Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
Sayı:10 Mayıs 2006 ISSN - 1302 - 3055

TWO ALTERNATIVE METHODS FOR SEMI-POSITIVE ORTOGONAL MATRICES

B. BÜKCÜ*

*Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 60200, Taşlıçiftlik-Tokat, Türkiye, e-mail: bbukcu@yahoo.com veya bukcu@gop.edu.tr

ABSTRACT

In this study are two alternative methods given for rotation of semi-positive orthogonal matrix and found rotation axis and rotation angle with those methods.

Keywords: *Lorentz space, Semi- skewsymmetric matrix, Semi-rotation matrix.*

SEMİ-POZİTİF ORTOGONAL MATRİSLER İÇİN ALTERNATİF İKİ YÖNTEM (Doğru mudur?)

ÖZET

Bu çalışmada, semi pozitif ortogonal dönme matrisinin bulunmasında alternatif diye adlandırılan iki farklı metot veriliyor. Ayrıca, semi-pozitif ortogonal *A* matrisine karşılık gelen eksen ve açı formülize ediliyor.

Anahtar Kelimeler: *Lorentz uzayı, Semi-antisimetrik matris, Semi-dönme matrisi.*

1. TEMEL KAVRAMLAR

Teorem 1.1 f reel değişkenli, reel katsayılı bir polinom ve A bir kare matrisi olsun. $Au = \lambda u \ \ (u \neq 0)$ ise $f(A)u = f(\lambda)u$ ' dır. Başka bir ifadeyle, A' nın bir öz değeri λ ise $f(A)$ ' nın öz değeri $f(\lambda)$ dır [1].

Tanım 1.1 V , bir Lorentz uzayı olsun. $v \in V$ için**,**

$< v, v >> 0$ veya $v = 0$ ise v ' ye spacelike vektör,
$< v, v >< 0$ ise v ' ye timelike vektör,
$< v, v >= 0$ ise v ' ye null (lightlike) vektör,

denir [2].

Teorem 1.2 Bir Lorentz uzayında *u* ve *w* gibi iki timelike vektör aynı konidedir ancak ve ancak $< u, v > < 0$ ' dır [2].

Tanım 1.2 $A^{-1} = \varepsilon A^T \varepsilon$ eşitliğini sağlayan bir A matrisine, semi-ortogonal matris denir. Burada işaret matrisimiz olan ε, bir köşegen matris olup, ilk v bileşeni " -1" ve diğer bileşenleri "+1" dir [2].

Tanım 1.3 $S^T = -\varepsilon S \varepsilon$ eşitliğini sağlayan bir *A* matrisine, Lorentz anlamında antisimetrik matris denir [2].

$S = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ matrisi $S^T = -\varepsilon S \varepsilon$ şartını sağladığından Lorentz anlamında bir antisimetrik matristir. Ayrıca $S \leftrightarrow s = (a, b, c)$ ise S.s=0' dır [2].

Tanım 1.4 $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n) \in E^n$ olsun.

$$<,>: E^n x E^n \longrightarrow R$$
$$(x, y) \longrightarrow < x, y > = -\sum_{i=1}^{v} x_i y_i + \sum_{j=v+1}^{n} x_j y_j$$

metrik tensörüne sahip E^n uzayına, semi Öklidiyen uzay denir ve E_v^n ile gösterilir. $n \geq 2$ olmak üzere E_v^n ' ye, Minkowski uzayı denir. Eğer $x = y$ ise $\sqrt{|< x, x >|}$ reel sayısına x vektörünün normu denir [2].

Tanım 1.5 $x = (x_1, x_2, x_3),\ y = (y_1, y_2, y_3) \in E^3$ gibi iki vektörün Lorentz anlamında standart vektörel çarpımı,

$$x \wedge y = (x_3 y_2 - x_2 y_3, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

biçiminde tanımlanır. Eğer x vektörüne karşılık gelen antisimetrik matris X ise $X.y = x \wedge y$ dir [2].

Tanım 1.6 Her *i*, *j* için, b_{ij}^k elemanları b_{ij} ' ye yakınsıyor ise $B_k = \left[b_{ij}^k \right]$ matrislerinin $\left\{ B_k \right\}$ dizisi de, $B = \left[b_{ij} \right]$ matrisine yakınsar [1].

Tanım 1.7 $\{S_k\}$ dizisinin kısmi toplamları *B* ye yakınsak ise $\sum_{n=0}^{\infty} B_n$ sonsuz serisi, *B*' ye yakınsar, burada $S_k = \sum_{n=0}^{k} B_n$ 'dır.

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{k!} = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots$$

biçiminde verilen sonsuz serilerin keyfi bir *A* matrisine yakınsadığı görülür. Böylece e^A, her matris için tanımlıdır [1].

Teorem 1.3 *S*, Lorentz anlamında antisimetrik matris ve *S* ile birleştirilmiş vektör $s = (a,b,c)$ olsun. *S* spacelike bir vektör ise *S* ' nin öz değerleri; 0, -1 ve 1' dir.

İspat: $\det(S - \lambda I) = 0$ ' dan, $-\lambda^3 + (-a^2 + b^2 + c^2)\lambda = 0$ eşitliğine varılır. S spacelike ve birim vektör olduğundan, $\lambda = 0$ ve ± 1 olur.

2 ALTERNATİF YÖNTEMLER

2.1 Lineer Cebir Yöntemi

Birinci alternatif yöntem, lineer cebir metodunu kullanarak semi pozitif ortogonal *A* matrisini bulmanın yöntemini veren bir metodtur.

Teorem 2.1 E_1^3 uzayında**, s** spacelike ekseni etrafında θ kadarlık bir Lorentziyan dönme $R(s,\theta)$ ile gösterilsin. Bu durumda,

$$R(s,\theta) = Ar\,,$$

dir. Burada $A = S^0 + (\sin h\theta)S + (\cos h\theta - 1)S^2 = f(S)$ ' dir. Aynı zamanda *A* pozitif semi ortogonal bir matristir.

İspat : E_1^3 uzayında, keyfi bir *r* vektörü, *s* spacelike ve ξ timelike bir vektör olmak üzere

$$r = ks + \xi,\ k \in R\,,$$

biçiminde ifade edilebilir.

s spacelike bir eksen ve ξ timelike bir vektör olsun. ξ vektörünü, kendisine dik olan *s* ekseni etrafında θ kadar döndürdüğümüzde elde edilecek semi pozitif ortogonal *A* matrisini bulalım.

(i) Lorentz düzleminde ξ timelike vektörü, *s* space ekseni boyunca θ kadar döndürülürse,

$$R(s,\theta)\xi = (\cos h\theta)\xi + \sin h\theta(s \wedge \xi)$$

$$R(s,\theta)\xi = \left(\cos h\theta\right)\xi + \sin h\theta(S\xi)$$
$$R(s,\theta)\xi = \left(\cos h\theta\right)\xi + \sin h\theta(Sr)$$

elde edilir.

Ayrıca aşağıdaki eşitlikleri, (ii) şıkkında kullanacağız.

$$\begin{aligned} s\wedge(s\wedge\xi) &= \langle s,s\rangle\xi - \langle s,\xi\rangle s \text{ [2].} \\ &= \langle s,s\rangle\xi - 0.s \\ &= 1.\xi \\ &= \xi\,. \end{aligned}$$

Son eşitlikten,

$$s\wedge(s\wedge\xi)=\xi \text{ veya } S^2\xi=\xi$$

elde edilir.

$$r = ks + \xi\,, \text{ (} r \text{ başlangıç pozisyon vektörüdür.)}$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} s\wedge\xi &= S.\xi \\ s\wedge r &= Sr \\ s\wedge r &= S(ks+\xi) \\ &= kSs + S\xi \\ s\wedge r &= S\xi \end{aligned}$$

dir.

(ii) $r\in E_1^3$ olsun. Bu durumda dönme matrisi aşağıdaki işlemlerden sonra

$$\begin{aligned} R(s,\theta)r &= R(s,\theta)(ks+\xi) \\ &= R(s,\theta)(ks) + R(s,\theta)\xi \\ &= ks + R(s,\theta)\xi \\ &= ks + \left(\cos h\theta\right)\xi + \left(\sin h\theta\right)Sr \\ &= r + \left(\cos h\theta - 1\right)S^2\xi + \left(\sin h\theta\right)Sr \\ &= r + \left(\cos h\theta - 1\right)S^2 r + \left(\sin h\theta\right)Sr \\ &= \left[I + (\sin h\theta)S + (\cos h\theta - 1)S^2\right]r \end{aligned}$$

$$R(s,\theta).r = [S^0 + (\sin h\theta)\,S^1 + (\cos h\theta - 1)\,S^2)]r$$
$$R(s,\theta).r = A.r$$
$$A = S^0 + (\sin h\theta)\,S^1 + (\cos h\theta - 1)\,S^2) = f(S)\,.$$

biçiminde bulunur. Şimdi *A* matrisinin semi ortogonal olduğunu gösterelim. Yani,

$$A^{-1} = \varepsilon A^T \varepsilon$$

dır. Gerçekten,

$$A^T = S^0 + (\sin h\theta)S^T + (\cos h\theta - 1)\left(S^T\right)^2$$
$$\varepsilon A^T\varepsilon = \varepsilon\left[S^0 + (\sin h\theta)S^T + (\cos h\theta - 1)(S^2)^T\right]\varepsilon$$
$$\begin{aligned}\varepsilon A^T\varepsilon &= \varepsilon S^0\varepsilon + \varepsilon(\sin h\theta)S^T\varepsilon + \varepsilon(\cos h\theta - 1)(S^2)^T\varepsilon \\ &= \varepsilon^2 S^0 + (\sin h\theta)\varepsilon S^T\varepsilon + (\cos h\theta - 1)(S^T S^T)\varepsilon \\ &= S^0 - (\sin h\theta)S + (\cos h\theta - 1)\varepsilon S^T.1.S^T\varepsilon \\ &= S^0 - (\sin h\theta)S + (\cos h\theta - 1)\varepsilon S^T.\varepsilon^2.S^T\varepsilon \\ &= S^0 - (\sin h\theta)S + (\cos h\theta - 1)(\varepsilon S^T\varepsilon)(\varepsilon.S^T\varepsilon) \\ &= S^0 - (\sin h\theta)S + (\cos h\theta - 1)(-S)(-S)\end{aligned}$$
$$\varepsilon A^T\varepsilon = S^0 - (\sin h\theta)S + (\cos h\theta - 1)S^2 = f(-S)$$

dır. Diğer taraftan,

$$R^{-1}(s,\theta) = R(-s,\theta) = f(-S)$$

$$A^{-1} = S^0 - (\sin h\theta)S + (\cos h\theta - 1)S^2$$

olduğundan,

$$A^{-1} = \varepsilon A^T\varepsilon$$

elde edilir. Dolayısıyla *A* semi ortogonaldir. Şimdi de *A* matrisinin determinant'ının "+1" olduğunu gösterelim.

$$A = f(S)$$

dir. *S* semi antisimetrik matrisinin öz değerleri Teorem 1.3 den dolayı 0, -1, 1' dir. Teorem 1.1 den dolayı da $f(S)$ ' in öz değerleri de,

$$f(0) = 1 + (\sin h\theta).0 + (\cos\theta - 1).0^2 = 1$$
$$f(1) = 1 + (\sin h\theta).1 + (\cos\theta - 1).1^2 = e^{\theta}$$
$$f(-1) = 1 + (\sin h\theta).(-1) + (\cosh\theta - 1).(-1)^2 = e^{-\theta}$$

dir. Bir matrisin determinantı baz değişiminden bağımsız olduğu için,

det A= $1.\,e^{\theta}.e^{-\theta} = 1$

dir. Böylece *A*, bir semi pozitif ortogonal matristir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Şimdi, verilen bir semi pozitif ortogonal *A* matrisine karşılık gelen açıyı ve ekseni bulalım.

Teorem 2. 2. *A*, "-1" öz değerine sahip olmayan pozitif semi ortogonal bir matris olsun. Bu durumda *A*' ya karşılık gelen Lorentziyan (hiperbolik) açı ve eksen sırasıyla,

$$IzA = 1 + 2\cosh\theta \text{ ve } A - A^{-1} = (2\sinh\theta)S$$

eşitliklerinden elde edilir.

İspat: **(i)** İz operatörünün lineerlik özelliğinden,

$$
\begin{aligned}
A &= S^0 + (\sinh\theta)S + (\cosh\theta - 1)S^2 \\
&= Iz\left[S^0 + (\sinh\theta)S + (\cosh\theta - 1)S^2\right] \\
&= Iz\left(S^0\right) + Iz\left[(\sinh\theta)S\right] + Iz\left[(\cosh\theta - 1)S^2\right] \\
IzA &= 3 + \left(\sinh\theta\right) Iz(S) + Iz\left[(\cosh\theta - 1)S^2\right] \\
&= 3 + \left(\sinh\theta\right)0 + (\cosh\theta - 1)(b^2 + c^2 + c^2 - a^2 + b^2 - a^2) \\
&= 3 + (\cosh\theta - 1).2.(-a^2 + b^2 + c^2);\ s\ spacelike \\
&= 3 + (\cosh\theta - 1).2.1 \\
&= 3 + 2\cosh\theta - 2 \\
&= 1 + 2\cosh\theta
\end{aligned}
$$

bulunur.

(ii) Dönme açısı $A - A^{-1}$' den bulunur. Bu fark hesaplanırsa,

$$A - A^{-1} = (2\sinh\theta)S$$

bulunur.

2. 2 Lorentziyen Dönme Matrisinin Üstel Formu

İkinci alternatif yöntemimiz, matrislerin üstel formunu kullanarak semi pozitif ortogonal *A* matrisini elde etmek için kullanılan metodtur.

Teorem 2.3 **(a)** *n=2* için, $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda, Lorentz düzleminde *S* matrisi ile birleştirilmiş, $s = (0,1)$ spacelike vektörü için dönme matrisi

$$\mathrm{e}^{\theta S} = (\cosh\theta)I + (\sinh\theta)S$$

dır.

(b) $n = 3$ ve $S = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow s = (a,b,c)$; $\|s\| = 1$ olsun. Bu durumda Lorentz düzleminde S spacelike vektörü için dönme matrisi

$$\mathrm{e}^{\theta S} = I + (\sinh\theta)S + (\cosh\theta - 1)S^2$$

dır.

İspat: (a)

$$e^{\theta S} = I + \frac{(\theta S)}{1!} + \frac{(\theta S)^2}{2!} \cdots + \frac{(\theta S)^n}{n!} + \cdots$$

$$e^{\theta S} = \left[\frac{(\theta S)}{1!} + \frac{(\theta S)^3}{3!} + \cdots\right] + \left[I + \frac{(\theta S)^2}{2!} + \frac{(\theta S)^4}{4!} + \cdots\right]$$

$$S^2 = I, S^4 = I, \ldots, S^{2n} = I \text{ ve } S^{2n+1} = S;\ n = 0,1,2,\ldots$$

$$e^{\theta S} = \left[\frac{\theta}{1!} + \frac{\theta^3}{3!} + \cdots\right]S + \left[1 + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots\right]I$$

$$\mathrm{e}^{\theta S} = (\cosh\theta)I + (\sinh\theta)S$$

elde edilir. Hatta açık yazılırsa,

$$\mathrm{e}^{\theta S} = (\cosh\theta)I + (\sinh\theta)S = \sinh\theta\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} + \cosh\theta\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{e}^{\theta S} = \begin{bmatrix}\cosh\theta & \sinh\theta\\ \sinh\theta & \cosh\theta\end{bmatrix} = A(\theta)$$

Lorentz (hiberbolik) düzleminde alışılmış dönme matrisi elde edilir. $A^{-1} = \varepsilon A^T \varepsilon$ eşitliği sağlandığından ve $\det A(\theta) = 1$ olduğundan, A semi pozitif ortogonal matristir.

(b) (a)' daki benzer işlemler burada da yapılırsa,

$$e^{\theta S} = I + \frac{(\theta S)}{1!} + \frac{(\theta S)^2}{2!} \cdots + \frac{(\theta S)^n}{n!} + \cdots$$

$$e^{\theta S} = I + \left[\frac{(\theta S)}{1!} + \frac{(\theta S)^3}{3!} + \cdots\right] + \left[\frac{(\theta S)^2}{2!} + \frac{(\theta S)^4}{4!} + \cdots\right]$$

yazılabilir. Diğer taraftan,

$$S^2 = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & c^2-a^2 & bc \\ ac & -bc & b^2-a^2 \end{bmatrix}$$

$$S^3 = \begin{bmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & c^2-a^2 & bc \\ ac & -bc & b^2-a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} = S$$

$$S = S, S^3 = S, S^5 = S, ..., S^{2n+1} = S;\ S^{2n+2} = S^2,\ n = 0,1,2,...$$

eşitlikleri vardır. Yukarıdaki eşitlikler de göz önünde tutulursa,

$$e^{\theta S} = I + \left[\frac{\theta S}{1!} + \frac{\theta^3 S}{3!} + \cdots\right] + \left[S^2 - S^2 + \frac{\theta^2 S^2}{2!} + \frac{\theta^4 S^2}{4!} + \cdots\right]$$

$$e^{\theta S} = I + \left[\frac{\theta}{1!} + \frac{\theta^3}{3!} + \cdots\right] S + \left[\left(1 + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots\right) - 1\right] S^2$$

$$\mathrm{e}^{\theta S} = S^0 + (\sinh\theta)S + (\cosh\theta - 1)S^2$$

bulunur.

S ' nin timelike vektör seçilmesi durumunda, yukarıdaki benzer işlemler yapılırsa,

$$\mathrm{e}^{\theta S} = S^0 + (\sin\theta)S + (1 - \cos\theta)S^2$$

bulunur.

KAYNAKLAR

[1] Bronson, R., “Matrix Methods: An Introduction Academic Press, Boston, 254-255, 262-264 (1991).

[2] O’Neill, B., “Semi-Riemann Geometry with Application to Relativity”, Academic Press, New York, 278-292 (1983).