SDU International Journal of Technological Science
Vol. 9, No 1, April 2017
pp. 47-70

Computational Technologies

FİBER TAKVİYELİ PİEZOELEKTRİK KOMPOZİTLERİN ELEKRO-TERMOELASTİK ANALİZİ İÇİN MATEMATİKSEL BİR MODEL

Melek USAL [*], Selim DEMİRTÜRK
Geliş Tarihi/ Received: 29.01.2017, Kabul tarihi/Accepted: 26.04.2017

Özet

Bu çalışma, fiber takviyeli ve piezoelektrik özelliğe sahip bir kompozit malzemenin lineer elektro-termoelastik analizi için bünye denklemlerinin geliştirilmesini amaçlamaktadır. Fiber takviyeli kompozit ortamın anizotropik bir yapıda olduğu varsayılmış ve piezoelektrik özelliğinden dolayı sıkışabilir olduğu kabul edilmiştir. Bunun yanında fiber ailesinin uzamaz olduğu farzedilmiştir. Ayrıca kompozit malzeme fiber boyunca yön değişimine duyarsız kalacağından, matematiksel olarak fiber vektörünün $\mathbf{B} \to -\mathbf{B}$ değişiminden etkilenmeyeceği için fiber vektörünün bileşenlerinin dış çarpımı olan simetrik bir tansör tanımlanmıştır. Bu çalışmanın temelini elektro-termomekanik denge denklemleri, fiber deformasyon geometrisi ve kinematiği ile ilgili denklemler oluşturmaktadır. Bünye aksiyomlarının kullanılması sonucunda gerilme potansiyelinin Green deformasyon tansörüne, fiber-dağılım tansörüne, elektrik alanı vektörüne ve mutlak sıcaklığa bağlı olduğu, ısı vektörü fonksiyonunun ise bu büyüklükler ile birlikte sıcaklık alanının gradyanına bağlı olduğu görülmüştür. Kompozit ortamın anizotropik yapıda olmasından dolayı, gerilme potansiyeli ve ısı vektörü fonksiyonları yaklaşık teorilerden bulunmuş, etkileşimlerin tümü lineer kabul edilerek seri açılımı yapılmıştır. Uzaysal koordinatlarda elde edilen simetrik gerilmenin, polarizasyonun ve ısı akısı vektörünün lineer bünye denklemlerinin ve denge denklemlerinde yer alan ifadelerin denge denklemlerinde yerlerine yazılması sonucunda alan denklemleri bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Denge denklemleri, Alan denklemleri, Fiber dağılım tansörü, Gerilme, Polarizasyon, Isı akısı, Termoelastisite, Anizotropi, Piezoelektrik.

A MATHEMATICAL MODEL FOR ELECTRO-THERMOELASTIC ANALYSIS OF FIBER REINFORCED PIEZOELECTRIC COMPOSITES

Abstract

This study aims to develop constitutive equations for linear thermoelastic analysis of a composite material having piezoelectric feature and reinforced by arbitrary a fiber family. Fiber-reinforced composite media are assumed to be of anisotropic nature and are considered to be compressible due to their piezoelectric properties. Besides, it is assumed that the fiber family is inextensible. In addition, since the composite material is insensitive to the directional change along the fiber, it is mathematically unaffected by the change $\mathbf{B} \to -\mathbf{B}$ of fiber vector, so a symmetric a symmetric tensor, which is the outer product of the components of the fiber vector, is defined. The basis of this work is the equations of electro-thermomechanical equilibrium equations, fiber deformation geometry and kinematics. The use of constitutive axioms has shown that the stress potential is dependent on the Green deformation tensor, the fiber distribution tensor, the electric field vector and the absolute temperature, and

[*] Süleyman Demirel Üniversitesi, Teknoloji Fakültesi, İmalat Mühendisliği Bölümü, 32260, Isparta
E-posta: melekusal@sdu.edu.tr

the heat vector function is dependent on together with these magnitudes the gradient of the temperature field. Because of the anisotropic nature of the composite media, the stress potential and heat vector functions are found in approximate theories, and all of the interactions are considered as linear and series expansion is performed. Field equations are found as a result of substituting the expressions in equilibrium equations and the linear constitutive equations of symmetric stress, polarization and heat flux vector written in spatial coordinates.

Key Words: Balance equations, Field Equations, Tensor of fiber distribution, Stress, Polarization, Heat flux, Thermoelasticity, Anisotropy, Piezoelectric.

1. Giriş

Mühendislikte kullanılan malzemelerde, akma dayanımının, elastikliğin, kırılma tokluğunun, yoğunluğun yüksek olması ve yüksek sıcaklıklara dayanabilme gibi özellikler aranmaktadır. Metaller, plastikler ve seramikler mühendislikte yaygın olarak kullanılan malzemelerin başında gelmektedir. Mühendislik açısından bir malzemede aranan özelliklerin tümünü aynı malzemede bulabilmek zordur. Bu yüzden, yüksek dayanım, yüksek rijitlik, yüksek yorulma dayanımı, mükemmel aşınma direnci, yüksek sıcaklık kapasitesi, iyi korozyon direnci, iyi termal ve ısı iletkenliği, düşük ağırlık, çekicilik ve estetik görünüm gibi özelliklere sahip kompozit malzemelerin mühendislikte yaygın kullanım alanları bulunmaktadır. Sürekli ve kesikli fiber takviyeli olarak ikiye ayrılan fiber takviyeli kompozit malzemelerde yükü fiberler taşımaktadır ve kompozit malzemenin dayanımı fiber ekseni doğrultusunda en büyük değerdedir [1]. Fiber ve matris malzemesi makroskobik olarak izotrop ise malzeme, tek aileli fiber dağılımı sonucunda yerel olarak enine izotrop duruma gelir. Bu da, malzeme içinde fiberler doğrultusunda tercihli bir yönün oluşması ve ortamın makroskobik düzeyde anizotrop hale gelmesi demektir [2]. Fiber takviyeli kompozit malzemeler doğal ve yapay olarak gruplandırılırsa, doğal kompozitler (kemik, kas, v.b.) tıp alanında daha çok kullanılmakta, yapay kompozitler ise teknolojinin her alanında yaygın bir şekilde kullanılmaktadır [3].

Son zamanlarda piezoelektrik kompozitler, akıllı malzemeler ve yapılar konusunda büyük ilgi çekmektedir [4]. Piezoelektrik kompozitler, ultrasonik görüntüleme veya sensörler gibi akıllı malzemelerin uygulamalarında yaygın bir şekilde kullanılmaktadır [5]. Piezoelektrik kompozitlerin karakteristiği, bu malzemelerin uygulaması ve üretimi için çok önemlidir. Piezoelektrik, magnetostriktiv ve thermoelektroelastik kompozitler gibi fonksiyonel kompozit malzemeler, ultrasonik görüntüleme cihazlarında, sensörlerde, aktüatörlerde ve dönüştürücülerde artan uygulamaları ile hızla gelişmektedir. Bu tür kompozitler, fonksiyonel malzemelerin karakteristiğini belirten piezoelektrik ve piezomagnetik gibi özelliklere sahiptir. [6].

Metaller ve plastikler gibi mühendislik malzemelerinin elastik olma özelliği önem arzetmektedir [7]. Elastik özelliğe sahip malzemeler, mühendislik malzemeleri olarak yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Elastik bir malzeme sabit sıcaklıkta değilse, termoelastik malzeme olarak adlandırılır. Termoelastik bir malzemenin dış yüklemeye karşı tepkisi, gerilme tansörü ve ısı akısı vektörü olarak ortaya çıkmaktadır. Fiber takviyeli kompozit malzemeler, endüstride sıcaklığın sabit olmadığı durumlarda da kullanılmaktadır [8,9]. Sıcaklığın sabit olmaması durumunda ve dış yüklemeler sonucunda çeşitli malzemelerin davranışı üzerine çalışmalar yapılmıştır [8, 10, 11, 12]. Harmonik yaklaşımda kristal kafesin dinamik teorisi ile elastisite ve piezoelektrikğin klasik lineer teorileri arasındaki alanda bazı yeni gelişmeler gözden geçirilmiştir [13]. Tiersten [14] adlı çalışmasında, termoelektroelastisitenin lineer olmayan denklemleri üzerine bir çalışma yapmıştır. Nowacki [15] adlı çalışmasında, termoelastisitenin dinamik problemlerinin çözümünü incelemiştir.

Daha önce yapılan çalışmalarda da farklı özelliklere sahip malzemelerin dış yükleme sonucunda ortaya çıkan davranışı matematiksel olarak modellenmiştir. [16] çalışmasında, Hegzagonal simetriye sahip piezoelektrik özellik taşıyan viskoelastik bir malzemenin lineer bünye denklemleri elde edilmiştir. Tek fiber aileli bir kompozit malzemenin piezoelektik özelliğe ve manyetik duyarlılığa sahip olması durumundaki viskoelastik davranışı farklı çalışmalar olarak ortaya konulmuştur [3, 17]. Ayrıca Usal [18] adlı çalışmasında, iki farklı uzamaz fiber aileli, piezoelektrik ve viskoelastik özellik taşıyan sıkışmaz bir kompozit malzemenin elektromekanik davranışını incelemiştir. [19] çalışmasında, uzamaz tek fiber ailesi ile takviye edilmiş süreksizlik yüzeyine sahip sıkışmaz bir kompozit ortamın, viskoelastik davranışını ortaya koyan bünye denklemleri elde edilmiştir. [20] çalışmasında ise iki farklı uzamaz fiber ailesi ile takviye edilmiş, süreksizlik yüzeyi içermeyen ve viskoelastik özelliğe sahip sıkışmaz bir kompozit malzemenin lineer davranışı incelenmiştir. Adı geçen bu çalışmaların [3, 16, 17, 18, 19, 20] hepsi sabit sıcaklık durumunda ele alınmıştır. [21] çalışmasında ise, ortamın sıkışabilir ve fiberlerin uzamaz olduğu kabul edilen iki farklı fiber ailesi ile takviye edilmiş kompozit bir malzemenin dış yüklemeler karşısındaki termoelastik lineer davranışı için bünye denklemleri elde edilmiştir. Piezoelektrik özellik taşıyan ve kompozit olamayan sıkışabilir bir ortamın termoelastik lineer davranışı için bünye denklemlerinin formülasyonu ise [22] çalışmasında yapılmıştır. Yine [9] çalışmasında ise, ortamın sıkışmaz ve fiber ailesinin uzamaz kabul edildiği tek fiber ailesi ile takviye edilmiş, süreksizlik yüzeyine sahip kompozit bir malzemenin dış yüklemeler karşısındaki lineer tepkisi için bünye denklemleri, sıcaklığın sabit olmadığı durum için ortaya konulmuştur. Belirtildiği gibi [9, 21, 22] çalışmalarında ise sıcaklık sabit eğildir ve sıcaklık gradyanı bağımsız bünye değişkeni olarak ortaya çıkmaktadır.

Bu çalışmada da, önceki çalışmalarda [3,9, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22] olduğu gibi bünye denklemlerinin formülasyonu üzerine çalışılmıştır. Şimdiki çalışmada ele alınan kompozit malzemenin süreksizlik yüzeyine sahip olduğu, uzamaz tek fiber ailesi ile takviye edildiği, ortamın sıkışabilir olduğu, piezoelektrik özellik taşıdığı ve sıcaklık gradyanına bağlı olduğu kabul edilmiştir. Malzemenin sahip olduğu her farklı özellik bağımsız bünye değişkeni olarak ortaya çıktığı için, bünye denklemlerinde farklı etkileşimlerin ortaya çıkmasına sebep olmaktadır. Kompozit malzemelerde mikroskopik derecede küçük olan iç kusurlara rastlanır. Bu kusurlar kristalin olarak ifade edilen küçük kristallerin arasındaki bağlayıcı yabancı maddede görülen, boşluk, aralık gibi gevşek noktalardır. İç bünyedeki bu kılcal süreksizlikler kompozitin mukavemetine çok tesir etmektedir [23]. Bu çalışmada ele alınan kompozit malzemenin bir süreksizlik yüzeyine ve güçlü bir anizotropiye sahip olduğu varsayılıp bünye denklemlerinin formülasyonu yapılmıştır. Ayrıca kompozit malzeme fiber boyunca yön değişimine duyarsız kalacağından matematiksel olarak $\mathbf{B} \to -\mathbf{B}$ değişiminden etkilenmeyeceğini düşünerek fiber vektörünün bileşenlerinin dış çarpımı olan simetrik bir tansör tanımlanmıştır.

2. Fiber Kinematiği ve Balans Denklemleri

Fiber ailesi, deformasyondan önce sürekli bir $\mathbf{B}(\mathbf{X})$ vektör alanı ile deformasyondan sonra ise yine sürekli bir $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ vektör alanı ile gösterilmektedir. Deformasyon sırasında Fiber ailesinin ortamla birlikte hareket ettiği varsayılıp, deformasyona maruz kalmadan önceki ve sonraki diferansiyel fiber uzunluğu ise dL ve dl ile ifade edilmektedir. Fiber germesi ise λ_b ile temsil edilmektedir [24].

$$b_k = \lambda_b^{-1} x_{k,K} B_K , \quad \lambda_b = \left(\frac{d\,l}{d\,L} \right)_B , \quad \lambda_b^2 = C_{KL} B_K B_L \tag{1}$$

Öte yandan, matris malzemesinin fiber boyunca yön değişimine duyarsız kalacağı düşünüldüğünden, fiber vektörünün dış çarpımı olan simetrik bir tansör ($Y_{KL} = Y_{LK}$), aşağıdaki gibi tanımlanıp bu çalışmada bağımsız bünye değişkeni olarak kullanılacaktır [2, 25, 26].

$$\mathbf{Y}(\mathbf{X}) \equiv Y_{KL}(\mathbf{X})\mathbf{I}_K\,\mathbf{I}_L = \mathbf{B}(\mathbf{X})\mathbf{B}(\mathbf{X}) = B_K B_L\,\mathbf{I}_K\,\mathbf{I}_L \;\text{ ve }\; Y_{KL} = Y_{LK} \tag{2}$$

Diğer çalışmalarda olduğu gibi yerel elektrostatik-termomekanik balans denklemleri (Gauss ve Faraday yasaları, kütlenin, lineer momentumun, açısal momentumun, enerjinin korunum denklemleri ve entropi eşitsizliği) özet olarak verilmiştir. Ayrıca, kompozit ortamın $S(t)$ yüzeyi ile sınırlandırılmış $V(t)$ hacmine sahip olduğu ve ortamda $\mathbf{u}$ hızı ile hareket eden bir $\sigma(t)$ süreksizlik yüzeyinin bulunduğu kabul edilmiştir [27, 28].

Gauss Yasası

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \mathbf{0} \qquad V(t) \quad \text{içinde} \tag{3}$$

$$[\![\mathbf{D}]\!]\cdot\mathbf{n} = 0 \quad \sigma(t) \quad \text{üzerinde} \tag{4}$$

Faraday yasası

$$\nabla\times\mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi \;\; V(t) \text{ içinde} \tag{5}$$

$$\mathbf{n}\times[\![\mathbf{E}]\!] = \mathbf{0} \qquad \sigma(t) \text{ üzerinde} \tag{6}$$

Polarize olabilen bir malzemede elektrik akı ve elektrik alan yoğunluğu arasında aşağıdaki gibi bir bağıntı mevcuttur.

$$\mathbf{D} = \in_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \text{ veya } D_r = \in_0 E_r + P_r \tag{7}$$

Burada, $\mathbf{D}$ elektrik yer değiştirme vektörü, $\mathbf{n}$ süreksizlik yüzeyinin dış birim normali, $\mathbf{E}$ elektrik alan vektörü, ϕ elektrostatik potansiyel, $\in_0$ boşluğun elektriksel permitivitesi, $\mathbf{P}$ polarizasyon alan vektörü, $[\![\mathbf{D}]\!] \equiv \mathbf{D}^+ - \mathbf{D}^-$ süreksizlik yüzeyi üzerinde $\mathbf{D}$ nin sıçrama değerini göstermektedir [27,28].

Kütlenin Korunumu

$$\dot{\rho} + \rho \mathrm{v}_{k,k} = 0 \qquad V(t) \quad \text{içinde} \tag{8}$$

$$\| U\, \rho \| = 0 \qquad \sigma(t) \text{ üzerinde} \tag{9}$$

$$\rho(\mathbf{x},t) = \frac{\rho_0(\mathbf{X})}{J(\mathbf{x},t)} \quad \text{(Maddesel gösterimde)} \tag{10}$$

Lineer Momentumun Dengesi

$$\rho \dot{\mathrm{v}}_{\mathrm{k}} = t_{l\,k,l} + \rho\, \mathrm{f}_k + F_k^E \qquad V(t) \qquad \text{içinde} \tag{11}$$

$$\| \, n_l\, t_{l\,k} + \rho\, \mathrm{v}_{\mathrm{k}}\, U \, \| = 0 \qquad \sigma(t) \quad \text{üzerinde} \tag{12}$$

Açısal Momentumun Dengesi

$$\varepsilon_{krp}\, t_{rp} + C_k^E = 0 \qquad V(t) \text{ içinde} \tag{13}$$

$$\varepsilon_{k\,l\,p}\, x_l \, \| \, n_r\, t_{r\,p} + \rho\, U\, \mathrm{v}_p \, \| = 0 \quad \sigma(t) \quad \text{üzerinde} \tag{14}$$

Enerji Denkliği

$$\rho \dot{\varepsilon} = t_{kl}\, \mathrm{v}_{l,k} - q_{k,k} + \rho h + \rho h^E + C_k^E\, \mathrm{w}_k \qquad V(t) \text{ içinde} \tag{15}$$

$$\rho U \left\| \varepsilon + \frac{1}{2} |\, \mathbf{v}\, |^2 \right\| + n_k \| t_{k\,l}\, \mathrm{v}_l - q_k \| = 0 \quad \sigma(t) \quad \text{üzerinde} \tag{16}$$

Termodinamiğin İkinci Kanunu (Clausius-Duhem Eşitsizliği)

$$\rho \dot{\eta} - \rho\, \frac{h}{\theta} + \frac{1}{\theta} \nabla \cdot \mathbf{q} - \frac{1}{\theta^2} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \equiv \rho \gamma \geq 0 \qquad V(t) \text{ içinde} \tag{17}$$

$$\rho U \| \, \eta \, \| - \left\| \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}}{\theta} \right\| \leq 0 \qquad \sigma(t) \text{üzerinde} \tag{18}$$

Burada U , süreksizlik yüzeyinin sürekli ortama göre bağıl yer değiştirme hızı olup aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$U \equiv u_n - \mathrm{v}_{\mathrm{n}} = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \tag{19}$$

Ayrıca $\mathbf{v}$ sürekli ortamdaki hız alanı, $\mathbf{u}$ süreksizlik yüzeyinin hızı, $\dot{\mathbf{v}}$ ivme, t_{lk} gerilme tansörü, f_k birim kütle başına mekanik hacımsal kuvvet, F_k^E birim hacim başına elektrostatik gövde kuvveti, C_k^E birim hacim başına elektrostatik kuvvet çifti, ε birim kütle başına iç-enerji yoğunluğu, $\mathrm{v}_{l,k}$ hız gradyanı tansörü, q_k ısı akısı vektörü, h birim kütle başına ısı kaynağı, h^E elektrostatik enerji kaynağı, w_k açısal hız, η birim kütle başına entropi yoğunluğu, $\theta(\mathbf{X},t)$ bir t anında $\mathbf{X}$ maddesel noktasının mutlak sıcaklığı, $\rho\gamma$ birim kütle başına entropi üretimi, ε_{krp} permütasyon tansörü olarak ifade edilmektedir.

Denge denklemlerinde yer alan F_k^E, C_k^E ve ρh^E terimleri aşağıdaki gibi ifade edilmektedir [27,28].

$$\mathbf{F}^E = \mathbf{P}\cdot\square\mathbf{E} \quad \square \quad F_k^E = P_j E_{k,j} \tag{20}$$

$$\mathbf{C}^E \equiv \mathbf{P}\times\mathbf{E} \quad \square \quad C_k^E = \varepsilon_{krp} P_r E_p \tag{21}$$

$$\rho h^E \equiv \mathbf{E}\cdot\overset{*}{\mathbf{P}} + \mathbf{t}^E \otimes \mathbf{d} \quad \square \quad \rho h^E = E_k \overset{*}{P}_k + t_{kl}^E d_{kl} \tag{22}$$

(22) denklemindeki ($*$) işareti aşağıdaki gibi tanımlanmıştır ve $\dot{\mathbf{P}}$ teriminin üzerindeki nokta, maddesel türev anlamına gelmektedir.

$$\overset{*}{\mathbf{P}} \equiv \dot{\mathbf{P}} - P_k \mathbf{v}_{,k} + \mathbf{P}\, \mathrm{v}_{k,k} \tag{23}$$

Asimetrik bir tansör olan $\mathbf{t}^E$ polarizasyon gerilme tansörü olarak adlandırılıp aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mathbf{t}^E = \mathbf{P}\otimes\mathbf{E} \quad \square \quad t_{kl}^E = P_k E_l \tag{24}$$

(21) ifadesi (13) denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\varepsilon_{krp}(t_{rp} + P_r E_p) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{krp}(t_{rp} + t_{rp}^E) = 0 \tag{25}$$

ε_{krp} permütasyon tansörü, antisimetrik bir tansör olduğundan (25) denklemindeki parantez içindeki ifadenin simetrik olması gerekir. Bu denklemdeki parantez içindeki ifade simetrik gerilme tansörü olarak adlandırılıp aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\bar{t}_{rp} \equiv t_{rp} + P_r E_p = \bar{t}_{pr} \tag{26}$$

(26) ifadesinden t_{pr} asimetrik gerilme tansörü aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$t_{pr} = \bar{t}_{pr} - P_p E_r \tag{27}$$

(27) denkleminin diverjansı aşağıdaki gibi alınır.

$$t_{rp,r} \equiv \bar{t}_{rp,r} - (P_{r,r} E_p + P_r E_{p,r}) \tag{28}$$

(11) denkleminde (20) ve (28) ifadeleri yerlerine yazılırsa, Lineer momentumun yerel korunumu denklemi aşağıdaki gibi ortaya konulur.

$$\rho \dot{\mathrm{v}}_p = \rho \mathrm{f}_p + \bar{t}_{r\,p,r} - P_{r,r} E_p \tag{29}$$

$\mathrm{v}_{l,k}$ hız gradyanı tansörü aşagıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$\mathrm{v}_{l,k} = \mathrm{d}_{lk} + w_{lk} \tag{30}$$

(30) denkleminde birinci terim bir maddesel noktanın maruz kaldığı deformasyon hızlarını, ikincisi de rijid dönme hızlarını temsil etmektedir. Deformasyon hızları, ikinci dereceden simetrik bir tansör iken, rijid dönme hızları ise ikinci dereceden antisimetrik bir tansördür. Deformasyon hızları tansörünü d_{kl} aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$d_{kl} \equiv \frac{1}{2}(\mathrm{v}_{k,l} + \mathrm{v}_{l,k}) = d_{lk} \tag{31}$$

Rijid dönme hızları tansörü de aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$w_{kl} \equiv \frac{1}{2}(\mathrm{v}_{k,l} - \mathrm{v}_{l,k}) = -w_{lk} \tag{32}$$

(31), (23) ve (24) ifadeleri (22) denkleminde yerlerine yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\rho h^E = \mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{P}} + \mathbf{E}\cdot\mathbf{P}\,\mathrm{v}_{k,k} - E_l P_k \mathrm{v}_{l,k} + \frac{1}{2} P_k E_l (\mathrm{v}_{k,l} + \mathrm{v}_{l,k}) \tag{33}$$

Birim kütle başına polarizasyon vektörü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mathbf{\Pi} \equiv \frac{\mathbf{P}}{\rho} \tag{34}$$

Polarizasyonun maddesel türevi (34) ifadesinden aşağıdaki gibi alınır.

$$\dot{\mathbf{P}} = \overset{\bullet}{\overline{\rho\,\mathbf{\Pi}}} = \dot{\rho}\,\mathbf{\Pi} + \rho\,\dot{\mathbf{\Pi}} \tag{35}$$

(35) ifadesi (33) denkleminde yerine yazılıp, (8) denklemi dikkate alınarak uygun indis değişimi ve sadeleştirmeler yapılırsa ρh^E terimi aşagıdaki gibi elde edilir.

$$\rho h^E = \rho\,\mathbf{E}\cdot\dot{\Pi} - P_k E_l \mathrm{v}_{l,k} + \frac{1}{2} P_k E_l \mathrm{v}_{k,l} + \frac{1}{2} P_k E_l \mathrm{v}_{l,k} \tag{36}$$

Açısal hız $\mathbf{w}$, aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{v} \tag{37}$$

(21) ve (37) ifadelerinden, (15) denkleminin son terimi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\mathbf{C}^E \cdot \mathbf{w} = C_m^E \, \mathrm{w}_m = \frac{1}{2} P_k \, E_l \, \mathrm{v}_{l,k} - \frac{1}{2} P_k \, E_l \, \mathrm{v}_{k,l} \tag{38}$$

(36) ve (38) ifadeleri toplanıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\rho h^E + C_m^E \, \mathrm{w}_m = \rho \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{\Pi}} \tag{39}$$

(39), (30) ve (27) ifadeleri (15) denkleminde yerlerine yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\rho \, \dot{\varepsilon} = (\bar{t}_{kl} - P_k E_l)(d_{kl} + \mathrm{w}_{lk}) - q_{k,k} + \rho h + \rho \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{\Pi}} \tag{40}$$

Simetrik bir tansörle antisimetrik bir tansörün dış çarpımı sıfır olduğundan (40) ifadesinden, enerjinin korunumu denkleminin yerel formu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\rho \, \dot{\varepsilon} = \bar{t}_{kl} \, d_{kl} - q_{k,k} + \rho h + \rho \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{\Pi}} \tag{41}$$

3. Termodinamik Kısıtlar ve Bünye Denklemlerinin Modellenmesi

Enerji denklemi (41) ile Entropi eşitsizliği (17) ifadeleri birleştirildiğinde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\rho \gamma \equiv \frac{\rho}{\theta}(\dot{\varepsilon} - \theta \dot{\eta} - \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{\Pi}}) + \frac{1}{\theta} t_{kl} \mathrm{v}_{l,k} - \frac{1}{\theta^2} q_k \, \theta_{,k} \geq 0 \tag{42}$$

Bu eşitsizlikte ortaya çıkan, entropi yoğunluğunun, iç-enerjinin, polarizasyon yoğunluğunun ve deformasyonun zamanla, sıcaklığın da uzaysal koordinatlara göre değişimi termodinamik prosesi temsil etmektedir. Bir termodinamik proseste iç–enerji, entropi ve polarizasyon değişiminin kontrolü mümkün olamayacağından dolayı aşağıdaki gibi tanımlanan bir Legendre transformasyonu kullanılabilir.

$$\psi \equiv \varepsilon - \theta \eta - \rho^{-1} E_k \, P_k \tag{43}$$

Bu durumda (42) eşitsizliği aşağıdaki gibi elde edilir.

$$-\rho(\dot{\psi} + \dot{\theta}\eta) + \bar{t}_{kl} \, \mathrm{d}_{lk} - P_k \, E_l \, \mathrm{v}_{l,k} - \frac{1}{\theta} q_k \, \theta_{,k} - P_k \, \dot{E}_k \geq 0 \tag{44}$$

(44) eşitsizliği maddesel formda aşağıdaki gibi yazılır.

$$-(\dot{\Sigma}+\rho_0\eta\dot{\theta})+\frac{1}{2}\overline{T}_{KL}\dot{C}_{KL}-\frac{1}{\theta}\theta_{,K}Q_K-\Pi_K\dot{E}_K\geq 0 \tag{45}$$

Burada geçen büyüklüklerle ilgili terimler aşağıda verilir.

$$\Sigma\equiv\rho_0\ \psi \tag{46}$$

$$\dot{C}_{KL}=2\mathrm{d}_{kl}x_{k,K}x_{l,L}\Rightarrow d_{kl}=\frac{1}{2}\dot{C}_{KL}X_{K,k}X_{L,l} \tag{47}$$

$$\overline{T}_{KL}\equiv JX_{K,k}X_{L,l}\bar{t}_{kl}\Rightarrow \bar{t}_{kl}=J^{-1}x_{k,K}x_{l,L}\overline{T}_{KL} \tag{48}$$

$$Q_K\equiv\ J\,X_{K,k}\,q_k\Rightarrow q_k=J^{-1}\,x_{k,\,K}\,Q_K \tag{49}$$

$$\Pi_K\equiv\frac{\rho_0}{\rho}X_{K,k}\,P_k\Rightarrow P_k=J^{-1}x_{k,\,K}\Pi_K \tag{50}$$

$$E_K\equiv x_{k,\,K}\,E_k\Rightarrow E_k=X_{K,\,k}\,E_K \tag{51}$$

$$G_K\equiv\theta_{,K}=x_{k,K}\theta_{,k}\Rightarrow g_k\equiv\theta_{,\,k}=X_{K,\,k}\,\theta_{,\,K} \tag{52}$$

(45) ifadesiyle verilen eşitsizlik, quazi-elektrostatik bir alan ile etkileşen ve izoterm olmayan bir sıcaklıkta bulunan termomekanik ortamlar için entropi üretiminin genel bir ifadesi olarak tanımlanmaktadır. Bu eşitsizlik, gerilme potansiyeli Σ'nın bağlı olduğu bağımsız bünye değişkenlerinin ortaya konulması ile kullanılabilir. Bu çalışmada ele alınan malzeme için Σ'nın bağlı olduğu bağımsız bünye değişkenleri bünye aksiyomlarının kullanılması ile belirlenebilir. Kozalite, determinizm, objektivite, yakın civarsallık ve tutarlılık aksiyomlarının kullanılmasıyla [29, 30], fiber takviyeli ve piezoelektrik özelliğe sahip, sıcaklık gradyanına bağlı bir kompozit malzeme için Σ'nın bağlı olduğu bağımsız bünye değişkenleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\Sigma(X_K,t)=\Sigma\left[C_{KL}(X_K,t),Y_{KL}(X_K),G_K(X_K,t),E_K(\mathbf{X},t),\theta(X_K,t),X_K\right] \tag{53}$$

Kompozit ortamın homojen olduğu kabul edildiğinden (53) ifadesiyle verilen Σ'nın bağlı olduğu bağımsız bünye değişkenlerinden X_K kaldırılır. (53) denkleminin maddesel türevi aşağıdaki gibi alınabilir.

$$\dot{\Sigma}=\frac{\partial\Sigma}{\partial C_{KL}}\dot{C}_{KL}+\frac{\partial\Sigma}{\partial\theta_{,K}}\dot{G}+\frac{\partial\Sigma}{\partial E_K}\dot{E}_K+\frac{\partial\Sigma}{\partial\theta}\dot{\theta} \tag{54}$$

(54) ifadesi (45) eşitliğinde yerine yazılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\frac{1}{2}(\overline{T}_{KL}-2\frac{\partial\Sigma}{\partial C_{KL}})\dot{C}_{KL}-\rho_0(\eta+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\Sigma}{\partial\theta})\dot{\theta}-\frac{\partial\Sigma}{\partial G_K}\dot{G}_K-(\Pi_K+\frac{\partial\Sigma}{\partial E_K})\dot{E}_K+\frac{1}{\theta}G_K\,Q_K\geq 0 \tag{55}$$

(55) eşitsizliğindeki argümanları θ'yı $\dot{\theta}$ şeklinde, C_{KL}'yi $\dot{C}_{KL}$ şeklinde, E_K'yi $\dot{E}_K$ şeklinde ve G_K'yı $\dot{G}_K$ şeklinde keyfi olarak değiştirebileceğimizden (55) eşitsizliğinin sağlanabilmesi

için $\dot{\theta}$' nın, $\dot{C}_{KL}$' nın, $\dot{E}_K$ ve $\dot{G}_K$' nın katsayıları sıfır olacaktır. G_K' nın katsayısı sıfır olamaz çünkü G_K, Σ' nın bağımsız bünye değişkenleri arasında yer aldığından G_K keyfi olarak değiştirilemez. (55) eşitsizliğinde $\dot{C}_{KL}$, $\dot{\theta}$ ve $\dot{G}_K$ terimlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklemlere ulaşılır.

$$\overline{T}_{KL} = 2\frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \tag{56}$$

$$\eta = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} \tag{57}$$

$$\Pi_K = -\frac{\partial \Sigma}{\partial E_K} \tag{58}$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial G_K} = 0 \tag{59}$$

(59) eşitliğiyle verilen denklemden Σ'nın G_K ya bağlı olmadığı ortaya çıkmaktadır. Bu durumda Σ'nın bağlı olduğu bağımsız bünye değişkenleri, bu çalışmada ele alınan malzeme için aşağıdaki gibi ortaya konulur.

$$\Sigma = \Sigma(C_{KL}, Y_{KL}, E_K, \theta) \tag{60}$$

(56) denklemi simetrik gerilmenin bünye denklemidir. (56)-(59) denklemlerin kullanılmasıyla (55) eşitsizliği aşağıdaki hale indirgenir.

$$\frac{1}{\theta} G_K Q_K \geq 0 \tag{61}$$

(61) eşitsizliği ısı akısı vektörü için entropi eşitsizliğini vermekte olup ısı akısı vektörünün bağlı olduğu bağımsız bünye değişkenleri ise aşağıdaki gibi verilir.

$$Q_K = Q_K\,(C_{KL}, Y_{KL}, E_K, G_K, \theta) \tag{62}$$

(61) eşitsizliği ile (62) ifadesi göz önüne alındığında aşağıdaki ifadeye ulaşılır.

$$G_K Q_K\ (C_{KL}, Y_{KL}, E_K, G_K, \theta) \geq 0 \tag{63}$$

(63) eşitsizliğinde $G_K = 0$ ise $Q_K = 0$ olduğundan aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$Q_K\,(C_{KL}, Y_{KL}, E_K, 0, \theta) = 0 \tag{64}$$

(43), (46) ve (57) ifadelerini kullanarak, iç enerji yoğunluğu (ε) aşağıdaki gibi bulunur.

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho_0}(\Sigma - \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta}\theta) - \rho^{-1} E_k\, P_k \tag{65}$$

Bu çalışmada, (27) denklemiyle ifade edilen gerilme tansörü asimetrik bir yapıdadır. (27) denkleminden asimetrik gerilmenin bulunması için, simetrik gerilmenin ve polarizasyon alanının bilinmesinin gerekli olduğu görülmektedir. Simetrik gerilmenin bünye denklemi (56) ifadesiyle, polarizasyon alanının bünye denklemi ise (58) ifadesiyle ortaya konulmuştur. Bu denklemlerden simetrik gerilme ile polarizasyon alanı Σ'dan türetildiği görülmektedir. Isı akısı vektörü ise herhangi bir potansiyelden türetilmeyip, bağımsız bünye değişkenleri belli olan vektörel bir form şeklinde ortaya çıktığı (62) denkleminden görülmektedir. Buna göre bu çalışmada ele alınan kompozit malzemenin elektro-termomekanik yükleme sonucunda ortaya çıkan bünye denklemlerinin elde edilmesi için, bağımsız bünye değişkenleri belli olan bünye fonksiyonellerinin (Σ ve Q_K) açık bir şekilde belirlenmesi gerekmektedir. Bünye fonksiyonellerinin (Σ ve Q_K) belirlenmesine geçmeden önce, bünye aksiyomlarından önemli bir aksiyom olan maddesel simetri aksiyomun ortaya koyduğu kısıtlamanın göz önüne alınması gerekmektedir. Bu aksiyoma göre bünye fonksiyonellerinin (Σ ve Q_K) aşağıda verilen koordinat dönüşümünde form-invaryant olarak kalması gerekmektedir.

$$X'_K = S_{KL} X_L \ , \ X_L = S^T_{LK} X'_K \ , \ \underline{\underline{S}}^{-1} = \underline{\underline{S}}^T \tag{66}$$

Burada; $\underline{\underline{S}} = [S_{KL}]$ maddesel koordinatların ortogonal dönüşümünü temsil eden ve ortamın simetri grubuna ait keyfi bir matris olarak ifade edilmektedir. Bu durumda bünye fonksiyonellerinin (Σ ve Q_K) aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\Sigma\,(\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{S}}^T, \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{Y}}\,\underline{\underline{S}}^T, \underline{\underline{S}}\,\underline{E}, \theta) = \Sigma\,(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{Y}}, \underline{E}, \theta) \tag{67}$$

$$\underline{Q}(\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{S}}^T, \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{Y}}\,\underline{\underline{S}}^T, \underline{\underline{S}}\,\underline{E}, \underline{\underline{S}}\,\underline{G}, \theta) = \underline{\underline{S}}\,\underline{Q}(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{Y}}, \underline{E}, \underline{G}, \theta) \tag{68}$$

Öte yandan fiber ailesinin uzamazlığı birçok mühendislik malzemesinin yapısına uyduğundan fiber ailesi uzamaz kabul edilmiştir. Bu durumda fiber germesi için aşağıda verilen şartın sağlanması gerekmektedir.

$$\lambda_b^2 = C_{KL}\, B_K\, B_L = 1 \tag{69}$$

Bu çalışmada ele alınan kompozit malzemenin anizotropik yapıda olduğu kabul edildiğinden dolayı, bünye fonksiyonelleri (Σ ve Q_K) bağlı oldukları bağımsız bünye değişkenlerine göre kuvvet serisine açılmış ve lineer bünye denklemleri bulunmuştur. Ortamın referans konumu, bir T_0 üniform sıcaklığında, gerilmesiz ve polarize olmayan doğal durum olarak seçilmiştir. Bu referans konumundan itibaren küçük yer ve şekil–değiştirmeler, küçük elektriksel etkileşimler ve de küçük sıcak değişimleriyle ayrıldığı varsayılmıştır. Küçük sıcaklık değişiminden kastedilen durum, $\theta = T_0 + T$, $T_0 > 0$, $|T| << T_0$ şeklindedir [30]. Kuvvet serisi açılımında, kompozit ortamın lineerlik durumuna göre terimlerin türü ve sayısı dikkate alınmıştır. Ortaya konulan lineer bünye denklemleri, denge denklemlerinde yerlerine yazılarak alan denklemleri elde edilmiştir.

4. Bulgular

4.1. Gerilme Potansiyelinden Türetilen Bünye Denklemlerinin Elde Edilmesi

Deformasyon tansörleri arasında (C_{KL} ile E_{KL}), $C_{KL} = \delta_{KL} + 2E_{KL}$ şeklinde bir bağıntı mevcuttur. Burada C_{KL}; Green deformasyon tansörü ve E_{KL}; maddesel genleme tansörü olarak adlandırılmaktadır. Lineer teori kapsamında E_{KL} (maddesel genleme tansörü), $E_{KL} \cong \tilde{E}_{KL} \equiv \frac{1}{2}(U_{K,L} + U_{L,K})$ şeklinde ifade edilmektedir. Bu durumda (60) ifadesiyle verilen Σ 'nın bağımsız bünye değişkenleri aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\Sigma = \Sigma(\tilde{E}_{KL}, E_Q, Y_{SN}, \theta) \tag{70}$$

Σ 'nın argümanlarına ($\tilde{E}_{KL}$, E_Q, Y_{SN}) göre analitik olduğunu kabul edilip $\tilde{E}_{KL} = 0$, $E_Q = 0$ ve $Y_{SN} = 0$ civarında bir kuvvet (Taylor) serisine açılımı yapılarak aşağıdaki ifade ortaya konulur.

$$\begin{aligned}\Sigma(\tilde{E}_{KL}, E_Q, Y_{SN}, \theta) = {} & \Sigma_0 + \Sigma_{KL}\tilde{E}_{KL} + \beta_Q E_Q + \gamma_{SN} Y_{SN} + \frac{1}{2}\Sigma_{KLMN}\tilde{E}_{KL}\tilde{E}_{MN} + \frac{1}{2}\beta_{QN} E_Q E_N + \\ & + \frac{1}{2}\gamma_{SNML} Y_{SN} Y_{ML} + \frac{1}{2}\lambda_{KLQ}\tilde{E}_{KL} E_Q + \frac{1}{2}\Omega_{KLSN}\tilde{E}_{KL} Y_{SN} + \frac{1}{2}\xi_{QSN} E_Q Y_{SN} + \ldots\end{aligned} \tag{71}$$

Bu seri açılımında, bağımsız bünye değişkenleri ile birlikte yazılan katsayılar için aşağıdaki tanımlamalar kullanılır.

$$\begin{aligned}&\Sigma_0 \equiv \Sigma(\underline{0}, \underline{0}),\ \Sigma_{KL} \equiv \left.\frac{\partial\Sigma}{\partial\tilde{E}_{KL}}\right|_0,\ \beta_Q \equiv \left.\frac{\partial\Sigma}{\partial E_Q}\right|_0,\ \gamma_{SN} \equiv \left.\frac{\partial\Sigma}{\partial Y_{SN}}\right|_0,\ \Sigma_{KLMN} \equiv \left.\frac{\partial^2\Sigma}{\partial\tilde{E}_{KL}\,\partial\tilde{E}_{MN}}\right|_0, \\ &\beta_{QN} \equiv \left.\frac{\partial^2\Sigma}{\partial E_Q\,\partial E_N}\right|_0,\ \gamma_{SNML} \equiv \left.\frac{\partial^2\Sigma}{\partial Y_{SN}\,\partial Y_{ML}}\right|_0,\ \lambda_{KLQ} \equiv \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2\Sigma}{\partial\tilde{E}_{KL}\,\partial E_Q}\right|_0,\ \lambda_{KLSN} \equiv \left.\frac{\partial^2\Sigma}{\partial\tilde{E}_{KL}\,\partial Y_{SN}}\right|_0, \\ &\xi_{QSN} \equiv \left.\frac{\partial^2\Sigma}{\partial E_Q\partial Y_{SN}}\right|_0\end{aligned} \tag{72}$$

$\tilde{E}_{KL}$ ve Y_{SN} tansörlerinin simetrisi ve yukarıdaki tanımlamalarda türevlerin sıraya bağlı olmaması, söz konusu katsayıların aşağıdaki gibi ifade edilen simetri şartlarını taşımasına sebep olmaktadır.

$$\begin{aligned}&\Sigma_{KL} = \Sigma_{LK},\ \Sigma_{KLMN} = \Sigma_{LKMN} = \Sigma_{KLNM} = \Sigma_{MNKL},\ \gamma_{SN} = \gamma_{NS},\ \beta_{QN} = \beta_{NQ},\ \xi_{QSN} = \xi_{QNS}, \\ &\gamma_{SNML} = \gamma_{NSML} = \gamma_{SNLM} = \gamma_{MLSN}, \lambda_{KLQ} = \lambda_{LKQ}, \Omega_{KLSN} = \Omega_{LKSN} = \Omega_{KLNS} = \Omega_{SNKL}\end{aligned} \tag{73}$$

Lineer teori kapsamında aşağıda verilen ifadeler yazılabilir [30].

$$\lambda_{kK}\,\lambda_{lK}=\delta_{kl}\,,\qquad \lambda_{kK}\,\lambda_{kL}=\delta_{KL}\,,\qquad x_{k,K}=\lambda_{kK}+\lambda_{kL}\,U_{L,K}\,,\qquad X_{K,k}=\lambda_{kK}-\lambda_{lK}\,u_{l,k}\,,$$
$$U_{K,L}=\lambda_{kK}\,\lambda_{lL}\,u_{k,l}\;\;,\qquad x_{k,K}x_{l,L}\equiv\lambda_{kK}\,\lambda_{lL}\,,\qquad X_{K,k}X_{L,l}\equiv\lambda_{kK}\,\lambda_{lL}\,,$$
$$x_{p,P}\,x_{r,R}\,E_K\equiv\lambda_{pP}\,\lambda_{rR}\,\lambda_{kK}\,E_k\,,\qquad \mathrm{E}_{KL}\cong\tilde{\mathrm{E}}_{KL}\equiv\lambda_{kK}\,\lambda_{lL}\tilde{e}_{kl}=\frac{1}{2}\,\lambda_{kK}\,\lambda_{lL}(u_{k,l}+u_{l,k})\,,$$
$$\tilde{e}_{kl}=\in_{kl}=\frac{1}{2}\,(u_{k,l}+u_{l,k})\,,\qquad \dot{\mathrm{E}}_{KL}\cong\dot{\tilde{\mathrm{E}}}_{KL}\equiv\lambda_{kK}\,\lambda_{lL}\,\dot{\in}_{kl}=\frac{1}{2}\,\lambda_{kK}\,\lambda_{lL}(\dot{u}_{k,l}+\dot{u}_{l,k})\,,$$
$$d_{kl}\cong\frac{\partial\in_{kl}}{\partial t}=\dot{\in}_{kl}=\frac{1}{2}\,(\dot{u}_{k,l}+\dot{u}_{l,k})\,,\qquad \dot{\varepsilon}\approx\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\,,\qquad J^{-1}\cong 1-u_{k,k}\;,\qquad \rho\cong\rho_0\,(1-u_{k,k})$$
$$x_{p,P}\,x_{r,R}\,B_K B_L=x_{p,P}x_{r,R}X_{K,k}X_{L,l}b_k\,b_l\,\lambda_b^2\equiv\lambda_{pP}\,\lambda_{rR}\,\lambda_{kK}\,\lambda_{lL}\,Y_{kl}\;,\quad \lambda_b=1\text{ için} \tag{74}$$

$\bar{t}_{pr}$ ve p_r uzaysal koordinatlarda aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\bar{t}_{pr}=\Lambda_a\,Y_{pr}+(1-u_{k,k})\frac{\partial\Sigma}{\partial\in_{pr}} \tag{75}$$

$$p_r=-(1-u_{k,k})\frac{\partial\Sigma}{\partial E_r} \tag{76}$$

(75) ifadesindeki Λ_a, Lagrange çarpanı olarak adlandırılmaktadır. Bu Lagrange çarpanı alan denklemleri ve sınır şartları ile bulunabilir.

Σ ’nın bağımsız bünye değişkenleri, lineer teori kapsamında uzaysal koordinatlarda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\Sigma=\Sigma(\in_{kl}\,,Y_{kl}\,,E_k,\,\theta,\mathbf{X}) \tag{77}$$

Bu fonksiyonun $\in_{kl}, Y_{sn}$ tansörleri ve E_q vektörlerine göre analitik olduğunu kabul edilip, $\in_{kl}=0$, $E_q=0$ ve $Z_{sn}=0$ civarında bir kuvvet (Taylor) serisine açılımı yapılarak aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\begin{aligned}\Sigma(\in_{kl},E_q,Y_{sn},\theta)&=\Sigma_0(\theta,\mathbf{X})+\Sigma_{kl}(\theta,\mathbf{X})\in_{kl}+\beta_q(\theta,\mathbf{X})\,E_q+\gamma_{sn}(\theta,\mathbf{X})Y_{sn}+\frac{1}{2}\Sigma_{klmn}(\theta,\mathbf{X})\in_{kl}\in_{mn}+\\&+\frac{1}{2}\beta_{qn}(\theta,\mathbf{X})\,E_qE_n+\frac{1}{2}\gamma_{snml}(\theta,\mathbf{X})Y_{sn}\,Y_{ml}+\frac{1}{2}\lambda_{klq}(\theta,\mathbf{X})\in_{kl}E_q+\\&+\frac{1}{2}\Omega_{klsn}(\theta,\mathbf{X})\in_{kl}Y_{sn}+\frac{1}{2}\xi_{qsn}(\theta,\mathbf{X})\,E_q\,Y_{sn}+...\end{aligned} \tag{78}$$

Bu denklemde ortaya çıkan ve uzaysal koordinatlarda ifade edilen $\Sigma_{kl},\beta_q,\gamma_{sn},\Sigma_{klmn},\beta_{qn},\gamma_{snml},\lambda_{klq},\mathbf{\Omega}_{klsn}$ ve ξ_{qsn} malzeme tansörleri, maddesel koordinatlarda ifade edilen malzeme tansörleri gibi (73) ifadeleriyle verilen simetri şartlarına sahiptir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\Sigma_{kl} = \lambda_{kK}\,\lambda_{lL}\,\Sigma_{KL}\,, \quad \beta_q = \lambda_{qQ}\,\beta_Q\,, \quad \gamma_{sn} = \lambda_{sS}\,\lambda_{nN}\,\gamma_{SN}\,, \quad \Sigma_{klmn} \equiv \lambda_{kK}\,\lambda_{lL}\,\lambda_{mM}\,\lambda_{nN}\,\Sigma_{KLMN}\,,$$
$$\beta_q = \lambda_{qQ}\,\lambda_{nN}\,\beta_{QN}\,, \quad \gamma_{snml} \equiv \lambda_{sS}\,\lambda_{nN}\,\lambda_{mM}\,\lambda_{lL}\,\gamma_{SNML}\,, \quad \lambda_{klq} \equiv \lambda_{kK}\,\lambda_{lL}\,\lambda_{qQ}\,\lambda_{KLQ}\,,$$
$$\Omega_{klsn} \equiv \lambda_{kK}\,\lambda_{lL}\,\lambda_{sS}\,\lambda_{nN}\,\Omega_{KLSN}\,, \quad \xi_{qsn} \equiv \lambda_{qQ}\lambda_{sS}\,\lambda_{nN}\,\xi_{QSN} \tag{79}$$

Lineer teori kapsamında (78) ifadesi ile verilen seri açılımın, sonsuz küçük uzaysal genleme tansörü ($\in_{kl}$), elektrik alanı vektörü (E_q) ile sıcaklık (T) bakımından en fazla kuadratik bir formda olması gerektiğinden bu ifadede θ' ya bağlı olan katsayılar aşağıdaki şekilde verilmektedir.

$$\Sigma_0(\theta,\mathbf{X})=\Sigma_0(T_0+T,\mathbf{X})=\rho_0(\mathbf{X})\psi_0(T_0,\mathbf{X})-\rho_0(\mathbf{X})\eta_0(T_0,\mathbf{X})T-\frac{1}{2}\rho_0(\mathbf{X})\frac{1}{T_0}C(T_0,\mathbf{X})T^2+...$$
$$\Sigma_{kl}(\theta,\mathbf{X}) = \sigma_{kl}(T_0,\mathbf{X}) - \tau_{kl}(T_0,\mathbf{X})T + ...$$
$$\beta_q(\theta,\mathbf{X}) = \upsilon_q(T_0,\mathbf{X}) - \vartheta_q(T_0,\mathbf{X})T + ...$$
$$\gamma_{sn}(\theta,\mathbf{X}) = \zeta_{sn}(T_0,\mathbf{X}) - \chi_{sn}(T_0,\mathbf{X})T + ...$$
$$\beta_{qn}(\theta,\mathbf{X}) = \omega_{qn}(T_0,\mathbf{X}) - \Gamma_{qn}(T_0,\mathbf{X})T + ...$$
$$\Sigma_{klmn}(\theta,\mathbf{X}) = \Sigma_{klmn}(T_0+T,\mathbf{X}) = \Sigma_{klmn}(T_0,\mathbf{X})$$
$$\gamma_{snml}(\theta,\mathbf{X}) = \gamma_{snml}(T_0+T,\mathbf{X}) = \gamma_{snml}(T_0,\mathbf{X})$$
$$\lambda_{klq}(\theta,\mathbf{X}) = \lambda_{klq}(T_0+T,\mathbf{X}) = \lambda_{klq}(T_0,\mathbf{X})$$
$$\Omega_{klsn}(\theta,\mathbf{X}) = \Omega_{klsn}(T_0+T,\mathbf{X}) = \Omega_{klsn}(T_0,\mathbf{X})$$
$$\xi_{qsn}(\theta,\mathbf{X}) = \xi_{qsn}(T_0+T,\mathbf{X}) = \xi_{qsn}(T_0,\mathbf{X}) \tag{80}$$

Bu ifadeler için aşağıdaki tanımlamalar kullanılmıştır.

$$\left.\frac{\partial\,\psi_0(T,\mathbf{X})}{\partial T}\right|_{T=T_0} \equiv -\eta_0(T_0,\mathbf{X}), \qquad \left.\frac{\partial^2\psi_0(T,\mathbf{X})}{\partial T^2}\right|_{T=T_0} \equiv -\frac{1}{T_0}\,C(T_0,\mathbf{X}),$$
$$\sigma_{kl}(T_0,\mathbf{X}) \equiv \Sigma_{kl}(T_0,\mathbf{X}) = \sigma_{lk}(T_0,\mathbf{X}), \qquad \tau_{kl}(T_0,\mathbf{X}) \equiv -\left.\frac{\partial\Sigma_{kl}(T,\mathbf{X})}{\partial T}\right|_{T=T_0} = \tau_{lk}(T_0,\mathbf{X}),$$
$$\zeta_{sn}(T_0,\mathbf{X}) \equiv \gamma_{sn}(T_0,\mathbf{X}) = \gamma_{ns}(T_0,\mathbf{X}), \qquad \chi_{sn}(T_0,\mathbf{X}) \equiv -\left.\frac{\partial\gamma_{sn}(T,\mathbf{X})}{\partial T}\right|_{T=T_0} = \chi_{ns}(T_0,\mathbf{X}),$$
$$\omega_{qn}(T_0,\mathbf{X}) \equiv \beta_{qn}(T_0,\mathbf{X}) = \omega_{nq}(T_0,\mathbf{X}), \qquad \Gamma_{qn}(T_0,\mathbf{X}) \equiv -\left.\frac{\partial\beta_{qn}(T,\mathbf{X})}{\partial T}\right|_{T=T_0} = \Gamma_{nq}(T_0,\mathbf{X}) \tag{81}$$

Bu ifadelerdeki $\psi_0(T_0,\mathbf{X})$, $\eta_0(T_0,\mathbf{X})$ ve $C(T_0,\mathbf{X})$ skaler; $\upsilon_q(T_0,\mathbf{X})$ ve $\vartheta_q(T_0,\mathbf{X})$ vektörel; $\sigma_{kl}(T_0,\mathbf{X})$, $\tau_{kl}(T_0,\mathbf{X})$, $\zeta_{sn}(T_0,\mathbf{X})$, $\chi_{sn}(T_0,\mathbf{X})$, $\Sigma_{klmn}(T_0,\mathbf{X})$,

$\omega_{qn}(T_0,\mathbf{X})$, $\Gamma_{qn}(T_0,\mathbf{X})$, $\gamma_{snml}(T_0,\mathbf{X})$, $\lambda_{klq}(T_0,\mathbf{X})$ ve $\Omega_{klsn}(T_0,\mathbf{X})$ tansörel malzeme sabitleri olarak ifade edilmektedir ve kompozit ortamın başlangıç sıcaklığına (T_0) bağlıdır. Bu çalışmada ele alınan kompozit ortam homojen olduğu kabul edildiğinden bu katsayıların $\mathbf{X}$'e olan bağımlılığı ortadan kalkmaktadır. Çalışmanın bundan sonraki kısımlarında söz konusu katsayıların (T_0)'a ve $(\mathbf{X})$'e olan bağımlılıkları gösterilmeyecektir. (80) ve (81) ifadeleriyle verilen tanımlamalar kullanılarak (78) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\Sigma(\in_{kl},E_q,Y_{sn},T_0+T,\mathbf{X})=\rho_0\psi_0-\rho_0\eta_0 T-\frac{\rho_0 c}{2T_0}T^2+\sigma_{kl}\in_{kl}-\tau_{kl}\in_{kl}T+\upsilon_q E_q-\vartheta_q E_q T+$$
$$+\zeta_{sn}Y_{sn}-\chi_{sn}Y_{sn}T+\frac{1}{2}\Sigma_{klmn}\in_{kl}\in_{mn}+\frac{1}{2}\omega_{qn}E_q E_n+\frac{1}{2}\gamma_{snml}Y_{sn}Y_{ml}+\frac{1}{2}\lambda_{klq}\in_{kl}E_q+$$
$$+\frac{1}{2}\Omega_{klsn}\in_{kl}Y_{sn}+\frac{1}{2}\xi_{qsn}E_q Y_{sn}+\ldots \tag{82}$$

Σ'nın $\in_{pr}$'ye ve E_r'ye göre kısmi türevleri alınırsa aşağıdaki ifadeler yazılır.

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial\in_{pr}}=\sigma_{pr}-\tau_{pr}T+\Sigma_{prmn}\in_{mn}+\lambda_{prq}E_q+\Omega_{prsn}Y_{sn}$$
(83)
$$\frac{\partial\Sigma}{\partial E_r}=\upsilon_r-\vartheta_r T+\omega_{rq}E_q+\lambda_{klr}\in_{kl}+\xi_{snr}Y_{sn} \tag{84}$$

Bu kısmi türev ifadeleri kullanılarak (75) ve (76) denklemleri aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\bar{t}_{pr}=\Lambda_a Y_{pr}+(1-u_{k,k})(\sigma_{pr}-\tau_{pr}T+\Sigma_{prmn}\in_{mn}+\lambda_{prq}E_q+\Omega_{prsn}Y_{sn}) \tag{85}$$

$$P_r=-(1-u_{k,k})(\upsilon_r-\vartheta_r T+\omega_{rq}E_q+\lambda_{klr}\in_{kl}+\xi_{snr}Y_{sn}) \tag{86}$$

Bu ifadelerde doğal durumda σ_{pr} ve υ_r sıfır alınır. Ayrıca Σ_{prmn} ve λ_{klr} katsayılarının $\Sigma_{prmn}=\Sigma_{prnm}$ ve $\lambda_{klr}=\lambda_{lkr}$ şeklindeki simetri özelliğini ve sıcaklık, yer değiştirme gradyanı ve elektrik alan vektörü terimlerinin sadece lineer etkilerini dikkate alarak (85) ve (86) denklemleri, yer değiştirme gradyanı cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\bar{t}_{pr}=\Lambda_a Y_{pr}-\tau_{pr}T+\Sigma_{prmn}u_{m,n}+\lambda_{prq}E_q+\Omega_{prsn}Y_{sn}-\Omega_{prsn}Y_{sn}u_{k.k} \tag{87}$$

$$P_r=-(-\vartheta_r T+\omega_{rq}E_q+\lambda_{klr}u_{k,l}+\xi_{snr}Y_{sn}-\xi_{snr}Y_{sn}u_{k,k}) \tag{88}$$

(87) ve (88) ifadeleriyle ortaya konulan bünye denklemleri, bu çalışmada ele alınan piezoelektrik özelliğe sahip, uzamaz tek fiber aileli, sıkışabilir, sıcaklık değişimine bağlı kompozit bir anizotrop ortam için elde edilen simetrik gerilmenin ve polarizasyon alanının lineer bünye denklemleridir. Bu ifadelerin ortaya çıkmasına, elektrik alanının, genleme

tansörünün ve fiber tansörünün lineer etkileri ve fiber tansörüyle genleme tansörünün birlikte etkileşimleri sebep olmaktadır.

(87) ve (88) denklemleri (27) ifadesinde yerlerine yazılıp, sıcaklık, yer değiştirme gradyanı ve elektrik alan vektörü terimlerinin sadece lineer etkileri dikkate alınarak asimetrik gerilme tansörü aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$t_{pr} = \Lambda_a Y_{pr} - \tau_{pr} T + \Sigma_{prmn} u_{m,n} + \lambda_{prq} E_q + \Omega_{prsn} Y_{sn} - \Omega_{prsn} Y_{sn} u_{k.k} + \xi_{snp} Y_{sn} E_r \tag{89}$$

Bu denklemden görüldüğü üzere, yer değiştirme gradyanı ve elektrik alan vektörü terimlerinin sadece lineer etkileri dikkate alınsa bile elektrik alan vektörünün fiber tansörüyle etkileşimi toplam gerilmenin asimetrik olarak ortaya çıkmasına sebep olmaktadır.

(87) ve (89) denklemlerindeki τ_{pr} tansörü için aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\alpha_{pr} \equiv \Sigma^{-1}_{prmn} \tau_{mn} = \alpha_{rp} \tag{90}$$

Burada; α_{pr} termal genleşme katsayılarının oluşturduğu ikinci dereceden simetrik bir tansördür. Σ^{-1}_{prmn} tansörü ise Σ_{prmn} tansörünün tersi olup bu tansörle aynı simetri özelliğine sahiptir ve aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$\Sigma_{prmn} \Sigma^{-1}_{mnkl} \equiv \frac{1}{2}(\delta_{pk} \delta_{rl} + \delta_{pl} \delta_{rk}) \ , \qquad \Sigma^{-1}_{prmn} = \Sigma^{-1}_{rpmn} = \Sigma^{-1}_{mnpr} = \Sigma^{-1}_{prnm} \tag{91}$$

Σ_{klpr} tansörü ile (90) ifadesiyle verilen eşitliğin her iki tarafı çarpılıp gerekli indis değişimi yapılarak τ_{pr} tansörü için aşağıdaki ifade yazılır.

$$\tau_{pr} = \Sigma_{prmn} \alpha_{mn} \tag{92}$$

Bu ifade, (87) ve (89) denklemlerinde yerlerine yazılarak simetrik gerilme ve asimetrik gerilme tansörlerinin lineer bünye denklemleri, α_{pr} termal genleşme katsayılarının oluşturduğu tansör cinsinden aşağıdaki şekilde ortaya konulur.

$$\bar{t}_{pr} = \Lambda_a Y_{pr} + \Sigma_{prmn} (u_{m,n} - \alpha_{mn} T) + \lambda_{prq} E_q + \Omega_{prsn} Y_{sn} - \Omega_{prsn} Y_{sn} u_{k.k} \tag{93}$$

$$t_{pr} = \Lambda_a Y_{pr} + \Sigma_{prmn} (u_{m,n} - \alpha_{mn} T) + \lambda_{prq} E_q + \Omega_{prsn} Y_{sn} - \Omega_{prsn} Y_{sn} u_{k.k} + \xi_{snp} Y_{sn} E_r \tag{94}$$

4.2. Lineer Termoelastisitede Isı Akısı Vektör Alanının Bünye Denkleminin Elde Edilmesi

Bu kısımda gerilme potansiyeli gibi bünye fonksiyonellerinden olan ısı akısı vektörü, bağlı olduğu bağımsız bünye değişkenlerine göre kuvvet serisine açılmış ve ısı akısı vektörü alanının lineer bünye denklemi bulunmuştur. Green deformasyon (C_{KL}) ve maddesel genleme (E_{KL}) tansörleri arasındaki bağıntıdan, ayrıca lineer teori kapsamında genleme tansörü yerine sonsuz küçük genleme tansörü yazılabileceğinden ısı akısı vektörü için verilen (62)-(64) denklemleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$Q_R = Q_R\,(\tilde{\mathrm{E}}_{KL}, Y_{KL}, E_K, G_K\,, \theta) \tag{95}$$

$$G_R\, Q_R(\tilde{\mathrm{E}}_{KL}, Y_{KL}, E_K, G_K, \theta) \geq 0 \tag{96}$$

$$Q_R(\tilde{\mathrm{E}}_{KL}, Y_{KL}, E_K, 0, \theta) = 0 \tag{97}$$

Bünye fonksiyoneli olan ısı akısı vektörünün, $G_L,\, E_M, \tilde{\mathrm{E}}_{LM}, Y_{LM}$ bağımsız bünye değişkenlerine göre analitik olduğu kabul edilip, $G_L = 0$, $E_M = 0$, $\tilde{\mathrm{E}}_{LM} = 0$ ve $Y_{LM} = 0$ civarında bir kuvvet (Taylor) serisine göre açılımı yapılarak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned} Q_R\,(\tilde{\mathrm{E}}_{LM}, Y_{LM}, E_M, G_L, \theta, \mathbf{X}) = {} & K_R\,(\theta, \mathbf{X}) + K_{RL}\,(\theta, \mathbf{X})\, G_L + K_{RM}\,(\theta, \mathbf{X})\, E_M + \\ & + K_{RLM}\,(\theta, \mathbf{X})\, \tilde{E}_{LM} + D_{RLM}\,(\theta, \mathbf{X}) Y_{LM} + \ldots \end{aligned} \tag{98}$$

Bu seri açılımında aşağıda verilen tanımlamalar kullanılmıştır.

$$\begin{aligned} & Q_R(\theta, \mathbf{X}) \equiv B_R\,(\theta, \mathbf{X}), \qquad K_{RL}\,(\theta, \mathbf{X}) \equiv \left. \frac{\partial Q_R}{\partial G_L} \right|_0, \qquad K_{RM}\,(\theta, \mathbf{X}) \equiv \left. \frac{\partial Q_R}{\partial E_M} \right|_0, \\ & K_{RLM}\,(\theta, \mathbf{X}) \equiv \left. \frac{\partial Q_R}{\partial E_{LM}} \right|_0, \quad D_{RLM}\,(\theta, \mathbf{X}) \equiv \left. \frac{\partial Q_R}{\partial Z_{LM}} \right|_0 \end{aligned} \tag{99}$$

Sonsuz küçük genleme tansörü ile fiber tansörünün simetrileri sebebiyle aşağıda verilen simetri şartları yazılabilir.

$$K_{RLM} = K_{RML}\;,\; D_{RLM} = D_{RML} \tag{100}$$

(97) ifadesi, $G_L = 0 \Rightarrow Q_R = 0$ olduğunu göstermektedir. Bu durumda (98) seri açılımından aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\underline{0} = K_R\,(\theta, \mathbf{X}) + K_{RLM}\,(\theta, \mathbf{X})\; \tilde{E}_{LM} + K_{RM}\,(\theta, \mathbf{X})\, E_M + D_{RLM}\,(\theta, \mathbf{X})\; Y_{LM} + \ldots \tag{101}$$

Bu ifadenin geçerli olması için, bu denklemdeki katsayıların sıfır olması gerekir.

$$K_R\,(\theta, \mathbf{X}) = K_{RM}\,(\theta, \mathbf{X}) = K_{RLM}\,(\theta, \mathbf{X}) = D_{RLM}\,(\theta, \mathbf{X}) = 0 \tag{102}$$

Bu durumda (98) denklemi aşağıdaki gibi yazılır.

$$Q_R = K_{RL}\,(\theta, \mathbf{X})\, G_L = K_{RL}(\theta, \mathbf{X})\, \theta_{,L} \tag{103}$$

(103) ve (96) ifadelerinden aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$K_{RL}(\theta,\mathbf{X})G_L\,G_R \geq 0 \tag{104}$$

Bu durumda $K_{RL}(\theta,\mathbf{X})$ tansörünün, her sıcaklık gradyanı için aşağıdaki şekilde yazılması gerekir.

$$K_{RL}\,\theta_{,R}\,\theta_{,L} \geq 0 \tag{105}$$

K_{RL} tansörü ısı iletim katsayıları tansörü olarak adlandırılır.

(49)ve (74) ifadelerinden ısı akısı vektörünün uzaysal formu aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$q_r = (1-u_{k,k})Q_R\,x_{r,R} \tag{106}$$

Isı akısı vektörünün maddesel formunu veren (103) denklemi, (106) ifadesinde yerine yazılıp (74) denklemindeki ilgili ifadeler kullanılırsa ısı akısı vektörünün uzaysal formu aşağıdaki gibi bulunur.

$$q_r = K_{rl}(\theta,\,\mathbf{X})\theta_{,l} \tag{107}$$

Bu denklemdeki K_{rl} uzaysal malzeme tansörü, K_{RL} maddesel malzeme tansörü cinsinden aşağıdaki gibi verilir.

$$K_{rl}(\theta,\,\mathbf{X}) \equiv \lambda_{rR}\,\lambda_{lL}\,K_{RL}(\theta,\,\mathbf{X}) \tag{108}$$

Lineer teori kapsamında K_{rl} uzaysal malzeme tansörü, aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$K_{rl}(\theta,\mathbf{X}) = K_{rl}(T_0+T,\mathbf{X}) = K_{rl}(T_0,\mathbf{X}) + \left.\frac{\partial K_{rl}(T,\mathbf{X})}{\partial T}\right|_{T=0} T + \ldots \cong K_{rl}(T_0,\mathbf{X}) \tag{109}$$

$\theta_{,l}$ sıcaklık gradyanı, (T) cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\theta_{,l} = (T_0 + T)_{,l} = T_{,l} \tag{110}$$

Bu durumda ısı akısı vektörünün uzaysal koordinatlardaki lineer bünye denklemi, (106), (108) ve (109) ifadelerinden aşağıdaki şekilde bulunur.

$$q_r = K_{rl}(T_0,\,\mathbf{X})\,T_{,l} \tag{111}$$

Bu denklem aynı zamanda Fourier ısı-iletim yasası olarak adlandırılır.

4.3. Alan Denklemlerinin Elde Edilmesi

Simetrik gerilmenin, asimetrik gerilmenin, polarizasyon vektörünün ve ısı akısı vektörünün uzaysal koordinatlardaki lineer bünye denklemleri sırasıyla (93), (94), (88) ve (111) ifadeleriyle ortaya konulmuştur. Bu kısımda ise elde edilen bu lineer bünye denklemleri, ilgili denge denklemlerinde yerlerine yazılarak alan denklemleri bulunmuştur.

(88), (7) ve (5) denklemlerinden aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$D_r = -\Gamma_{rq}\,\phi_{,q} + \vartheta_r T - \lambda_{klr}\, u_{k,l} - \xi_{snr} Y_{sn} + \xi_{snr} Y_{sn,r}\, u_{k,k} \tag{112}$$

Burada (Γ_{rp}) tansörü, $\Gamma_{rq} \equiv \varepsilon_0 \delta_{rq} - \omega_{rq}$ olarak verilmiştir. Bu ifadenin diverjansı alınıp (3) ifadesinde yerine yazıldığında aşağıdaki alan denklemi elde edilir.

$$0 = D_{r,r} = -\Gamma_{rq}\,\phi_{,qr} + \vartheta_r T_{,r} - \lambda_{klr}\, u_{k,lr} - \xi_{snr} Y_{sn,r} + [\,\xi_{snr}(Y_{sn,r} u_{k,k} + Y_{sn} u_{k,kr})\,] \tag{113}$$

(93), (88), (5) ve (29) denklemlerinden aşağıdaki alan denklemi bulunur.

$$\begin{aligned}\rho_0 \frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} &= \Sigma_{prmn}(u_{m,nr} - \alpha_{mn} T_{,r}) - \lambda_{prq}\,\phi_{,qr} + (\Lambda_a)_{,r} Y_{pr} + \Lambda_a Y_{pr,r} + \Omega_{prsn} Y_{sn,r} - \\ &- \Omega_{prsn}(Y_{sn,r} u_{k.k} + Y_{sn} u_{k.kr}) - \xi_{snr}(Y_{sn,r}\phi_{,p} + Y_{sn}\phi_{,pr}) + \rho_0\, \mathrm{f}_p \end{aligned} \tag{114}$$

$\theta = T_0 + T$ ve $\dfrac{\partial T}{\partial \theta} = 1$ olduğunu göz önüne alarak (57) ve (65) ifadeleriyle ortaya konulan entropi ve iç enerji yoğunluğu denklemleri için aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$\eta = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \Sigma}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial \theta} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \Sigma}{\partial T} \tag{115}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho_0}[\,\Sigma - (T_0 + T)\frac{\partial \Sigma}{\partial T}\,] - \frac{1}{\rho_0(1 - u_{m,m})} E_k P_k \tag{116}$$

(74), (115) ve (116) ifadelerinden aşağıdaki ifade bulunur.

$$\varepsilon = \frac{\Sigma}{\rho_0} + (T_0 + T)\eta - \frac{1}{\rho_0(1 - u_{m,m})} E_k P_k \tag{117}$$

(82) ifadesiyle verilen Σ’ nın T’ ye göre türevi alınıp (5) ifadesi kullanılarak (115) denkleminde yerine yazıldığında entropi için aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\eta = \eta_0 + \frac{cT}{T_0} + \frac{1}{\rho_0}(\tau_{kl} u_{k,l} - \vartheta_q \phi_{,q} + \chi_{sn} Y_{sn}) \tag{118}$$

(82), (88) ve (118) ifadeleri, (117) denkleminde yerlerine yazılıp (5) denklemi kullanılarak iç enerji yoğunluğu aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + cT + \frac{T_0}{\rho_0}(\tau_{kl}\, u_{k,l} - \vartheta_q\, \phi_{,q} + \chi_{sn} Y_{sn}) + \frac{1}{2\rho_0}[2(\xi_{sn} - \chi_{sn} T) Y_{sn} + \Omega_{klsn}(u_{k,l} - \xi_{qsn}\phi_{,q}) Y_{sn}] \quad (119)$$

Bu denklemde, $\varepsilon_0 = \psi_0 + T_0\,\eta_0$ şeklinde verilmektedir. Burada ε_0, ψ_0 ve η_0 sırasıyla doğal durumda iç enerji, serbest enerji ve entropi yoğunlukları olarak adlandırılmaktadır. Bu denklemin maddesel türevi alınıp (74) ifadeleri kullanılarak ve $u_{k,l}$, T ve $\phi_{,q}$ terimlerinin yalnızca lineer olan terimleri dikkate alınırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\rho\,\dot{\varepsilon} = \rho_0\,(1 - u_{k,k})\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \rho_0\, c\frac{\partial T}{\partial t} + T_0\,\tau_{kl}\frac{\partial u_{k,l}}{\partial t} - T_0\,\vartheta_q\frac{\partial \phi_{,q}}{\partial t} - \chi_{sn} Y_{sn}\frac{\partial T}{\partial t} +$$
$$+ \frac{1}{2}(\Omega_{klsn}\frac{\partial u_{k,l}}{\partial t} - \xi_{qsn}\frac{\partial \phi_{,q}}{\partial t}) Y_{sn} \quad (120)$$

(93), (5) ve (74) ifadelerinden, $\bar{t}_{kl}\, d_{kl}$ terimi aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\bar{t}_{kl}\, d_{kl} = \bar{t}_{kl}\frac{\partial \in_{kl}}{\partial t} = \{\Lambda_a\, Y_{kl} + \Sigma_{klmn}\,(u_{m,n} - \alpha_{mn}\, T) + \lambda_{kl\,q}\,(-\phi_{,q}) + \Omega_{klsn} Y_{sn}(1 - u_{m.m})\}\frac{\partial u_{k,l}}{\partial t} \quad (121)$$

(88) ve (5) ifadelerinden $\rho^{-1} E_k\, \dot{P}_k$ terimi aşağıdaki şekilde ortaya konulur.

$$\rho^{-1} E_k\, \dot{P}_k = \rho^{-1}(-\phi_{,k})(\vartheta_k\frac{\partial T}{\partial t} + \omega_{kq}\frac{\partial \phi_{,q}}{\partial t} - \lambda_{mnk}\frac{\partial u_{m,n}}{\partial t} + \xi_{snk}\, Y_{sn}\frac{\partial u_{m,m}}{\partial t}) \quad (122)$$

(122), (121), (120) ve (111) ifadeleri, enerjinin korunumu denklemi olan (41) denkleminde yerlerine yazılırsa aşağıdaki alan denklemi bulunur.

$$(T_0\,\tau_{kl} - \Lambda_a\, Y_{kl} - \frac{1}{2}\Omega_{klsn}\, Y_{sn})\frac{\partial u_{k,l}}{\partial t} - (T_0\,\vartheta_q + \xi_{qsn}\, Y_{sn})\frac{\partial \phi_{,q}}{\partial t} + (\rho_0\, c - \chi_{sn}\, Y_{sn})\frac{\partial T}{\partial t} =$$
$$= -\beta_{kl}\, T_{,lk} + \rho_0\,(1 - u_{l,l})\, h \quad (123)$$

5. Sonuçlar

Katı cisimlerin hepsinde olduğu gibi, kompozit malzemelerin de mekanik özelliklerinin tayin edilmesi için yük altında denemeye tabi tutulması gerekmektedir. Statik ve dinamik olarak yapılan bu denemeler genellikle tek eksenli yükleme durumu için yapılmaktadır. Tek eksenli denemeler malzeme hakkında önemli bilgiler verseler bile, tatbikat için yeterli değildir. Bu nedenle malzemenin iki ya da üç eksen doğrultusundaki yükleme durumları için denemeler yapılmalıdır. Farklı yükleme durumları için birden fazla eksenli denemeler yapmanın zorluğu bilinmektedir. Bu yüzden cisimlerin dış yüklemeler altındaki davranışları için bünye denklemlerinin oluşturulması önem arzetmektedir. Elde edilen bünye denklemlerinden malzemenin davranışına etki eden faktörler ortaya çıkmaktadır. Alan denklemleri ise ele alınan malzeme için göz önüne alınacak herhangi bir sınır değer probleminin matematiksel yapısını oluşturmaktadır.

Bu çalışmada tek fiber aileli piezoelektrik özellik taşıyan bir kompozit cismin, sıcaklığın sabit olmaması durumunda dış yüklemeler altındaki davranışı için lineer bünye denklemleri ortaya konulmuştur. Bu çalışmada; elektro-termomekanik denge denklemleri, fiber deformasyon geometrisi ve kinematiği ile ilgili denklemler, bünye teorisi aksiyomlarına ilişkin kavramlar, gerilme potansiyeli ile ısı akısı vektörü fonksiyonlarının (bünye fonksiyonellerinin), ve alan denklemlerinin bulunması malzemenin lineer davranışının matematiksel olarak modellenmesinde teorik temelleri oluşturmuştur. Bünye fonksiyonellerinden biri olan gerilme potansiyeli fonksiyonunun bağımsız bünye değişkenleri; Green deformasyon tansörü, fiber dağılım tansörü, elektrik alan vektörü ve sıcaklık olarak ortaya çıkmıştır. Diğer bünye fonksiyoneli ısı akısı vektörü fonksiyonunun ise gerilme potansiyeli fonksiyonunun bağımsız bünye değişkenleri ile birlikte sıcaklık alanı gradyanına bağlı olduğu görülmüştür. Bu çalışmada ele alınan kompozit malzemenin dış yüklemeler altındaki davranışını belirleyen gerilme tansörü, ısı akısı vektörü ve polarizasyon alanı vektörü sözü edilen bünye fonksiyonelleri vasıtasıyla bulunmuştur. Simetrik gerilme tansörü ile polarizasyon alanı vektörü, gerilme potansiyeli fonksiyonundan türetilirken, ısı akısı vektörü ise bağımsız bünye değişkenleri belli olan vektörel bir fonksiyon olarak ortaya çıkmıştır. Fiber ailesinin uzamazlığı birçok mühendislik malzemesinin yapısına uyduğundan fiber ailesi uzamaz kabul edilmiştir. Ayrıca kompozit malzeme fiber boyunca yön değişimine duyarsız kalacağından matematiksel olarak fiber vektörünün $\mathbf{B}\rightarrow-\mathbf{B}$ değişiminden etkilenmeyeceği için fiber vektörünün bileşenlerinin dış çarpımı olan simetrik bir tansör tanımlanmıştır. Kompozit ortamın hem piezoelektrik özelliğinden hem de fiber takviyesinden dolayı güçlü bir anizotropiye sahip olduğu kabul edilmiştir. Ayrıca kompozit malzemenin piezoelektrik özellik taşıması sebebiyle anizotrop ortamın sıkışabilir olduğu varsayılmıştır.

Kompozit ortamın referans konumu, bir T_0 üniform sıcaklığında, gerilmesiz ve polarize olmayan doğal durum olarak seçilmiştir. Bu referans konumundan itibaren küçük yer ve şekil–değiştirmeler, küçük elektriksel etkileşimler ve de küçük sıcak değişimleriyle ayrıldığı varsayılmıştır. Bu durumda bünye fonksiyonellerinin (Σ ve Q_K) bağlı oldukları bağımsız bünye değişkenlerine göre bir kuvvet (Taylor) serisine açılımı yapılmıştır. Seri açılımında alınan terimlerin türü ve sayısı belirlenirken etkileşimlerin tümü lineer kabul edilmiştir. Lineer termoelastisite için simetrik gerilme tansörünün, toplam gerilme tansörünün, polarizasyon alanı vektörünün ve ısı akısı vektörünün lineer bünye denklemleri sırasıyla (93), (94), (88) ve (111) denklemleri ile ortaya konulmuştur. Elde edilen lineer bünye denklemlerden, bu çalışmada ele alınan kompozit malzemenin yapısından ve özelliğinden kaynaklanan yeni terimlerin mevcut olduğu görülmektedir.

Polarizasyon alan vektörünün, simetrik gerilme tansörünün ve lineer momentumun ve enerjinin korunumu denklemlerinde yer alan büyüklüklerin teker teker elde edilip yerlerine yazılması sonucunda (113), (114) ve (123) ifadeleri ile ortaya konulan alan denklemleri bulunmuştur. Bulunan alan denklemleri; T, u_k, $\phi_{,k}$ bilinmeyenlerini içermektedir. Bu bilinmeyenler tayin edilerek ortaya konulan lineer bünye denklemlerinden simetrik gerilme, asimetrik gerilme, polarizasyon alan vektörü ve ısı akısı vektörü bulunabilir. Ayrıca sözü edilen alan denklemleri simetri açısından genel anlamda anizotropik yapıda oldukları için farklı simetri özelliği taşıyan malzemelere de uygulanabilirler.

Sıcaklığın sabit olmamasından kaynaklanan termal etkilerin, fiber takviyeli kompozit malzemelerin teknolojideki uygulamalarında, özelllike imalat aşamasında büyük önemi bulunmaktadır. Bundan dolayı fiber takviyeli ve piezoelektrik özellik taşıyan kompozit malzemelerin dış yüklemeler karşısındaki elekro-termoelastik davranışının ortaya konulması gerekmektedir. Bu çalışmada, uzamaz keyfi tek fiber ailesi ile takviye edilmiş, sıkışabilir anizotrop ortam olan ve piezoelektrik özellik taşıyan kompozit bir malzemenin lineer elekro-termoelastik davranışı için matematiksel model geliştirilmiştir. Bunun için Sürekli Ortamlar Mekaniği kapsamında bir yol izlenip teorik bir çalışma ortaya konulmuştur. Elde edilen matematiksel formülasyon ile fiber takviyeli olup piezoelektrik özellik taşıyan ve sıcaklık değişimine bağlı kompozit malzemelerin dış yüklemeler karşındaki lineer davranışının belirlenmesi, bu tür kompozitler için yapılacak deneylere bir alt yapının hazırlanmasına katkı sağlayabilecektir.

6. Kaynaklar

1. Demirtürk S., 2011, “Fiber Takviyeli Piezoelektrik Kompozit Malzemelerin Elektro-Termoelastik Analizi”, Master Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Isparta.

2. Öntürk, N., 1993, “İki Fiber Ailesi ile Takviyeli Viskoelastik Kompozit Ortamlarda Bünye Denklemlerinin Modellenmesi”, Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

3. Erdem, A. Ü., Usal. M. R., Usal. M., 2005, “Keyfi Fiber Takviyeli Viskoelastik Piezoelektrik Bir Cismin Elektro-Termomekanik Davranışı İçin Matematiksel Bir Model’’, Gazi Üniv. Müh. Mim. Fak. Dergisi, 20(3) 305-319.

4. Mikata, Y. 2000, “Determination of piezoelectric Eshelby tensor in transversely isotropic piezoelectric solids’’, Int. J. Eng. Sci., 38, 605-641.

5. Dinzart, F., Sabar, H. 2009, “Electroelastic behavior of piezoelectric composites with coated reinforcements: Micromechanical approach and applications’’, Int. J. Sol. and St., 46, 3556–3564.

6. Tong, Z.H., Lo, S.H., Jiang, C.P., Cheung, Y.K. 2008, “An exact solution for the three-phase thermo-electro-magneto-elastic cylinder model and its application to piezoelectric-magnetic fiber composites’’, Int. J. Sol. and Str., 45, 5205–5219.

7. Timoshenko, S.P., Goodier, J.N., 1970, “Theory of Elasticitiy’’, Mcgraw Hill, 567p.

8. Lubarda, V.A., 2004, “On Thermodynamic Potentials in Linear Thermoelasticity’’, Int. J. Sol. Str., 41(26), 7377-7398.
9. Usal, M., Hamamcı, B. 2011, “A Mathematical Model for the Linear Constitutive Equations of a Thermoelastic Composite Continuum Reinforced by Single Family of Arbitrarily Fiber’’, J. Fac. Eng. Arch. Gazi Univ., 26(2), 315-324.

10. Maugin, A.G., Berezovski, A., 1999, "Material Formulation of Finite-Strain Thermoelasticity and Applications'', J. Ther. Stres. 22(4 and 5), 421-449.

11. Kalpakides, K.V., Dascalu, C., 2002, "On the Configurational Force Balance in Thermamechanics, Proceedings'', Math., Phy. and Eng. Sci., 458(2028), 3023-3039.

12. Eringen, A.C., 1966, "A Unified Theory of Thermomechanical Materials'', Int. J. Engng. Sci., 4, 179-202.

13. Mindlin, R.D., 1972, "Elasticity, Piezoelectricity and Crystal Lattice Dynamics'', J. Elasticity, 2, 217-282.

14. Tiersten, H.F., 1971, "On The Nonlinear Equations of Thermoelectro-Elasticity'', Int. J. Eng. Sci., 9, 587-604.

15. Nowacki, W., 1975, "Dynamic Problems of Thermoelasticity'', Noordhoff International Publishing, Netherlands.

16. Usal, M., Usal, M. R. Kurbanoğlu, C., 2009, "A Mathematical Model for the Electrothermomechanical Behavior of Viscoelastic Piezoelectric Body Having Hegzagonal Simetry'', Sci. and Eng. Comp. Mater., 16, 153-171.

17. Usal M., Usal M.R, Erdem, A.Ü., 2009, "On Magneto-Viscoelastic Behavior of Fiber-Reinforced Composite Materials Part - I: Anisotropic Matrix Material'', Sci. and Eng. Comp. Mater., 16, 41-56.

18. Usal, M.R, 2007, "A Constitutive Formulation of Arbitrary Fiber- Reinforced Viscoelastic Piezoelectric Composite Materials-I'', İnt. J. Non. Sci. Numer. Simul., 8, 2, 257-274.

19. Usal, M., Usal, M.R., and Esendemir, Ü. 2008, "A Continuum Formulation for Fiber - Reinforced Viscoelastic Composite Materials with Microstructure Part-I: Anisotropic Matrix Material'', Sci. and Eng. Comp. Mater., 15(3), 217-234.

20. Usal, M.R, Usal, M., and Esendemir, Ü. 2006, "A Mathematical Model for Thermomechanical Behavior of Arbitrary Fiber Reinforced Viscoelastic Composites–I'', Sci. and Eng. Comp. Mater., 13(4), 291-300.

21. Usal, M. 2010, "A Constitutive Formulation for the Linear Thermoelastic Behavior of Arbitrary Fiber-Reinforced Composites'', Mathem. Prob. Eng., (2010), Article ID 404398, 19 pages.

22. Usal, M. 2010, "Formulation of the Linear Constitutive Equations of Thermoelastic Piezoelectric Materials'', Electronic Journal of Machine Technologies, **7** (1), 13-30.

23. İnan, M. 1970, "Cisimlerin Mukavemeti'', II. Baskı, Ofset Matbaacılık Ltd. Şti., İstanbul.

24. Spencer, A.J.M. 1984, “Continuum Theory of the Mechanics of Fibre Reinforced Composites’’, Spencer, Springer Verlag, 284 p, New York.

25. Usal, M.R. 1994, “A mathematical model for the electro-thermomechanical behaviour of fiber reinforced elastic dielectric media’’, Ph. D. Thesis, Erciyes University, Institute of Science and Technology, Kayseri, pp: 108.

26. Hamamcı, B. 2006, “A mathematical model for fiber reinforced thermoelastic materials’’, Master Thesis, Süleyman Demirel Univ., Institute of Science and Technology, Isparta, pp: 93.

27. Eringen, A.C., Maugin,G.A., 1990, “Electrodynamics of continua: Foundations and Solid Media’’, Springer-Verlag, New York.

28. Maugin, G.A., 1991, “Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids’’, North – Holland Series Applied Mathematics and Mechanics, Elsevier Scie. Netherlands.

29. Eringen, A.C., 1980, “Mechanics of Continua’’, Robert E. Krieger Pub. Co., Hungtington, New York.

30. Şuhubi E.S., 1994, “Continuum mechanics–Introduction’’, İ.T.U., Faculty of Arts and Sciences Publication. İstanbul.