bulanık kümeler	Ürün seçim problemi
Akram ve Shumaiza [46]	q-RPF TOPSIS, q-RPF VIKOR	Doğru konut kooperatifinin seçimi, uygun endüstriyel robot seçimi
Sirbiladze [47]	İlişkili olasılıklar q-rung görüntü dilsel ağırlıklı ortalama	Tesis yeri seçimi

Bu literatür özeti ardından q-ROFS yönteminin detaylarına geçilecektir.

Araştırmacılar, IFS ve PFS'nin kısıtlamaları nedeniyle, ÇKKV yöntemlerinde karar vericilerin karşılaştığı kısıtlamaları ortadan kaldıran ve karmaşık belirsiz bilgilerin gerçek hayatta temsilini kolaylaştıran, farklı ve ardışık bir bulanık küme olan q-ROFS'yi geliştirmişlerdir [17].

q-ROFS'ler belirsiz bilgileri ifade etmenin önemli yollarından biridir ve IFS ile PFS'den üstündür. En önemli özellikleri, üyelik derecesinin q. kuvveti ile üye olmama derecesinin q. kuvvetinin toplamının 1'e eşit veya daha az olmasıdır. Bu durum tanımlayabilecekleri belirsiz bilgi alanı daha genişletir [48].

q-Rung orthopair bulanık ağırlıklı ortalama birleştirme operatörü (q-ROFWA: q-Rung Orthopair Fuzzy Weighted Averaging) Eş. 1'de ve q-rung orthopair bulanık geometrik ağırlıklı birleştirme operatörü (q-

ROFWG: q-Rung Orthopair Fuzzy Weighted Geometric) ise Eş. 2'deki gibi tanımlanmıştır [49].

Ağırlıklı ortalama birleştirme operatörü

$q - ROFWA(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = w_1 \alpha_1 \oplus w_2 \alpha_2 \oplus \dots \oplus w_n \alpha_n$  bağıntısı, kriter ağırlık değerleri 0 ile 1 arasında değer alır ( $0 \leq w_k \leq 1$ ) ve ağırlık değerlerinin toplamı 1 olmalıdır ( $\sum_{k=1}^n w_k = 1$ ). Bu durumda  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 'in ağırlık vektörü  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$  olur.

$$q - ROFWA(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \left( (1 - \prod_{k=1}^n (1 - \mu_k^q)^{w_k})^{1/q}, \prod_{k=1}^n v_k^{w_k} \right) \quad (1)$$

Geometrik ağırlıklı birleştirme operatörü

$q - ROFWG(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \alpha_1^{w_1} \otimes \alpha_2^{w_2} \otimes \dots \otimes \alpha_n^{w_n}$  bağıntısında yine kriter ağırlık değerleri toplamı 1 olmalı ve kriterler 0-1 aralığında bir değer almalıdır ( $0 \leq w_k \leq 1$  ve  $\sum_{k=1}^n w_k = 1$ ). Bu durumda  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 'in ağırlık vektörü  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$  olur.

$$q - ROFWA(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \left\langle \prod_{k=1}^n \mu_k^{w_k}, \left(1 - \prod_{k=1}^n (1 - v_k^q)^{w_k}\right)^{1/q} \right\rangle \quad (2)$$

$A = (\mu_A(x), v_A(x))$  q-rung bulanık bir sayı ise bir bulanık sayının değerine göre büyüklüğünü bulmak için kullanılan skor (S) ve doğruluk (h) fonksiyonları ise sırasıyla Eş. 3 ve Eş. 4'deki gibi hesaplanır [8].

$$S(A) = (1 + \mu(x)^q - v(x)^q)/2 \quad (3)$$

$$h(A) = \mu(x)^q + v(x)^q \quad (4)$$

Eş. 1-4'de verilen  $\mu$  ve  $v$  sırasıyla üyelik derecesini ve üye olmama derecesini temsil eder.  $\mu_A: X \rightarrow [0, 1]$ ,  $v_A: X \rightarrow [0, 1]$ ,  $x \in X$ ,  $(\mu_A(x))^q + (v_A(x))^q \leq 1$ 'dir. q-rung derecesi ise  $q \geq 1$  şeklinde tanımlanır.

#### 4. Görüntü Bulanık Kümeler ve q-Rung Görüntü Bulanık Kümeler

(Picture Fuzzy Sets and q-Rung Picture Fuzzy Sets)

Cuong [50] bulanık kümelerin ve IFS'lerin doğrudan uzantıları olan PFS kavramını tanıtmıştır. PFS'ler, verilen fonksiyonlarla karakterize edilen kümelerdir: Üyelik (olumlu üyelik derecesi)  $\mu: X \rightarrow [0, 1]$ , üye olmama (olumsuz üyelik derecesi)  $v: X \rightarrow [0, 1]$ , tarafsız üyelik (çekimserlik derecesi)  $\eta: X \rightarrow [0, 1]$  ile karakterize edilen kümelerdir. Reddetme fonksiyonu ise  $\pi = 1 - (\mu + \eta + v)$  farkına denir. PFS kesin olmayan, belirsiz ve tutarsız bilgileri yakalamak için uygundur ve bulanık kümenin doğrudan bir genellemesidir. PFS'ye dayalı modeller, bir olaya ilişkin evet, çekimser, hayır ve reddetme cevabı içeren dört tür insan görüşüyle karşılaşıldığında yeterli olabilir. Örneğin, bir oylama durumunda seçmenler oy veren, çekimser, karşı oy veren ve oylamayı reddedenlerden oluşan dört gruba ayrılabilir. PFS, bulanık kümenin doğrudan bir genellemesidir [50].

q-ROFS ve PFS fikirlerinden hareketle, hem q-ROFS hem de PFS avantajlarından yararlanan q-RPFS önerilmiştir. q-RPFS, tarafsız üyeliğin derecesini ifade ederken, aynı zamanda PFS'nin üç derecenin toplamının 1'i geçmemesi kısıtlamasını da gevşetir. q-RPFS'nin gevşetilmiş kısıtlaması şudur: olumlu üyelik, tarafsız üyelik ve olumsuz üyelik derecelerinin q. derecenin toplamının 1'e eşit veya daha az olmasıdır. Bu, q-RPFS'nin bulanıklığı modellemek için q-ROFS ve PFS'lerden daha yüksek kapasiteye sahip olduğunu gösterir. Örneğin, bir karar verici olumlu, tarafsız ve olumsuz üyelik derecelerini sırasıyla 0,65, 0,25 ve 0,5 olarak sağlarsa, bu değerler q-ROFS'ler veya PFS'ler için geçerli değilken, önerilen q-RPFS'ler için geçerlidir. Bu q-RPFS'nin bulanıklığı modellemek için q-ROFS ve PFS'lerden daha yüksek kapasiteye sahip olduğunu gösterir [3].

Görüntü ve küresel bulanık küme modellerinden daha üstün olan q-RPFS modeli, kabul edilebilir üçlülerin geniş tasvir alanı gibi olağanüstü özelliği nedeniyle belirsiz ve anlaşılmasız bilginin alanını genişletir [20]. Karar vericiler zaman sıkıntısı ve uzmanlık eksikliği yaşadığında nicel kararlar yerine nitel kararlar vermeyi tercih edebilir. Bu eksikliklerin modellenmesinde Zadeh'in [1] önerdiği dilsel

değişkenler kullanılmaktadır. Wang ve Li [48], dilsel değişkenlerin yalnızca karar vericilerin nitel tercihini ifade edebileceğini belirterek, sezgisel dilsel küme kavramını önermişlerdir. Du vd. [51] tarafından aralık değerli Pisagor bulanık dilsel kümesi tanıtılmıştır. Li vd. [3] dilsel değişkenleri q-RPFS'lerle birleştirerek q-rung görüntü dil kümesi (q-RPLS: q-Rung Picture Linguistic Set) kavramını önermişlerdir. ÇKKV probleminde öznitelikler bağımlı olduğunda, birleştirilmiş değerler arasındaki karşılıklı ilişkinin dikkate alınması gerekir. Bonferroni ortalama ve Heronian ortalama (HM- Heronian Mean)'nın, birleştirilmiş argümanlar arasındaki karşılıklı ilişkiyi yakalayabilen iki etkili toplama teknolojisidir [3].

**Tanım 1.** X sıradan bir sabit küme olsun. X üzerinde tanımlanan bir PFS (B olsun) Eş. 5'deki gibi verilir [3].

$$B = \{(x, u_B(x), \eta_B(x), v_B(x)) | x \in X\}, \quad (5)$$

Eşitlikte verilenler sırasıyla  $u_B(x) \in [0, 1]$ ,  $\eta_B(x) \in [0, 1]$ ,  $v_B(x) \in [0, 1]$  B'nin olumlu üyelik derecesi, tarafsız üyelik derecesi ve olumsuz üyelik derecesi olarak adlandırılır ve  $u_B(x), \eta_B(x), v_B(x)$  aşağıdaki koşulu karşılar:

$$0 \leq u_B(x) + \eta_B(x) + v_B(x) \leq 1, \forall x \in X. \\ \text{Her } x \in X \text{ için } x \text{'in B'deki ret üyeliğinin derecesi } \pi_B(x) = 1 - (u_B(x) + \eta_B(x) + v_B(x)) \text{ olarak adlandırılır.}$$

**Tanım 2.** X, sıradan bir sabit küme olsun. X üzerinde tanımlanan bir q-RPFS (C olsun) Eş. 6'daki gibi verilir [3].

$$C = \{(x, u_C(x), \eta_C(x), v_C(x)) | x \in X\}, \quad (6)$$

Burada,  $u_C(x), \eta_C(x)$  ve  $v_C(x)$  sırasıyla olumlu, tarafsız ve olumsuz üyelik derecelerini tanımlar ve aşağıdaki gibi temsil edilir.  $u_C(x) \in [0, 1], \eta_C(x) \in [0, 1], v_C(x) \in [0, 1]$  ve  $0 \leq u_C(x)^q + \eta_C(x)^q + v_C(x)^q \leq 1 (q \geq 1), \forall x \in X$ .

Her  $x \in X$  için  $\pi_C(x) = (1 - (u_C(x)^q + \eta_C(x)^q + v_C(x)^q))^{1/q}$  x'in C'deki ret üyeliğinin derecesi olarak adlandırılır. X, niceliğe sahip dilbilimsel bir terim olsun ve t, S'nin niceliğidir. S<sub>i</sub> etiketi, bir dilsel değişkeni için olası bir değeri temsil eder. Örneğin, olası bir dilsel terim kümesi şu şekilde tanımlanabilir: S = {s<sub>1</sub>, s<sub>2</sub>, s<sub>3</sub>, s<sub>4</sub>, s<sub>5</sub>, s<sub>6</sub>, s<sub>7</sub>} = {çok zayıf, zayıf, biraz zayıf, orta, biraz iyi, iyi, çok iyi}. q-RPLS kavramını, dilsel terim kümesi q-RPFS ile birleştirerek Tanım 3'deki gibi açıklanır.

**Tanım 3.** X sıradan bir sabit küme ve S sürekli dilsel terim kümesi S = {s<sub>i</sub> | i = 1, 2, ..., t} olsun. X üzerinde tanımlanan bir q-RPLS (D olsun) Eş. 7'deki gibi verilir [3].

$$D = \{(s_{\theta(x)}, u_D(x), \eta_D(x), v_D(x)) | x \in X\}, \quad (7)$$

Burada,  $s_{\theta(x)} \in \bar{S}, u_D(x) \in [0, 1]$  D'nin olumlu üyelik derecesi,  $\eta_D(x) \in [0, 1]$  tarafsız üyelik derecesi,  $v_D(x) \in [0, 1]$  olumsuz üyelik derecesi olarak adlandırılır.  $u_D(x), \eta_D(x), v_D(x)$  aşağıdaki koşulu;

$$0 \leq u_D(x)^q + \eta_D(x)^q + v_D(x)^q \leq 1 (q \geq 1), \forall x \in X \text{ karşılar.} \\ \text{Ve } \langle s_{\theta(x)}, (u_D(x), \eta_D(x), v_D(x)) \rangle \text{ q-rung görüntü dilsel sayıları olarak adlandırılır. Basitçe } \alpha = \langle s_{\theta}, (u, \eta, v) \rangle \text{ ile gösterilir.}$$

#### 5. Yöntem (Method)

q-ROFS ve PFS'in entegre edilmesiyle q-RPFS yöntemi kullanılmaya başlanmıştır. Literatürdeki çalışmalar, bu yöntem ile her iki yöntemin

avantajlarını içeren ve daha üstün bir yöntem elde edildiğini göstermektedir. Bu çalışmada, q-ROFS, PFS ve q-RPFS ile GRA yöntemi entegre edilerek q-RPFGRA yöntemi önerilmiştir. Önerilen yöntemle amaçlanan, karar vericiye daha fazla esneklik sağlamak ve birleştirilen yöntemlerin avantajlarını bir araya getirerek daha geniş bir karar verme alanı sunan bir yöntem elde etmektir. Önerilen yöntemin elde edilme aşamaları Şekil 1'de sunulmuştur. Devamında, önerilen yöntemde kullanılan q-RPFGRA yöntemi açıklanmış, yöntem adımları verilmiş ve avantajları sıralanmıştır.

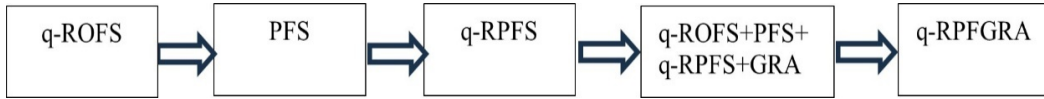
### 5.1. q-Rung Görüntü Bulanık Gri İlişkisel Analiz Yöntemi (q-Rung Picture Fuzzy Grey Relational Analysis Method)

Gri Sistem Teorisi ve bunun altında yer alan GRA yöntemi, ilk kez 1982 yılında Deng tarafından ortaya atılmıştır [52]. Griğin temel tanımı, bilginin eksik veya bilinmemesi durumudur. Eksik bir mesajdaki bir öge, gri öge olarak kabul edilir. Gri ilişki, iki sistem arasındaki veya bir sistemde zaman içinde meydana gelen iki öge arasındaki değişen ilişkilerin ölçümleri anlamına gelir [53]. Gri sistem teorisinde; beyaz tam olarak bilinen bilgiyi, siyah bilinmeyen bilgiyi ve gri bölge ise kısmen bilinen bilgiyi ifade eder. Buna göre, kesin olarak bilinmeyen bilgiye sahip sistemler siyah, kesin olarak bilinen bilgiyle sahip sistemler beyaz, kısmen bilinmeyen-bilinen bilgiye sahip sistemler ise gri sistemler olarak tanımlanır [54]. Gri Sistem Teorisi az ya da kesikli bilgi, çok veri ve belirsizlik olan durumlarda başvurulabilecek alternatif ve etkili bir yaklaşımdır.

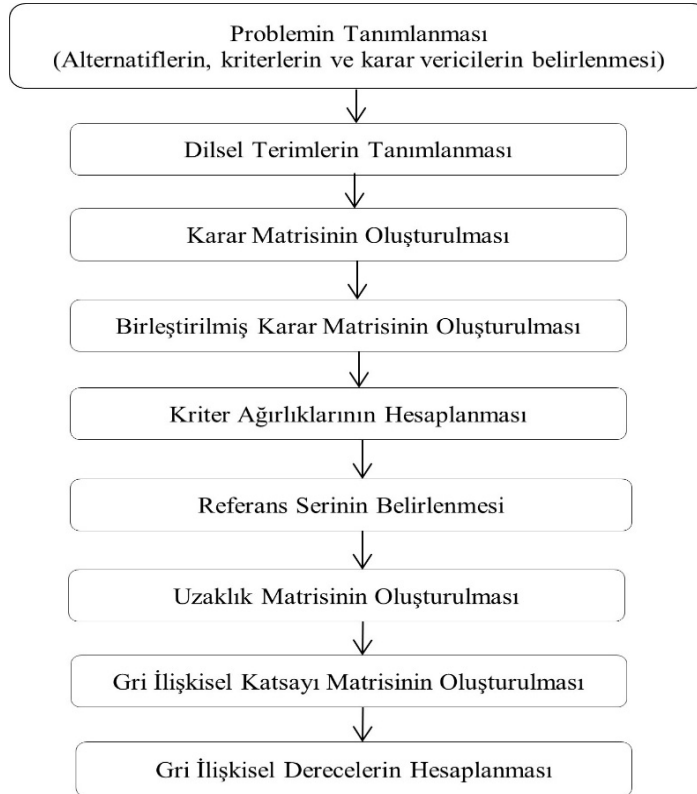
Çok değişkenli istatistiklerle hiçbir dağılıma uymayan, yeterli veri içermeyen veya belirsizlik nedeniyle modellenemeyen problemlerde gri sistem teorisi çözümü önerilmektedir. İki dizi arasındaki ilişkiyi sayısal ve mantıksal olarak ölçmek amacıyla GRA yöntemi kullanılabilir [55]. GRA, Gri Sistem Teorisinin tekniklerinden birisi olup her bir kriter ile kıyas yapılan referans serisi arasındaki ilişki derecesini belirlemeye yarayan bir yöntemdir. Kriterler arası etki derecesi ise gri ilişkisel derece olarak adlandırılır. GRA'nın diğer ÇKKV yöntemlerinden farkı ise referans seri kullanılabilmesidir. Referans seride söz konusu kriterin aldığı en küçük ya da en büyük değerler kullanılabilir gibi, duruma göre bunların dışında ideal değerler de kullanılabilir [56]. GRA, faktörler arasındaki ilişkilerin daha karmaşık olduğu karar problemlerine uygulanabilen kullanışlı bir yöntemdir. Birçok türde çok kriterli karar problemini çözmek için benzersiz ve/veya hibrit bir model olarak kullanılabilir. Yöntemin en önemli avantajı uygulama için küçük bir veri kümesinin yeterli olmasıdır.

Literatürde yer almayan q-RPFGRA yöntemi bu çalışmada tanıtılmıştır. Bu yöntem ile hem q-RPF hem de GRA'nın avantajına sahip olunması hedeflenmiştir. q-RPF sayılar için GRA yönteminin genişletilmesi Şekil 2'de gösterildiği gibi yapılmış olup yöntem dokuz adımdan oluşmaktadır.

*Adım 0. Problemin Tanımlanması:* Bir karar problemi tanımlanır. Bu probleme ait alternatifler ve kriterler oluşturulur. Probleme hakim, her



Şekil 1. Önerilen yöntemin elde edilme aşamaları (Obtaining stages of the proposed method)



Şekil 2. Önerilen yöntemin çerçevesi (Framework of the proposed method)

bir karar alternatifini belirlenen kriterlere göre değerlendirebilecek uzmanlar kümesi belirlenir.

*Adım 1. Dilsel Terimlerin Tanımlanması:* Alternatiflerin performansını belirlenen kriterler üzerinden değerlendirmek için dilsel bir kümenin belirlenmesi gerekir. Karar vericiler, karar matrisini oluştururken sayısal değerler yerine dilsel terimlerin kullanılmasını tercih ederler. Tercih edilen q-RPF sayılardan oluşan ölçek Tablo 2’de verilmiştir [46].

**Tablo 2.** q-RPF sayılar için dilsel terimler ve karşılık gelen bulanık sayılar (q-RPF linguistic terms for numbers and corresponding fuzzy numbers)

Dilsel Terimler	$(\phi_{ab}^r, \eta_{ab}^r, \psi_{ab}^r)$
Çok Yüksek (ÇY)	(0,85; 0,1; 0,15)
Yüksek (Y)	(0,75; 0,2; 0,25)
Orta Yüksek (OY)	(0,65; 0,3; 0,35)
Orta (O)	(0,55; 0,4; 0,45)
Orta Düşük (OD)	(0,35; 0,5; 0,65)
Düşük (D)	(0,25; 0,6; 0,75)
Çok Düşük (ÇD)	(0,15; 0,7; 0,85)

*Adım 2. Karar Matrisinin Oluşturulması:* ÇKKV’de amaç,  $K = (K_1, K_2, \dots, K_n)$  kriterler kümesi altında  $A = (A_1, A_2, \dots, A_m)$  alternatif kümesinde yer alan elemanlar arasından en iyisini seçmektir. En arzu edilen seçenekleri oluşturmak için t tane  $E_t = (E_1, E_2, \dots, E_t)$  karar uzmanından oluşan bir grup oluşturulmalıdır. Uzmanlar tarafından problem analiz edilerek dilsel terimlerden oluşan karar matrisi oluşturulur. Dilsel terimler q-RPF sayılara dönüştürülerek Eş. 8’deki  $D_E$  karar matrisi oluşturulur.

$$D_{E_r} = [d_{ab}^r]_{lxj} = \begin{bmatrix} d_{11}^r & d_{12}^r & \dots & d_{1j}^r \\ d_{21}^r & d_{22}^r & \dots & d_{2j}^r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{l1}^r & d_{l2}^r & \dots & d_{lj}^r \end{bmatrix} \quad (8)$$

Her bir uzman tarafından bir karar matrisi oluşturulur. Karar matrisinin her bir elemanı  $d_{ab}^r = (\phi_{ab}^r, \eta_{ab}^r, \psi_{ab}^r)$  kümesi şeklinde gösterilir. Bu küme; olumlu üyelik derecesi ( $\phi_{ab}^r$ ), tarafsız üyelik derecesi ( $\eta_{ab}^r$ ) ve olumsuz üyelik derecesinden ( $\psi_{ab}^r$ ) oluşur.

*Adım 3. Birleştirilmiş Karar Matrisinin Oluşturulması:* Uzmanların görüşleri q-rung görüntü bulanık ağırlıklı ortalama (q-RPFWA- q-Rung Picture Fuzzy Weighted Averaging) operatörü ile birleştirilir. Bu birleştirmenin yapılabilmesi için öncelikle karar vericilerin ( $E_r$ ) ağırlıklarının ( $\lambda_r$ ) Eş. 9 yardımıyla belirlenmesi gerekir. Uzmanların karar vermedeki önem derecesi Tablo 2 aracılığıyla belirlenir. Çalışmalarda q değeri 3 alınmaktadır.

$$\lambda_r = \frac{(1+\phi_r^q - \psi_r^q)}{\sum_{r=1}^t (1+\phi_r^q - \psi_r^q)} \text{ ve } \sum_{r=1}^t \lambda_r = 1 \quad (9)$$

q-RPFWA operatörü Eş. 10’da gösterilmiştir [8].

$$q - RPFWA = \left\{ \left( 1 - \prod_{r=1}^t (1 - (\phi_{ab}^r)^q)^{\lambda_r} \right)^{1/q}, \prod_{r=1}^t (\eta_{ab}^r)^{\lambda_r}, \prod_{r=1}^t (\psi_{ab}^r)^{\lambda_r} \right\} \quad (10)$$

Birleştirilmiş (aggregated) karar matrisi (AD) Eş. 11’deki gibi gösterilir.

$$AD = [d_{ab}]_{lxj} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1j} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{l1} & d_{l2} & \dots & d_{lj} \end{bmatrix} \quad (11)$$

*Adım 4. Kriter Ağırlıklarının Hesaplanması:* AD’nin her bir değeri Eş. 12 yardımıyla hesaplanır ve S matrisi Eş. 13’deki gibi gösterilir.

$$s = \frac{1+\phi^q - \eta^q - \psi^q}{3} \quad (12)$$

$$S = [s_{ab}]_{lxj} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1j} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{l1} & s_{l2} & \dots & s_{lj} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Kriterlerin ağırlık değerleri Entropi yöntemiyle hesaplanır. S matrisinin her bir elemanı Eş. 14 ile normalize edilir.

$$r_{ab} = \frac{s_{ab}}{\sum_{a=1}^l s_{ab}} \quad (14)$$

Normalizasyon işlemi sonrasında  $R = [r_{ab}]_{lxj}$  matrisi elde edilir. Kriterlere ait entropi değeri Eş. 15 yardımıyla hesaplanır.

$$E_b = -\frac{1}{(\log(l))} \sum_{a=1}^l r_{ab} \log(r_{ab}) \quad (b = 1, 2, \dots, j) \quad (15)$$

Burada  $E_b$ , j. kriterin entropi değerini göstermektedir ve  $0 \leq E_b \leq 1$  arasında yer almaktadır. Daha sonra bilginin farklılaşma derecesi ( $d_b$ ) Eş. 16 yardımıyla hesaplanır.

$$d_b = 1 - E_b \quad (b = 1, 2, \dots, j) \quad (16)$$

Hesaplanan  $d_b$  değerlerinin yüksek olması kriterlere ilişkin alternatif değerleri arasında karşıtlığın yoğunluğunu başka bir deyişle farklılığın fazla olduğunu göstermektedir. Her bir kriterin ağırlık değeri Eş. 17 ile hesaplanır.

$$W_b = \frac{d_b}{\sum_{b=1}^j d_b} \quad (17)$$

Burada  $W_b$  değerleri  $0 < W_b < 1$  arasında yer alır ve  $\sum_{b=1}^j W_b = 1$  dir.

*Adım 5. Referans Serinin Belirlenmesi:* Kriterlerin fayda ( $K_b$ ) veya maliyet ( $K_c$ ) tipli olmasına göre her bir kriterle ait en iyi değerler belirlenerek referans seri ( $d_a^r$ ) oluşturulur. Her bir kriterin en iyi değerleri fayda kriteri için Eş. 18, maliyet kriteri ise Eş. 19 ile elde edilir.

$$d_a^r = \max_a \{d_{ab}\} = \left\{ \max_a \{\phi_{ab}\}, \min_a \{\eta_{ab}\}, \min_a \{\psi_{ab}\} \right\}; K \in K_b \text{ ise} \quad (18)$$

$$d_a^r = \min_a \{d_{ab}\} = \left\{ \min_a \{\phi_{ab}\}, \max_a \{\eta_{ab}\}, \max_a \{\psi_{ab}\} \right\}; K \in K_c \text{ ise} \quad (19)$$

*Adım 6. Uzaklık Matrisinin Oluşturulması:* Uzaklık matrisi ( $\Delta$ ), AD matrisindeki değerlerin referans serisinden olan uzaklıkları gösteren matristir. Her bir alternatifin ideal çözümden uzaklığı Eş. 20’de verilen Öklid uzaklık denklemi kullanılarak hesaplanır.

$$D_E(AD, d^r) = \left\{ \frac{1}{2} [((\phi_{ab})^q - (\phi_{ab}^r)^q)^2 + ((\eta_{ab})^q - (\eta_{ab}^r)^q)^2 + ((\psi_{ab})^q - (\psi_{ab}^r)^q)^2] \right\}^{1/2}, (a = 1, 2, \dots, l; b = 1, 2, \dots, j) \quad (20)$$

Adım 7. Gri İlişkisel Katsayı Matrisinin Oluşturulması: Eş. 21 yardımıyla G matrisi hesaplanır.

$$G = [g_{ab}]_{lxj} = \frac{\Delta_{min} + \xi \Delta_{max}}{\Delta_{ab} + \xi \Delta_{max}} \quad (21)$$

Burada  $\Delta_{min} = \min_a \min_b \Delta_{ab}$ ,  $\Delta_{max} = \max_a \max_b \Delta_{ab}$  ve  $\xi$  parametresi ayırıcı katsayı olarak isimlendirilir.  $\xi$  katsayısı [0,1] arasında bir değer alır. Hesaplamalarda genellikle  $\xi = 0.5$  alınır. Elde edilen G matrisi Eş. 22'deki gibi gösterilir.

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1j} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{l1} & g_{l2} & \dots & g_{lj} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Adım 8. Gri İlişkisel Derecelerin Hesaplanması: Her bir alternatif için Gri İlişkisel Derece ( $\Gamma_a$ ) Eş. 23 aracılığıyla hesaplanır.

$$\Gamma_a = \sum_{b=1}^j (w_b g_{ab}) \quad (a = 1, 2, \dots, l) \quad (23)$$

Kriter ağırlıkları 4.Adımda Entropi yöntemi aracılığıyla elde edilmiştir. Sıralama hesaplanan gri ilişkisel dereceye göre büyükten küçüğe doğru yapılır. Ele alınan problem seçim problemi ise ilk sırada yer alan karar alternatifi tercih edilir.

Önerilen yöntemin avantajları;

- q-RPS'nin gevşetilmiş kısıtlaması, olumlu üyeliğin, tarafsız üyeliğin ve olumsuz üyelik derecelerinin q. gücünün toplamının 1'e eşit veya daha az olması, bu yöntemin q-ROFS ve PFS'lerden daha yüksek kapasiteye sahip olduğunu göstermektedir.

- Önerilen q-RPFGRA yöntemi q-rung görüntü bulanık bilgisi altında gerçekleştirilmiştir.
- Karar vericilere değerlendirmelerini ifade etmeleri için daha fazla özgürlük sağlar ve ÇKKV sürecinde daha az bilgi kaybına yol açar.
- Yöntem GRA'nın sahip olduğu avantajları da içermektedir. Referans seri kullanılarak ilişki derecesini belirler. Az ya da kesikli bilgi, çok veri ve belirsizlik olan durumlarda başvurulabilecek alternatif ve etkili bir yaklaşımdır. Çok değişkenli istatistiklerle hiçbir dağılıma uymayan, yeterli veri içermeyen, belirsizlik nedeniyle modellenemeyen problemlerde kullanılır.
- Literatürde tüm q-RPF çalışmaları incelenmiş ve q-RPF'de GRA yönteminin kullanılmadığı tespit edilmiştir.
- q-RPFGRA yönteminin kullanımı pratik ve kolay olduğu söylenebilir.

### 6. Uygulama ve Bulgular (Application and Results)

Önerilen q-RPFGRA yöntemi, bir proje seçim örneğinde uygulanmıştır. Uygulama kapsamında, farklı senaryolar oluşturularak kriter ağırlıkları değiştirilmiş ve duyarlılık analizi yapılmıştır. Ayrıca, mevcut q-RPFS için kullanılan sekiz operatör proje örneğinde uygulanarak, önerilen yöntem ile elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Sonuç olarak; önerilen q-RPFGRA yönteminin uygulanabilir ve etkin olduğu belirlenmiştir.

#### 6.1. q-Rung Görüntü Bulanık Gri İlişkisel Analiz Yönteminin Uygulanması

(Application of the q-Rung Picture Fuzzy Grey Relational Analysis Method)

Adım 0. Problemin Tanımlanması:  $A_1, A_2, A_3, A_4$  ve  $A_5$  olmak üzere beş projeden en iyisini seçmek amacıyla, üç karar verici ( $E_1, E_2, E_3$ ) alternatifleri dört fayda kriterine göre değerlendirmiştir. Bu kriterler; ekonomik faydalar ( $K_1$ ), sosyal faydalar ( $K_2$ ), sürdürülebilir faydalar ( $K_3$ ) ve ekolojik faydalar ( $K_4$ ) dir. Uygulamada  $q=3$  alınmıştır [4].

Adım 1. Dilsel Terimlerin Tanımlanması: Sonuçların karşılaştırılabilmesi için He vd, [4] çalışmasındaki aynı veriler kullanılmıştır. Tablo 3'deki uzmanlar için verilen dilsel değişkenler,

**Tablo 3.** Karar uzmanlarının önemi ve ağırlıkları (Importance and weight of decision experts)

	$E_1$	$E_2$	$E_3$
Dilsel değişkenler	Orta (O)	Düşük (D)	Yüksek (Y)
q-ROF sayıları	(0,55; 0,4; 0,45)	(0,25; 0,6; 0,75)	(0,75; 0,2; 0,25)
Ağırlıklar	0,35	0,19	0,46

**Tablo 4.** Karar verici (KV) uzmanlarının karar matrisleri, birinci uzman (KV1), ikinci uzman (KV2), üçüncü uzman (KV3) (Decision matrices of decision maker (DM) experts, first expert (KV1), second expert (KV2), third expert (KV3))

	K1			K2			K3			K4		
	$\phi_{ab}^r$	$\eta_{ab}^r$	$\psi_{ab}^r$	$\phi_{ab}^r$	$\eta_{ab}^r$	$\psi_{ab}^r$	$\phi_{ab}^r$	$\eta_{ab}^r$	$\psi_{ab}^r$	$\phi_{ab}^r$	$\eta_{ab}^r$	$\psi_{ab}^r$
KV1												
A1	0.5	0.4	0.1	0.8	0.1	0.1	0.4	0.3	0.2	0.1	0.8	0.1
A2	0.7	0.1	0.1	0.1	0.7	0.2	0.1	0.7	0.2	0.7	0.1	0.1
A3	0.8	0.1	0.1	0.1	0.8	0.1	0.1	0.8	0.1	0.6	0.2	0.1
A4	0.7	0.1	0.1	0.7	0.2	0.1	0.1	0.7	0.1	0.1	0.8	0.1
A5	0.7	0.2	0.1	0.6	0.2	0.1	0.8	0.1	0.1	0.1	0.7	0.1
KV2												
A1	0.5	0.3	0.1	0.8	0.1	0.1	0.5	0.1	0.3	0.1	0.8	0.1
A2	0.6	0.1	0.2	0.2	0.5	0.2	0.2	0.6	0.1	0.6	0.2	0.1
A3	0.8	0.1	0.1	0.1	0.7	0.1	0.2	0.6	0.1	0.6	0.1	0.2
A4	0.8	0.1	0.1	0.7	0.1	0.2	0.2	0.6	0.1	0.5	0.3	0.1
A5	0.6	0.1	0.1	0.8	0.1	0.1	0.6	0.3	0.1	0.1	0.8	0.1
KV3												
A1	0.7	0.2	0.1	0.3	0.5	0.1	0.8	0.1	0.1	0.5	0.3	0.1
A2	0.1	0.7	0.1	0.5	0.2	0.2	0.8	0.1	0.1	0.7	0.1	0.2
A3	0.5	0.2	0.2	0.3	0.5	0.1	0.1	0.7	0.1	0.6	0.2	0.1
A4	0.7	0.2	0.1	0.2	0.7	0.1	0.5	0.2	0.3	0.3	0.5	0.1
A5	0.5	0.2	0.1	0.6	0.2	0.1	0.7	0.1	0.1	0.2	0.7	0.1

önceki bölümde (Tablo 2) yer alan q-RPF sayıları kullanılarak belirlenmiştir.

**Adım 2. Karar Matrisinin Oluşturulması:** Karar vericilerin değerlendirmeleri Tablo 2’deki q-RPF sayıları kullanılarak yapılmış, bir  $A^b = (\alpha_{ij}^b)_{5 \times 4}$  karar matrisi elde edilmiştir. Bu matris Tablo 4’te gösterilmiştir.

**Adım 3. Birleştirilmiş Karar Matrisinin Oluşturulması:** Eş. 10’da verilen q-RPFWA operatörü kullanılarak AD matrisinin değerleri Tablo 5’deki gibi elde edilmiştir.

**Adım 4. Kriter Ağırlıklarının Hesaplanması:** Kriter ağırlıkları Eş. 12-17 denklemleri kullanılarak elde edilmiştir. Burada normalizasyon işleminden sonra elde edilen R matrisi Eş. 24’de, kriterlerin entropi değerleri Eş. 25’de ve bilginin farklılaşma derecesi Eş. 26’da gösterilmiştir.

$$R = [r_{ab}]_{lxj} = \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0,191 & 0,238 & 0,234 & 0,186 \\ 0,184 & 0,181 & 0,225 & 0,265 \\ 0,215 & 0,138 & 0,115 & 0,243 \\ 0,218 & 0,212 & 0,179 & 0,178 \\ 0,193 & 0,231 & 0,248 & 0,128 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$E_b = (0,998; 0,988; 0,020; 0,019) \quad (25)$$

$$d_b = (0,027; 0,215; 0,387; 0,371) \quad (26)$$

Problemde kriterlerin ağırlık vektörü  $w = (0,027; 0,215; 0,387; 0,371)^T$ , uzmanların ağırlık vektörü  $\bar{w} = (0,35; 0,19; 0,46)^T$  dir.

**Adım 5. Referans Serinin Belirlenmesi:** Problemde verilen kriterlerin hepsi fayda ( $K_b$ ) tiplidir. Her bir kritere ait en iyi değerler belirlenerek referans seri ( $d_b^r$ ) Eş. 18 kullanılarak oluşturulmuştur. Buna göre her bir kriterin en iyi değerleri  $d_b^r = \{(0,738; 0,127; 0,1), (0,724; 0,162; 0,1), (0,721; 0,140; 0,1), (0,674; 0,123; 0,1)\}$  şeklinde elde edilmiştir.

**Adım 6. Uzaklık Matrisinin Oluşturulması:** Her bir alternatifin ideal çözümden uzaklığı Öklid uzaklık denklemi Eş. 20 kullanılarak hesaplanmıştır. Ortaya çıkan Uzaklık Matrisi  $D_E$  Eş. 27’de görüldüğü gibidir:

**Adım 7. Gri İlişkisel Katsayı Matrisi:**  $\xi = 0,5$ ,  $\Delta_{min} = 0$ ,  $\Delta_{max} = 0,372$  alınarak Eş. 21 yardımıyla G matrisi Eş. 28’deki gibi oluşturulmuştur.

$$D_E(AD, d^r) = \begin{bmatrix} 0,105 & 0,003 & 0,052 & 0,206 \\ 0,144 & 0,194 & 0,076 & 0,001 \\ 0,012 & 0,283 & 0,372 & 0,074 \\ 0,000 & 0,089 & 0,234 & 0,226 \\ 0,109 & 0,033 & 0,000 & 0,344 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0,640 & 0,986 & 0,782 & 0,474 \\ 0,564 & 0,490 & 0,709 & 0,994 \\ 0,939 & 0,397 & 0,333 & 0,716 \\ 1,000 & 0,675 & 0,443 & 0,451 \\ 0,630 & 0,850 & 1,000 & 0,351 \end{bmatrix} \quad (28)$$

**Adım 8. Gri İlişkisel Derecelerin Hesaplanması:** Her bir alternatif için  $\Gamma_a$ , Eş. 23 kullanılarak Eş. 29’daki gibi hesaplanmıştır. Kriterlerin ağırlık vektörü  $w = (0,027; 0,215; 0,387; 0,371)^T$  dir.

$$\Gamma_a = \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0,708 \\ 0,764 \\ 0,505 \\ 0,511 \\ 0,717 \end{bmatrix} \quad (29)$$

Hesaplanan gri ilişkisel dereceye göre büyükten küçüğe doğru sıralama yapıldığında;  $A_2 > A_5 > A_1 > A_4 > A_3$  elde edilmiştir. Elde edilen bu sıralama, q-RPFGRA yöntemi kullanılarak belirlenmiştir. Hesaplanan kriter ağırlıklarının alternatiflerin sıralamasına etkisini incelemek için 6 farklı senaryo oluşturularak duyarlılık analizi yapılmıştır. Bu senaryolar, problemdeki 4 kriterin ikili kombinasyonları kullanılarak üretilmiştir. Devamında q-RPFS için kullanılan mevcut 8 operatör proje seçim örneği için uygulanmış ve önerilen yöntem ile sonuçlar karşılaştırılmıştır. Borda yöntemi ile bütünlüklük bir sıralama elde edilmiştir.

6.2. Duyarlılık Analizi (Sensitivity Analysis)

Hesaplanan kriter ağırlıklarının alternatiflerin sıralamasına etkisi farklı senaryoların ikili olarak kriter ağırlıkları değiştirilerek üretilmiş ve analiz edilmiştir. Problemdeki 4 kriter için farklı kriterlerin ikili kombinasyonu kullanılarak 6 farklı senaryo (S1, S2, ..., S6) oluşturulmuştur. İlk senaryoda en önemli iki kriter (K3, K4) %10 azaltılmış, ikinci senaryoda orijinal durumdaki en zayıf iki kriterin önem ağırlıkları (K1, K2) önem ağırlıkları %10 artırılmış, üçüncü senaryoda ilk iki senaryodaki durumlar aynı anda uygulanmış, dördüncü senaryoda en önemli iki kriter (K3, K4) %20 azaltılmış, beşinci senaryoda orijinal durumdaki en zayıf iki kriterin önem ağırlıkları (K1, K2) önem ağırlıkları %20 artırılmış, altıncı senaryoda

**Tablo 5.** Birleştirilmiş karar matrisi değerleri (Values of the aggregated decision matrix)

	K1			K2			K3			K4		
	$\phi_{ab}^r$	$\eta_{ab}^r$	$\psi_{ab}^r$	$\phi_{ab}^r$	$\eta_{ab}^r$	$\psi_{ab}^r$	$\phi_{ab}^r$	$\eta_{ab}^r$	$\psi_{ab}^r$	$\phi_{ab}^r$	$\eta_{ab}^r$	$\psi_{ab}^r$
A1	(0,615	0,276	0,100)	(0,692	0,209	0,100)	(0,680	0,147	0,158)	(0,390	0,511	0,100)
A2	(0,561	0,243	0,114)	(0,394	0,370	0,200)	(0,655	0,279	0,127)	(0,684	0,114	0,137)
A3	(0,713	0,137	0,137)	(0,235	0,629	0,100)	(0,133	0,712	0,100)	(0,600	0,175	0,114)
A4	(0,724	0,137	0,100)	(0,591	0,310	0,114)	(0,394	0,383	0,165)	(0,336	0,534	0,100)
A5	(0,608	0,175	0,100)	(0,658	0,175	0,100)	(0,729	0,124	0,100)	(0,161	0,718	0,100)

**Tablo 6.** Farklı senaryolar için kriter ağırlıkları (Criteria weights for different scenarios)

	S0	S1	S2	S3	S4	S5	S6
K1	0,027	0,027	0,030	0,030	0,027	0,033	0,033
K2	0,215	0,215	0,236	0,236	0,215	0,258	0,258
K3	0,387	0,348	0,387	0,3482	0,310	0,387	0,310
K4	0,371	0,333	0,371	0,333	0,296	0,371	0,296

ilk iki senaryodaki durumlar aynı anda uygulanmıştır. Orijinal durum "S0" ile gösterilmiştir. Senaryolar için kriter ağırlıkları Tablo 6'da verilmektedir.

Şekil 3'te gösterilen duyarlılık analizi sonucuna göre altı senaryoya göre en iyi projenin Proje 2 olduğu görülmektedir. Sonuçlar önerilen metodolojinin sağlam bir performans sağladığını kanıtlamıştır.

### 6.3. Karşılaştırmalı Analiz (Comparative Analysis)

Literatürde q-RPFS için kullanılan operatörler aşağıdaki gibidir.

- He vd. [4] önerdiği, q-RPFDWA (q-RPF Dombi weighted average) operatörü
- He vd. [4] önerdiği, q-RPFDWG (q-RPF Dombi weighted geometric) operatörü
- Akram ve Shumaiza [50] önerdiği, q-RPFWG (q-RPF weighted geometric) operatörü
- Akram vd.[34] önerdiği, q-RPFWEA (q-RPF Einstein weighted averaging) operatörü
- Kausar vd. [38] önerdiği, q-RPFDEWA (q-RPF dynamic Einstein weighted geometric) operatörü
- Kausar vd. [38] önerdiği, q-RPFDEWG (q-RPF dynamic Einstein weighted geometric) operatörü
- Feng ve Guan [39] önerdiği, q-RPFSSWMSM (q-RPF Schweizer-Sklar weighted Maclaurin symmetric mean) operatörü
- Feng ve Guan [39] önerdiği, q-RPFSSGWMSM (q-RPF Schweizer-Sklar weighted generalized Maclaurin symmetric mean) operatörü.

q-RPFGRA yöntemi ve q-RPFWA operatörünü, farklı operatörlere dayalı mevcut yöntemlerle karşılaştırmak için beş projenin sıralaması

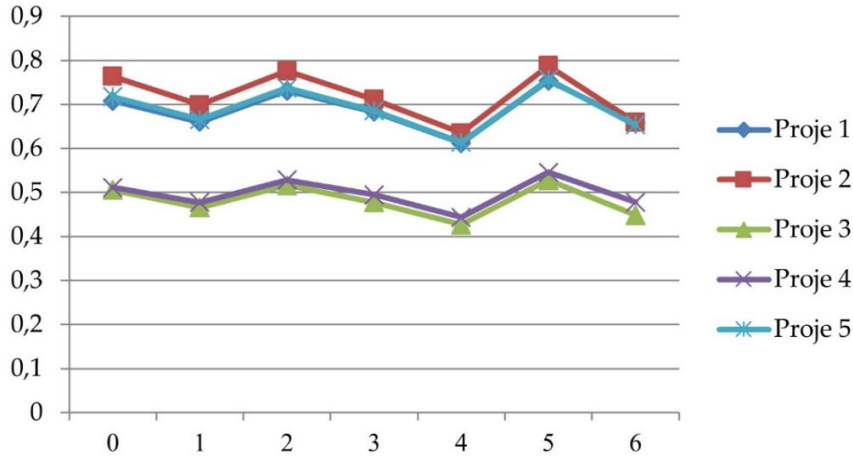
yukarıda belirtilen operatörler kullanılarak bulunmuştur. Problemden kriterlerin ağırlık vektörü  $w = (0,027; 0,215; 0,387; 0,371)^T$ , uzmanların ağırlık vektörü  $\bar{w} = (0,35; 0,19; 0,46)^T$  dir.  $q=3$  alınmıştır. Sonuçlar Tablo 7'de verilmiştir.

Önerilen q-RPFGRA yönteminde q-RPFWA operatörü ile elde edilen sıralama  $A_2 > A_5 > A_1 > A_4 > A_3$  idi. Tablo 7'de problemin farklı operatörler kullanılarak elde edilen sıralama sonuçları karşılaştırılırsa, operatörlerin ilk iki tercihi ile önerilen yöntemin ilk iki tercihi bir operatör hariç aynı çıkmıştır. Son iki tercih ise beş operatörde aynı projeler yer alırken dört operatörün de son iki tercihten birinin diğer operatörlerle aynı olduğu görülmektedir. Önerilen q-RPFGRA yöntemi ve diğer yöntemlerde ilk iki proje aynı olduğu için yöntemin uygulanabilir ve etkin olduğu sonucuna ulaşılabilir.

Borda yöntemi ile sekiz operatör kullanılarak elde edilen sıralamalar bütünleştirilerek bütünsel bir sıralama elde edilmiştir. Yöntemde sıralama için kullanılan her yöntemin eşit önem derecesinde olduğu kabul edilir. Sıralanan m adet alternatifin birincisine m-1, ikincisine m-2, üçüncüsüne m-3, n.sine m-n şeklinde birer azalan değer verilerek 0 değeri de alacak şekilde puanlama yapılır [57].

Borda skor değeri toplam alternatif sayısından k.kriter altındaki i.alternatif sırasından çıkarılan skorların toplamıdır ( $b_i = \sum_m^n (M - r_{ik})$ ). Sıralama en yüksek skordan en düşük skor değerine doğrudur. Beş alternatif için kullanılan sekiz operatör için Borda yöntemi uygulanmış ve sonuç Tablo 8'de verilmiştir.

Tablo 8'de verilen bütünsel sıralama sonucunda en yüksek Borda değerine sahip alternatif A5'tir. En düşük ve son sırada yer alan alternatif ise Alternatif 4 olmuştur.



Şekil 3. Projelerin altı senaryo üzerinden duyarlılık analizi (Sensitivity analysis of projects for six scenarios)

Tablo 7. Proje seçim örneği için yapılan uygulamalar ve sıralama (Applications and sequencing for project selection example)

SN	Operatör	q-RPF GRA-Sıralama
1	q-RPFDWA $\lambda = 2$	$A_4 > A_2 > A_1 > A_3 > A_5$
2	q-RPFDWG $\lambda = 2$	$A_5 > A_2 > A_3 > A_1 > A_4$
3	q-RPFWG	$A_5 > A_2 > A_3 > A_1 > A_4$
4	q-RPFWEA	$A_5 > A_2 > A_1 > A_3 > A_4$
5	q-RPFDEWA	$A_5 > A_2 > A_1 > A_3 > A_4$
6	q-RPFDEWG	$A_5 > A_1 > A_2 > A_4 > A_3$
7	q-RPFSSWMSM	$A_5 > A_2 > A_1 > A_4 > A_3$
8	q-RPFSSGWMSM	$A_5 > A_2 > A_1 > A_3 > A_4$

**Tablo 8.** Borda yöntemi sonucu alternatiflerin sıralaması (Ranking of alternatives as a result of Borda method)

SN	Operatör	A1	Borda Puan	A2	Borda Puan	A3	Borda Puan	A4	Borda Puan	A5	Borda Puan
1	q-RPFDWA	3	2	2	3	4	1	1	4	5	0
2	q-RPFDWG	4	1	2	3	3	2	5	0	1	4
3	q-RPFWG	4	1	2	3	3	2	5	0	1	4
4	q-RPFEWA	3	2	2	3	4	1	5	0	1	4
5	q-RPFDEWA	3	2	2	3	4	1	5	0	1	4
6	q-RPFDEWG	2	3	3	2	5	0	4	1	1	4
7	q-RPFSSWMSM	3	2	2	3	5	0	4	1	1	4
8	q-RPFSSGWMSM	3	2	2	3	4	1	5	0	1	4
Borda Puan Toplamı		15		23		8		6		28	
Sıra		3		2		4		5		1	

## 7. Sonuçlar (Conclusions)

q-RPFS literatürü incelenmiştir. Mevcut çalışmalarda çeşitli yenilikler ve genişletmeler yapıldığı, bu genişletmelerin kullanılan yöntemlerin avantajlarını içerdiği görülmüştür. Bu çalışma kapsamında, literatürde kullanılmadığı tespit edilen q-RPFGRA yöntemi tanıtılmıştır. Önerilen yöntem, karşılaştırılma amacıyla He vd. [4]'nin proje seçim örneğinin verileri kullanılarak test edilmiştir. Bu örnek üç karar vericinin dört alternatif kriterine göre beş proje arasından en iyisini seçme ve projeleri sıralama sürecini içermektedir. Önerilen q-RPFGRA yönteminin uygulanması sonucunda proje sıralaması ( $A_2 > A_5 > A_1 > A_4 > A_3$ ) olarak elde edilmiştir. Ayrıca kriter ağırlıklarının projelerin değerlendirilmesi üzerindeki etkisini incelemek amacıyla altı farklı senaryo oluşturularak duyarlılık analizi yapılmıştır. Bu analizler, önerilen metodolojinin sağlam bir performans sağladığı görülmüştür. Aynı örnek kullanılarak q-RPFGRA'de kullanılan operatör ile mevcut q-RPFS için kullanılan sekiz farklı operatör (q-RPFDWA, q-RPFDWG, q-RPFWG, q-RPFEWA, q-RPFDEWA, q-RPFDEWG, q-RPFSSWMSM, q-RPFSSGWMSM) karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonucunda operatörlerin ilk iki tercihi ile önerilen yöntemde kullanılan operatörün ilk iki tercihi bir operatör hariç aynı çıkmıştır. Bundan dolayı önerilen yöntemin etkili olduğu ve ÇKKV problemlerini ele almak için uygun olduğu belirlenmiştir. Literatürde q-RPFS'de kullanılmadığı görülen Borda yöntemi ile sekiz operatör kullanılarak elde edilen sıralamalar bütünleştirilmiş ve tek bir bütünlük sıralama elde edilmiştir.

q-RPFS'nin genişletilmesi sonucunda elde edilen avantajlarından yararlanmak için daha önce kullanılmayan GRA eklenerek genişletme çalışması yapılmıştır. q-RPFS'nin bulanıklığı modellemeye daha yüksek kapasitede olması, belirsiz bilgiyi ifade etmedeki üstünlüğü ve karar vericiye sunduğu esneklik avantajları ile GRA'nın farklı değişkenler arasındaki ilişkiyi incelemesi, belirsizliği ve karmaşıklığı azaltması avantajı birleştirilerek q-RPFGRA yöntemi önerilmiştir. Bu sayede yöntem, hem q-RPFS hem de GRA'nın avantajlarını içermektedir. Yöntemin kullanımının diğer yöntemlere göre daha kolay ve pratik olduğu söylenebilir.

Önerilen yöntemin literatürdeki farklı operatörlerle karşılaştırılması sonucunda yöntemin etkinliği ve uygulanabilirliği gösterilmiştir. Gelecekteki çalışmalarda ÇKKV problemlerini çözmek için önerilen yöntem farklı alanlarda uygulanabilir.

## Kaynaklar (References)

1. Zadeh L.A., Fuzzy Sets, Information and control, 8 (3), 338-353, 1965.
2. Makkar R., Application of fuzzy logic: A literature review, International Journal of Statistics and Applied Mathematics, 3 (1), 357-359, 2018.

3. Li L., Zhang R., Wang J., Shang X., Bai K., A Novel Approach to Multi-Attribute Group Decision-Making with q-Rung Picture Linguistic Information, Symmetry, 10 (5), 172, 2018.
4. He J., Wang X., Zhang R., Li L., Some q-Rung Picture Fuzzy Dombi Hamy Mean Operators with Their Application to Project Assessment, Mathematics, 7, 468, 2019.
5. Yager R.R., Generalized orthopair fuzzy sets, IEEE Trans- 1251 actions on Fuzzy Systems 25, 1222–1230, 2016.
6. Xing Y., Zhang R., Wang J., Bai K., Xue J., A new multi-criteria group decision-making approach based on q-rung orthopair fuzzy interaction Hamy mean operators, Neural Computing and Applications, 32, 7465–7488, 2020.
7. Fahmi A., Aslam M., Projected decision background based on q-rung orthopair triangular fuzzy aggregation operators, Granular Computing, 6, 931–941, 2021.
8. Akram M., Shahzadi G., A hybrid decision-making model under q-rung orthopair fuzzy Yager aggregation operators, Granular Computing, 6, 763–777, 2021.
9. Yang Z., Garg H., Li J., Srivastava G., Cao Z., Investigation of multiple heterogeneous relationships using a q-rung orthopair fuzzy multi-criteria decision algorithm, Neural Computing and Applications, 33, 10771–10786, 2021.
10. Long Y., Liao H., A social participatory allocation network method with partial relations of alternatives and its application in sustainable food supply chain selection, Applied Soft Computing 109, 107550, 2021.
11. Türkarslan E., Ünver M., Olgun M., q-Rung Orthopair Fuzzy Topological Spaces, Lobachevskii Journal of Mathematics, 42 (2), 470–478, 2021.
12. Li L., Ji C., Wang J., A Novel Multi-attribute Group Decision-Making Method Based on q-Rung Dual Hesitant Fuzzy Information and Extended Power Average Operators, Cognitive Computation, 13, 1345–1362, 2021.
13. Verma R., Generalized similarity measures under linguistic q-rung orthopair fuzzy environment with application to multiple attribute decision making, Granular Computing, 7, 253-275, 2021.
14. Arya V., Kumar S., Multi-criteria decision making problem for evaluating ERP system using entropy weighting approach and q-rung orthopair fuzzy TODIM, Granular Computing, 6, 977–989, 2021.
15. Mahmood T., Ali Z., Entropy measure and TOPSIS method based on correlation coefficient using complex q-rung orthopair fuzzy information and its application to multi-attribute decision making, Soft Computing, 25, 1249–1275, 2021.
16. Yang Z., Garg H., Interaction Power Partitioned Maclaurin Symmetric Mean Operators under q-Rung Orthopair Uncertain Linguistic Information, International Journal of Fuzzy Systems, 24, 1079-1097, 2021.
17. Albahri A.S., Albahri O.S., Zaidan A.A., Alnoor A., Alsattar H.A., Mohammed R., Alamoodi A.H., Zaidan B.B., Aickelin U., Alazab M., Garfan S., Ahmaro I.Y.Y., Ahmed M.A., Integration of fuzzy-weighted zero-inconsistency and fuzzy decision by opinion score methods under a q-rung orthopair environment: A distribution case study of COVID-19 vaccine doses, Computer Standards & Interfaces 80, 103572, 2022.
18. Akram M., Habib A., Koam A.N.A., A Novel Description on Edge-Regular q-Rung Picture Fuzzy Graphs with Application, Symmetry, 11, 489, 2019.

19. Luqman A., Akram M., Koam A.N., Granulation of Hypernetwork Models under the q-Rung Picture Fuzzy Environment, *Mathematics*, 7 (6), 496, 2019.
20. Akram M., Habib A., q-rung picture fuzzy graphs: a creative view on regularity with applications, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 61, 235–280, 2019.
21. Akram M., Dudek W.A., Habib A., Al-Kenani A.N., Imperfect competition models in economic market structure with q-rung picture fuzzy information, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 38 (4), 5107-5126, 2020.
22. Liu P., Shahzadi G., Akram M., Specific Types of q-Rung Picture Fuzzy Yager Aggregation Operators for Decision-Making, *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 13 (1), 1072–1091, 2020.
23. Yang Z., Li X., Garg H., Peng R., Wu S., Huang L., Group Decision Algorithm for Aged Healthcare Product Purchase Under q-Rung Picture Normal Fuzzy Environment Using Heronian Mean Operator, *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 13 (1), 1176–1197, 2020.
24. Akram M., Luqman A., Granular Computing Based on q-Rung Picture Fuzzy Hypergraphs, *Fuzzy Hypergraphs and Related Extensions, Studies in Fuzziness and Soft Computing (STUDFUZZ)*, Eds. Janusz Kacprzyk, 390, 307–337, 2020.
25. Pinar A., Boran F.E., A novel distance measure on q-rung picture fuzzy sets and its application to decision making and classification problems, *Artificial Intelligence Review*, 55, 1317-1350, 2021.
26. Akram M., Bashir A., Edalatpanah S.A., A hybrid decision-making analysis under complex q-rung picture fuzzy Einstein averaging operators, *Computational and Applied Mathematics*, 40, 305, 2021.
27. Sitara M., Akram M., Riaz M., Decision-making analysis based on q-rung picture fuzzy graph structures, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 67, 541–577, 2021.
28. Yang Z., Li X., Garg H., Qi M., A Cognitive Information-Based Decision-Making Algorithm Using Interval-Valued q-Rung Picture Fuzzy Numbers and Heronian Mean Operators, *Cognitive Computation*, 13, 357–380, 2021.
29. Silambarasan I., q-Rung Picture Fuzzy Matrices, *Bull. Int. Math. Virtual Inst.*, 11 (3), 569-582, 2021.
30. Akram M., Shahzadi G., Alcantud J.C.R., Multi-attribute decision-making with q-rung picture fuzzy information, *Granular Computing*, 7, 197-215, 2022.
31. Sitara M., Zafar F., Selection of best inter-country airline service using q-rung picture fuzzy graph structures, *Computational and Applied Mathematics*, 41, 2022.
32. Akram M., Khan A., Ahmad U., Alcantud J.C.R., Al-Shamiri M.M.A., A new group decision-making framework based on 2-tuple linguistic complex q-rung picture fuzzy sets, *Mathematical Biosciences and Engineering*, 19 (11), 11281–11323, 2022.
33. Kamaçi H., Petchimuthu S., Tanimoto Similarity Coefficients Measuring Bipolar q-Rung Picture Fuzzy Information and Their Applications, *Handbook of Research on Advances and Applications of Fuzzy Sets and Logic*, Said Broumi, Editör, IGI Global Publisher, Pennsylvania, 258-287, 2022.
34. Kausar R., Farid H.M.A., Riaz M., Božanic D., Cancer Therapy Assessment Accounting for Heterogeneity Using q-Rung Picture Fuzzy Dynamic Aggregation Approach, *Symmetry*, 14, 2538, 2022.
35. Feng M., Guan H., Some Novel Maclaurin Symmetric Mean Operators For q-Rung Picture Fuzzy Numbers and Their Application to Multiple Attribute Group Decision Making, *IEEE Access (Early Access)*, 11, 50710-50743, 2023.
36. Ali S., Ali A., Azim A.B., Aloqaily A., Mlaiki N., Averaging aggregation operators under the environment of q-rung orthopair picture fuzzy soft sets and their applications in MADM problems, *AIMS Mathematics*, 8 (4), 9027–9053, 2023.
37. Akram M., Khan A., Luqman A., Senapati T., Pamucar D., An extended MARCOS method for MCGDM under 2-tuple linguistic q-rung picture fuzzy environment, *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 120, 105892, 2023.
38. Khan A., Ahmad U., Farooq A., Al-Shamiri M.M.A., Combinative distance-based assessment method for decision-making with 2-tuple linguistic q-rung picture fuzzy sets, *AIMS Mathematics*, 8 (6), 13830–13874, 2023.
39. Sirbiladze G., Kacprzyk J., Midodashvili B., Khachidze M., Midodashvili L., Parshuthin I., Possibilistic simulation based interactive fuzzy MAGDM under discrimination q-rung picture linguistic information, *Application in educational programs efficiency evaluation, Engineering Applications of Artificial Intelligence* 123, 106278, 2023.
40. Dhumras H., Bajaj R.K., On potential strategic framework for green supply chain management in the energy sector using q-rung picture fuzzy AHP & WASPAS decision-making model, *Expert Syst. Appl.*, 121550, 2024.
41. Albahri O.S., Alamoody A.H., Deveci M., Albahri A.S., Mahmood M.A., Al-Quraishi T., Moslem S., Sharaf I.M., Evaluation of organizational culture in companies for fostering a digital innovation using q-rung picture fuzzy based decision-making model, *Advanced Engineering Informatics* 58, 102191, 2023.
42. Ahmad U., Khan A., Saelid A.B., Integrated multi-criteria group decision-making methods based on q-rung picture fuzzy sets for the identification of occupational hazards, *Soft Computing*, 2023.
43. Chitra R., Prabakaran K., Employing q-rung picture fuzzy Frank accumulation operators for decision-making strategy, *J. Intell. Fuzzy Syst.*, 44, 9709-9721, 2023.
44. Ahmad U., Khan A., Shhazadi S., Extended ELECTRE I method for decision-making based on 2-tuple linguistic q-rung picture fuzzy sets, *Soft Computing*, 2024.
45. Sun, M., Gen, Y., Zhao, J., Multi-Attribute Group Decision-Making Methods Based on Entropy Weights with q-Rung Picture Uncertain Linguistic Fuzzy Information, *Symmetry*, 15 (11), 2027, 2023.
46. Akram, M., Shumaiza, Multi-criteria decision-making methods based on q-rung picture fuzzy information, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems* 40, 10017–10042, 2021.
47. Sirbiladze, G., Associated Probabilities in Interactive MADM under Discrimination q-Rung Picture Linguistic Environment, *Mathematics*, 9 (18), 2337, 2021.
48. Wang R., Li Y., A Novel Approach for Green Supplier Selection under a q-Rung Orthopair Fuzzy Environment, *Symmetry*, 10 (12), 687, 2018.
49. Liu P., Wang P., Some q-Rung Orthopair Fuzzy Aggregation Operators and their Applications to Multiple-Attribute Decision Making, *International Journal of Intelligent Systems*, 33 (2), 259-280, 2018.
50. Cuong B.C., Picture Fuzzy Sets, *Journal of Computer Science and Cybernetics*, 30 (4), 409-420, 2014.
51. Du Y., Hou F., Zafar W., Yu Q., Zhai Y., A novel method for multiattribute decision making with interval-valued Pythagorean fuzzy linguistic information, *International Journal of Intelligent Systems*, 32 (10), 1085–1112, 2017.
52. Deng, J., Introduction to Grey System Theory, *The Journal of Grey System*, 1, 1–24, 1989.
53. Feng C.M., Wang R.T., Performance evaluation for airlines including the consideration of financial ratios. *Journal of Air Transport Management*, 6 (3), 133-142, 2000.
54. Akram M., Shumaiza, Multi-criteria decision-making methods based on q-rung picture fuzzy information, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems* 40, 10017–10042, 2021.
55. Hsiao S.W., Tsai H.C., Use of gray system theory in product-color planning, *Color Research & Application*, 29 (3), 222-231, 2004.
56. Ayaydın H., Durmuş S., Türk Lojistik Firmalarında Performans Ölçümü: Gri İlişkisel Analiz Yöntemi, *Gümüşhane Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü*, 8 (21), 886, 2015.
57. Akyüz G., Aka S., Çok kriterli karar verme teknikleriyle tedarikçi performansı değerlendirmede toplamsal bir yaklaşım, *Yönetim ve Ekonomi Araştırmaları Dergisi*, 15 (2), 28-46, 2017.