



## ROBUSTNESS ANALYSIS OF AN INVERTED PENDULUM SYSTEM UNDER LINEAR QUADRATIC CONTROLLERS

A. YAZICI\*, A. KARAMANCIOĞLU

Osmangazi Üniversitesi, Mühendislik Mimarlık Fakültesi,  
Elektrik Elektronik Mühendisliği Bölümü, 26480, Batımeşelik, Eskişehir, TÜRKİYE  
(\* Yazımadan sorumlu yazar)  
[ayazici@ogu.edu.tr](mailto:ayazici@ogu.edu.tr), [akaraman@ogu.edu.tr](mailto:akaraman@ogu.edu.tr)

### ABSTRACT

In this paper we analyze the robustness of an inverted pendulum system with respect to its parameter changes when it is subjected to various linear quadratic controllers. Considering the controllers that satisfy certain performance criteria for the linear model of the inverted pendulum system, the least upper bounds in which parameter changes cause instability are obtained. For the controllers under consideration, the robustness analyses are carried out in the following order: the case of one parameter change at a time in the linearized model by using analytical methods, the case of one parameter change at a time in the nonlinear model by using simulation-based methods, and the case of simultaneous change of many parameters at a time in the linear model by using the  $\mu$ -analysis. Suitability of various analysis techniques considering whether the model is linear or nonlinear, and whether one parameter changes at a time or not, and whether the input is bounded or not are analyzed.

**Keywords:** *Simulation-based robustness analysis, Linear quadratic control, Inverted pendulum, Structured singular value*

## DOĞRUSAL KUADRATİK KONTROL ALTINDAKİ TERS SARKAÇ SİSTEMİNİN GÜRBÜZLÜK İNCELENMESİ

### ÖZET

Bu çalışmada, doğrusal-kuadratik kontrol yönteminin ters sarkaç sistemi parametre değişimlerine karşı gürbüzlük analizi yapılmıştır. Ters sarkaç sistemi doğrusal modelinde belli performans kriterlerini sağlayan denetleyici matrisleri için, doğrusal ve doğrusal olmayan model kullanılarak sistem parametrelerinin değişimi sırasında kararlılığın bozulduğu en küçük üst sınır değerleri bulunmaktadır. İncelenen denetleyiciler için sırasıyla: analitik yöntemler kullanılarak doğrusal modelde aynı anda bir parametre değişmesi durumu, benzetim yöntemiyle doğrusal olmayan modelde sınırlı ve sınırsız girdi için aynı anda bir parametrenin değişmesi durumu, ve  $\mu$ -analizi teknikleri ile doğrusal modelde aynı anda birden çok parametrenin değişmesi durumu gürbüzlük analizleri yapılmaktadır. Sistemlerin doğrusal veya doğrusal olmayan modeli, sınırlı girdiye sahip olup olmaması, aynı anda bir veya daha fazla parametre değişim durumları için çeşitli gürbüzlük analiz yöntemlerinin uygunlukları incelenmektedir.

**Anahtar Kelimeler:** *Benzetim Tabanlı Gürbüzlük analizi, Doğrusal Kuadratik Kontrol, Ters sarkaç, Yapısal Tekil Değer*

## 1. GİRİŞ

Ters sarkaç sistemi, denetleyici tiplerini test etmek için literatürde bilinen klasik materyallerdendir. İnceleyeceğimiz denetim problemi bir denetim girişi kullanarak iki çıkış değişkeninin (araba konumu ve sarkaç açısının) kararsız denge noktası etrafında denetimini amaçlamaktadır. Problemdaki derinliği, konum ve açı değişkenlerinin denetim girişinden çelişen taleplerde bulunmaları oluşturmaktadır. Bu talepleri her iki çıkış değişkenini de tatmin edecek şekilde karşılamak ve sistem parametrelerinin belirsizliği durumunda bunu gürbüz bir yapıda gerçekleştirmek kontrol mühendisi için bir sınav oluşturmaktadır.

Belirsizlik terimi, gerçek sistemle kurulan model arasındaki farka karşılık gelmekte olup fiziksel sistemlerde parametrik, modellenmemiş dinamikler gibi değişik tipler belirsizlikler olabilir [1]. Doğrusal sistemlerde belirsizliklerin yapılarının bilinmesi durumunda muğlaklık aralığı küçük sonuçlar veren gürbüzlük analizi mümkündür. Ancak daha eski tarihçesi olan yapısal olmayan (*unstructured*) belirsizlikler için oluşturulmuş matematiksel formülasyonlar muğlaklık aralığı geniş sonuçlara yol açmaktadır. Belirsizliklerin yapısal olarak ifade edilebildiği durumlarda yapısal (*structured*) analiz yöntemlerinin kullanılması mutlaka daha yerinde olacaktır. Bu çalışmada, doğrusal kuadratik denetleyicilerle oluşturulan, yapısı bilinen kapalı çevrim ters sarkaç sisteminin parametrik belirsizliklere karşı kararlılığını incelenmektedir. Doğrusal olmayan asıl modelde, sınırlı girdi kısıtını gözeterik, belirsizliklerin kararlılık üzerine etkilerinin incelenmesini benzetim yöntemiyle gerçekleştirmekteyiz [2].

İzleyen kısımda ters sarkaç modeli tanımlanmakta ve çeşitli doğrusal-kuadratik denetleyiciler ters sarkaç sistemine uygulanmaktadır. Daha sonra ise, yükselme zamanı, durulma zamanı, maksimum yüzde aşma hatası gibi zaman alanı performans kriterlerini sağlayan denetleyiciler [2] için, sistem parametre değişimine karşı denetleyicilerin gürbüzlüğü, değişik gürbüzlük analiz yöntemleri ile irdelenmektedir

İlk olarak, analitik gürbüzlük analiz yöntemi ile doğrusal sistem modelindeki sistem parametrelerinin tek başına değişimi sırasında kararlılığın bozulduğu en küçük üst sınır değerleri ve karşılık gelen geri besleme matrisleri bulunmaktadır. Ardından, nonlinear sistem modelinde, benzetim yoluyla sistem parametrelerinin bir anda birinin değişimi durumunda, sınırlı ve sınırsız girdi için gürbüzlük analizler yapılmaktadır. Son olarak ise,  $\mu$ -analizi teknikleri kullanılarak, aynı anda birden fazla sistem parametresinde olabilecek değişimlere karşı gürbüzlük analizi yapılmaktadır. Bu analiz, analitik ve benzetim tabanlı incelemelerde en gürbüz (parametre değişimine en az duyarlı) denetleyici matrisi kullanılarak yapılmaktadır.

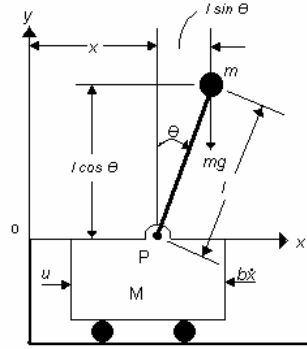
## 2. TERS SARKACIN MODELLENMESİ

Ters sarkaç sistemi dinamik zenginliği açısından kontrol sistemleri karşılaştırmasında klasik materyallerden olup literatürde değişik modeller kullanılmaktadır ([3], [4]). Bu çalışmada kullanılacak ters sarkaç modeli, Şekil 1 deki gibi uzunluğu  $l$ , kütlesi  $m$  olan çubuğun,  $M$  kütleli bir aracın üzerine P noktasından monte edilmesinden oluşmaktadır. Çubuk hareketi tek düzlemle sınırlandırılmış olup P noktasından geçen dikey doğrultu ile yaptığı açı  $\theta$  ve yatay ekseninde belli bir referans noktasına olan uzaklığı  $x$  değişkenleri ile temsil edilmektedir. Araç sistem girdisi  $u$  ile  $x$  eksenine doğrultusunda hareket edebilmekte

olup, bu harekete ters yönde sürtünme katsayısı  $b$  olan sürtünme kuvveti etki etmektedir. Bu bildiride kullanılan ters sarkaç sistemi için doğrusal olmayan model, [5] deki yaklaşımlar kullanılarak durum uzayı formunda aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{-bx_2 + ml \sin(x_3)x_4^2 - mg \sin(x_3) \cos(x_3) + u}{M + m - m \cos(x_3)^2} \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{(bx_2 - u - ml \sin(x_3)x_4^2) \cos(x_3) + (M + m)g \sin(x_3)}{l(M + m - m \cos(x_3)^2)} \end{aligned} \quad (1)$$

Burada  $x_1 := x$ ,  $x_2 := \dot{x}$ ,  $x_3 := \theta$ ,  $x_4 := \dot{\theta}$  olarak tanımlanmaktadır.



Şekil 1 Ters Sarkaç Sistemi

Doğrusal sistemlerin analizi ve bunlar için denetleyici dizaynı konusunda mevcut literatürün yeterli olgunlukta olduğu dikkate alınarak sistem (1) in doğrusal yaklaşımına ihtiyaç duymaktayız. Ters sarkaç sisteminde kontrolün amacı sarkacı dikey olarak tutmak olduğu için, çalışma noktası

$$(x_3, x_4) = (0, 0) \quad (2)$$

seçilir ve bu noktadaki doğrusal model

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{mg}{M} x_3 - \frac{b}{M} x_2 + \frac{1}{M} u \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{(M + m)g}{Ml} x_3 + \frac{b}{Ml} x_2 - \frac{1}{Ml} u \end{aligned} \quad (3)$$

olarak bulunur. Bu model matris notasyonunda

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{M} & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{b}{Ml} & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix} u \quad (4)$$

olarak ifade edilebilir. Ters sarkaç sisteminin Çizelge 1 de verilen nicelikler için  $(\theta, \dot{\theta}) = (0,0)$  çalışma noktası etrafında kontrol edilebilir olduğu bilinmektedir [6].

**Çizelge 1** Ters sarkaç için bu çalışmada kullanılan nümerik değerler

Parametreler	Sembol	Değeri	Birimi
Aracın kütlesi	M	3	kg
Ters Sarkacın kütlesi	m	0.5	kg
Ters Sarkacın uzunluğu	l	0.5	m
Sürtünme katsayısı	b	2	kg/sn
Yerçekimi ivmesi	g	9.8	m/sn <sup>2</sup>

Bu kısımda gürbüzlük karşılaştırılması yapılacak metotlar kısaca tanıtılacak olup detaylı bilgi için [2] e bakılabilir. Sistem (4) ün durum uzayı formunda olduğunu dikkate alarak bu form için hata denklemi kontrolünün en genel hali ile inceleyelim. Durum uzayı denklemleri

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (5)$$

şeklinde olan tek giriş tek çıkış bir sistemin durumlarının  $x_d = [r \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ,  $t \geq 0$ , yörüngesini asimptotik olarak takip etmesi istensin. Bu takip için hata durum denklemleri

$$\begin{aligned} \dot{e} &= Ae + Bu \\ y &= Ce + r \end{aligned} \quad (6)$$

olup, doğrusal-kuadratik kontrol yönteminde hata sistemi için girdi

$$u = -Ke \quad (7)$$

şeklinde bulunabilir. Burada  $K = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]$  şeklindedir.

### 3. GÜRBÜZLÜK ARAŞTIRMASI

Bu kısımda ters sarkaç sistemi parametre değişimlerine karşı gürbüzlük analizi yapılmaktadır. Aynı anda tek bir parametre değişimine karşı doğrusal kuadratik kontrol denetleyicilerin gürbüzlükleri analitik ve benzetim yöntemleriyle bulunmaktadır. Daha sonra ise, parametrelerin değişimine en az duyarlı denetleyici için birden fazla parametrenin aynı anda değişmesi durumunda yapısal tekil değer modellemesi kullanılarak gürbüzlük analizi yapılmıştır.

#### 3.1 Aynı Anda Tek Parametre Değişimi Durumunda Gürbüzlük İncelenmesi

Bu çalışmada doğrusal-kuadratik performans kriterlerini sağlayan denetleyiciler kullanılmaktadır. Doğrusal-kuadratik bir denetleyici, Riccati denklemi çözümü ile elde edilen bir doğrusal geribesleme matrisinin durum vektörü ile çarpılıp girişe aktarılması olarak tanımlanabilir [5]. Riccati denklemine tasarım spesifikasyonlarını yansıtmak için kullanılan performans matrislerinin seçimine bağlı olarak farklı doğrusal-kuadratik denetleyiciler elde edilmektedir. Bu çalışmamızda, fiziksel olarak anlamlı olacak yükselme zamanı, durulma zamanı ve maksimum aşma oranı verecek şekilde belirlenmiş performans matrislerinin yol açtığı denetleyiciler kullanılmaktadır. Bu denetleyiciler, bu metin boyunca “belli performans kriterlerini sağlayan (geribesleme) matrisleri” olarak nitelendirilmektedir [2]. Gürbüzlük analizlerinde, bu denetleyiciler için sistem parametrelerinden olan  $M$ ,  $m$ , ve  $l$  nin bir anda sadece birinin değişimi sırasında kararlılığın bozulduğu en küçük üst sınır değerleri dikkate alınmaktadır. Analitik yöntemle doğrusal sistem modelindeki gürbüzlük incelenirken, benzetim modeli ile de doğrusal olmayan modeldeki gürbüzlük incelenmektedir.

Analitik yöntemle doğrusal modelin gürbüzlüğünü incelemek için, ifade (6) yı dikkate alalım. Bu ifade, hata sistemi sistem katsayı parametreleri cinsinden

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{M} & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{b}{Ml} & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix} u \quad (8)$$

olarak yazılabilir. İfade (7) ile verilen sistem girdisi yukarıdaki sisteme uygulandığında, elde edilen geri besleme sistemi  $\dot{e} = (A - BK)e$  komponentleri türünden yazılırsa

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{M} & -\frac{b+k_2}{M} & -\frac{mg+k_3}{M} & -\frac{k_4}{M} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{Ml} & \frac{b+k_2}{Ml} & \frac{(M+m)g+k_3}{Ml} & \frac{k_4}{Ml} \end{bmatrix} e \quad (9)$$

olmaktadır. Bu sistemin özdeğerleri,  $\det(sI - (A - BK)) = 0$  karakteristik denkleminin kökleri olup bu denklem sistem parametreleri türünden  $(Ml)s^4 + (l(b+k_2) - k_4)s^3 + (-k_3 + lk_1 - g(M+m))s^2 - g(b+k_2)s^1 - k_1g = 0$  olarak yazılabilir. Routh kararlılık kriteri kullanılarak sistem parametre değişimlerinin bu denklemin köklerinin sol yarı düzlemde olmasına etkileri kolaylıkla incelenebilir. Bu karakteristik denklem için, sistem parametrelerinden  $M$ ,  $m$ , ve  $l$  den ikisi Çizelge 1 deki nominal değerinde tutulup kalan bir parametre nümerik olarak değiştirilmiştir. Bu işlem, daha önce sözü edilen belli performans kriterlerini sağlayan tüm denetleyici katsayıları  $(k_1, k_2, \dots, k_4)$  ve her bir sistem parametresi için tekrarlanıp, her bir sistem parametresinin tek başına değişimi sırasında kararlılığın bozulduğu en küçük üst sınır (EKÜS) ve karşılık gelen denetleyici katsayı matrisi Çizelge 2 deki gibi bulunmuştur.

**Çizelge 2** Doğrusal-kuadratik kontrol yönteminde sistem parametrelerinin tek başına değişimi sırasında analitik olarak kararlılığın bozulduğu parametre değerleri

Parametre	Nominal Değeri	EKÜS Değeri	$K$
M (kg)	3	7	[-10 -15.57 -117.62 -25.79]
M (kg)	0.5	5.9	[-10 -15.57 -117.62 -25.79]
l (m)	0.5	1.2	[-13.23 -18.64 -127.92 -28.06]

Benzetimlere dayalı gürbüzlük incelenmesinde ise, doğrusallaştırılmamış sistem modelinde sistem parametreleri tek başına değiştirilirken nominal sisteme göre bulunan belli zaman alanı performans değerlerini sağlayan denetleyicilerin çalışıp çalışmadığı sınırlı ve sınırsız sistem girdileri için gözlenmektedir. Bu işlem bir önceki bölümde analitik olarak gürbüzlük parametre sınırları bulunmuş Çizelge 2 deki denetleyici katsayıları için tekrarlanıp sınırsız ve sınırlı girdi değerleri için en küçük üst sınır (EKÜS) ve ilgili denetleyici katsayıları Çizelge 3 de verilmektedir.

**Çizelge 3** LQC yöntemi için sistem parametrelerinin tek başına değişimi sırasında, sınırsız ve sınırlı girdi için gürbüzlüğün bozulduğu sistem parametre değerleri

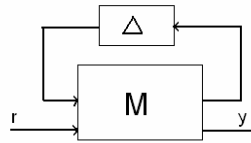
Parametre	Nominal Değeri	Sınırsız girdi EKÜS Değeri	Sınırlı girdi EKÜS Değeri	K
M (kg)	3	6.5	5.5	[-10 -15.57 -117.62 -25.79]
M (kg)	0.5	5.25	4	[-10 -15.57 -117.62 -25.79]
l (m)	0.5	1.1	0.8	[-13.23 -18.64 -127.92 -28.06]

Yukarıdaki çizelgede sınırsız sistem girdi değerleri için olan parametre sınır değerleriyle Çizelge 2 deki analitik incelemelerde bulunan değerler karşılaştırıldığında küçük farklılıklar çıkmaktadır. Bunun nedeni, karşılaştırılan değerlerin doğrusallaştırılmamış ve doğrusallaştırılmış modele göre bulunmasıdır. Çizelge 3 incelendiğinde, katsayı parametre sınır değerlerinin sınırlı sistem girdisinde daha küçük değerler aldığı gözükür. Bunun nedeni, sistemin sınırsız girdi için bulunan parametre değerlerinde kararlılığı sağlaması için 12 N dan büyük girdilere ihtiyacı olmasına rağmen, sistem girdisinin 12 N da kesime uğramasıdır.

### 3.2 Aynı Anda Birden Fazla Parametre Değişimi Durumunda Gürbüzlük İncelmesi

Bu kısımda birden çok sistem parametrelerinin aynı anda değişimi durumunda gürbüzlük incelemesi yapılacaktır. İncelemede, önceki kısımda aynı anda bir parametre değişimine en az duyarlı denetleyici matrisi kullanılmaktadır. Bunun için öncelikle sistemin belirsizlik modeli oluşturulacak, ardından ise yapısal tekil değer kullanılarak kararlılığı bozan parametre sınır değerleri bulunacaktır.

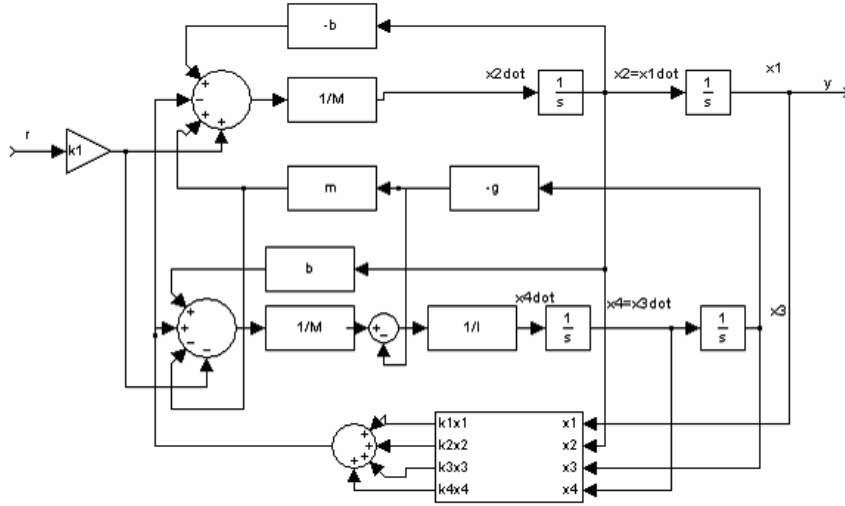
Belirsizliklere sahip doğrusal bir sistem yapısal tekil değer yöntemiyle incelenmesi için Şekil 3 deki gibi belirsiz ve belirli kısımlar şeklinde ayrıştırılması gerekir. Bu yapıda  $M$  bilinen kısımları temsil eden doğrusal transfer fonksiyon matrisini,  $\Delta$  ise belirsizliklerden oluşan kısmı temsil etmektedir.



**Şekil 2** Ters sarkaç sisteminin belirsizliklerden oluşan makro modeli

Genel olarak belirsizlik bloku  $\Delta = \text{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$ , yapısında olup her alt blok  $\Delta_i$  tekrar eden skalerlerden oluşan gerçek bir blok  $\Delta_i = \delta_i I_k, \delta_i \in R$  veya karmaşık bir blok  $\Delta_i \in C^{k_i \times k_i}$  olabilir. Bu alt blokların boyutlarının toplamı  $\Delta$  bloğunun boyutuna eşittir. Ters sarkaç sisteminde fiziksel olarak sadece gerçek belirsizlikler anlamlıdır.

Şekil 2 ile verilen makro modeli oluşturmak için, ifade (9) ile verilen ters sarkaç modelinin sistem durumları, ifade (7) ile verilen sistem geri besleme matrisi  $K = [-10 \ -15.57 \ -117.62 \ -25.79]$ , ve referans girdisi cinsinden blok diyagramı Şekil 3 deki gibi oluşturulabilir.



Şekil 3 Ters sarkaç sisteminin geri besleme altında blok diyagramı.

Bu kısımda parametrik belirsizlik olarak sistem parametreleri  $M$ ,  $m$ , ve  $l$  dikkate alınmaktadır. Yapılacak olan gürbüzlük analizi için belirsiz parametreler nominal değer ve muhtemel değişebilecekleri aralık cinsinden

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} &= \frac{1}{\bar{M}(1 + M_v \delta_M)} \\ m &= \bar{m}(1 + m_v \delta_m) \\ \frac{1}{l} &= \frac{1}{\bar{l}(1 + l_v \delta_l)} \end{aligned} \quad (10)$$

şeklinde yazılabilirler. Burada  $-1 \leq \delta_M, \delta_m, \delta_l \leq 1$  olup, her bir parametreye karşılık gelen değişimi ifade etmektedir. İfade (10) deki parametrik belirsizlikler kısmi doğrusal kesirli dönüşümler (*Linear Fractional Transformations -LFT*) kullanılarak

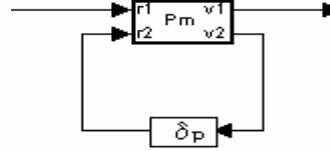
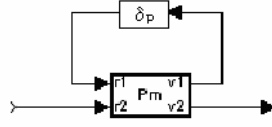
$$\frac{1}{M} = F_U(P_M, \delta_M), \quad m = F_L(P_m, \delta_m), \quad \frac{1}{l} = F_U(P_l, \delta_l) \quad (11)$$

şeklinde yazılabilirler [7]. Burada  $P_M = \begin{bmatrix} -M_v & \frac{1}{\bar{M}} \\ -M_v & \frac{1}{\bar{M}} \end{bmatrix}$ ,  $P_m = \begin{bmatrix} \bar{m} & m_v \bar{m} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  ve  $P_l = \begin{bmatrix} -l_v & \frac{1}{\bar{l}} \\ -l_v & \frac{1}{\bar{l}} \end{bmatrix}$

olup, parametre nominal değerleri Çizelge 1 den  $\bar{M} = 3$ ,  $\bar{m} = 0.5$ ,  $\bar{l} = 0.5$  olarak, değişimler ise  $M_v = 1$ ,  $m_v = 1$ ,  $l_v = 1$  olarak alınmıştır. İfade (11) de LFT formunda

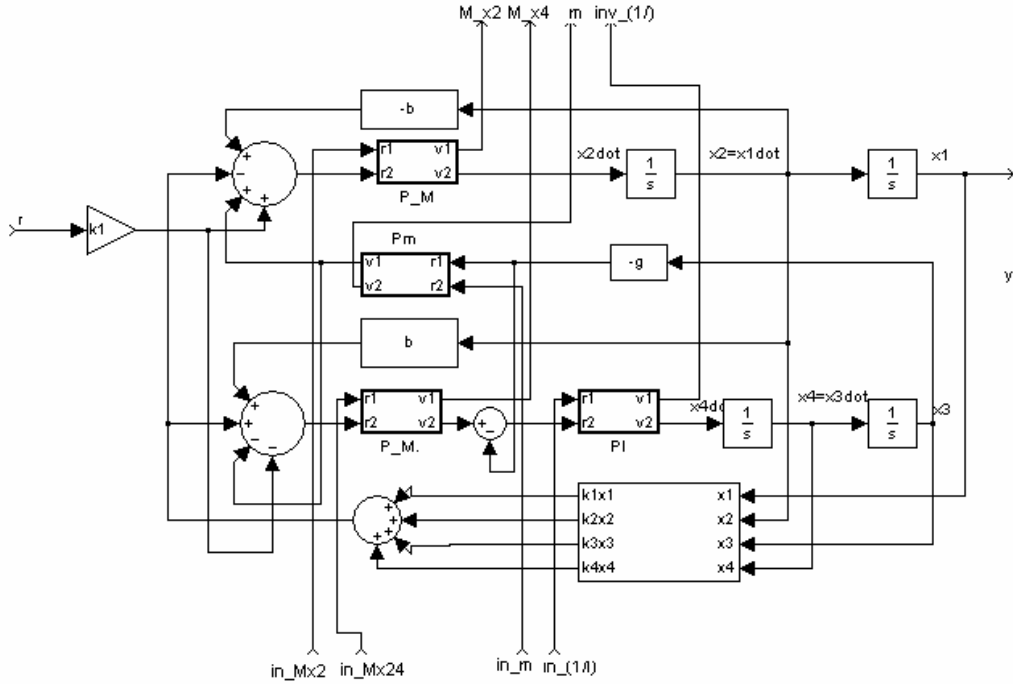


yazılan  $(I/P)$  ve  $P$  şeklindeki parametreler Şekil 4.a ve 4.b deki blok diyagramlarla gösterilebilir.



Şekil 4.a  $\frac{1}{P}$  tipi belirsizlikler Şekil 4.b  $P$  tipi belirsizlikler

Parametrik belirsizlik için Şekil 4.3a-b deki yapı, Şekil 3 deki nominal modelin içine yerleştirildiğinde, belirsizliklerin dahil olduğu sistem gösterimi Şekil 5 de ki gibi olur:



Şekil 5 Ters sarkaç sistemi bilinen kısmının ( $M$  nin) blok diyagramı

Bu blok diyagramda yukarı yöndeki çıktılar belirsizlik bloku  $\Delta$  nin girdileri olup  $\Delta$  nin çıktıları ise blok diyagramın alt kısmdaki girdileridir. Bütün sistemin, bilinen kısım transfer fonksiyonu ( $M$ ), ve belirsizlikler ( $\Delta$ ) cinsinden ifadesi

$$y = F_U(M, \Delta)r \quad (12)$$

olarak yazılabilir. Bu ifadedeki transfer fonksiyonu matrisi  $M$

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (13)$$

şeklinde ayrıştırılabilir. Burada  $M_{11} \in C^{4 \times 4}$  olup boyutu belirsizlik bloku  $\Delta$  ile etkileşimde olacak şekildedir.

Belirsizlik bloku  $\Delta$  ya karşılık gelen  $M_{11} \in C^{4 \times 4}$  matrisinin yapısal tekil değeri (*structured singular value*),  $\mu_{\Delta}(M_{11})$ :

$$\mu_{\Delta}(M_{11}) = \frac{1}{\min\{\bar{\sigma}(\Delta) : \det(I - M_{11}\Delta) = 0\}} \quad (14)$$

şeklinde tanımlanır. İfade  $I - M_{11}\Delta$  yi tekil yapan bir  $\Delta$  yoksa, bu durumda  $\mu_{\Delta}(M_{11}) = 0$  olarak tanımlanır. Bu ifadelerde  $\bar{\sigma}(\Delta)$  maksimum tekil değeri temsil etmektedir. İfade (14) ile verilen optimizasyon problemi NP hard olarak bilinmekte olup,  $\mu$  hesaplaması standart yöntemlerle mümkün değildir ([8], [9]). Geçen yıllarda, gürbüz analizde kullanılan yapısal tekil değer için yeni formüller geliştirilmiştir. Gerçek ve kompleks belirsizliklerin olduğu karışık  $\mu$  problemi, sadece kompleks belirsizliklerin olduğu  $\mu$  probleminden farklı özellikler içermektedir. Bu konuda çok geniş çaplı çalışmalar yapılmış olup ([10], [11], [12]) karışık belirsizliklere sahip bir problem için, sabit  $M_{11} \in C^{4 \times 4}$  matrisi dikkate alındığında alt ve üst sınır  $\mu$  değeri [13]

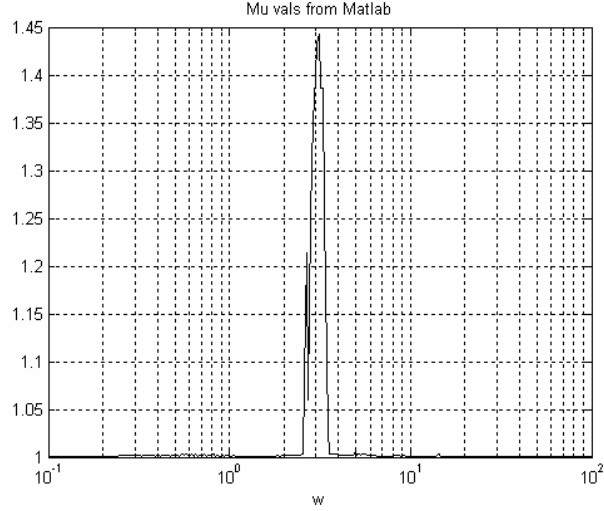
$$\max_{Q \in \mathcal{Q}_X} \rho_R(QM_{11}) \leq \mu_{\Delta}(M_{11}) \leq \inf_{\substack{D \in \mathcal{D}_X \\ \sigma \in \mathcal{O}_X}} \inf_{0 \leq \beta \in \mathbb{R}} \left\{ \beta \cdot \bar{\sigma} \left( \left( \frac{DM_{11}D^{-1}}{\beta} - jG \right) (I + G)^{-1/2} \right) \leq 1 \right\} \quad (15)$$

olarak bulunabilir. Verilen bir transfer fonksiyonu  $M_{11}(s)$  ve eşleştiği  $\Delta$  yapısı için, alt ve üst sınır  $\mu$  değerleri

$$\gamma_1 \leq \sup_{w \in \mathbb{R}^+} \mu_{\Delta}(M_{11}(jw)) \leq \gamma_2 \quad (16)$$

olarak tanımlanır. Dikkat edilirse alt sınır  $\gamma_1$ , yapısal belirsizliklerden dolayı oluşacak kararsızlık için olan yeterli durumu vermektedir. Bu aynı zamanda en kötü durum olmaktadır. Üst sınır  $\gamma_2$  ise, hangi seviye belirsizliklerin kararlılık için yeterli olduğu sorusuna cevap vermektedir. Bu çalışmada ise kararlılık için yeterli olan üst sınır dikkate alınacaktır.

Belirsizliklerle beraber modellenmiş olan ters sarkaç sistemini için  $\mu$  sınırlarının frekansa bağlı değişimi Şekil 6 de verilmiştir. Bu şekildeki grafik her bir frekanstaki üst  $\mu$  sınırına karşılık gelmektedir. Bütün frekans aralığında üst  $\mu$  sınır değeri  $\gamma_2 = 1.44$  olarak bulunur.



Şekil 6  $\mu$  üst sınırlarının frekansa bağlı değişimi

Bunun yanında,  $\max_w \overline{\sigma}(\Delta(jw)) < \frac{1}{\gamma_2} = 0.69$  sağlayan bütün belirsizlik matrisleri için, verilen geri beslemeli hata sistemi (9) kararlıdır. Çizelge 2 ve 3 te, parametrelerin genelde en fazla değişimine izin veren geri besleme matrisi  $K=[-10 \ -15.57 \ -117.62 \ -25.79]$  için yapılan bu değerlendirme sonucuna göre, ifade (9) daki geri besleme matrisi altında, sistem parametreleri  $M$ ,  $l$ ,  $m$  deki aynı anda % 69 luk bir değişime kadar kesin gürbüz kararlıdır.

#### 4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, analitik yöntem, benzetimler ve yapısal tekil değer kullanılarak doğrusal kuadratik denetleyicilerin ters sarkaç sistemi üzerinde gürbüzlüğü incelenmiştir. Bu yöntemlerden analitik ve benzetimler kullanılarak aynı anda bir parametre değişimi rahatlıkla incelenebilirken, yapısal tekil değer yöntemi kullanılarak birden fazla parametre değişimi dikkate alınabilmektedir. Aynı anda birden fazla parametre değişimi için analitik ve benzetim yöntemleri kullanılabilir olsa da, parametre sayısına bağlı olarak işlem miktarının artması bir dezavantaj oluşturmaktadır. Bunun yanında doğrusal olmayan veya sınırlı girdili sistemlerinin gürbüzlük analizi için yapısal tekil değer ve analitik yöntemler yerine benzetime dayalı gürbüzlük analizi yapılabilmektedir. Aynı anda tek bir parametre değişimi durumunda yapılan gürbüzlük incelemesinde, gerçek sisteme yakın sonuçlar vermesi açısından, sınırlı sistem girdisine sahip benzetimler kullanılmıştır. Bu çalışma aynı zamanda benzetimlerin de etkin biçimde sistem analizlerinde kullanılabileceğine bir örnektir. Analitik ve diğer yapısal analiz yöntemlerin yeterince olgun olmadığı bu alanda simülasyon tabanlı yaklaşımlar analitik yöntemleri bütünlemektedir.

## KAYNAKLAR

- [1] Zhou K., Doyle J.C., “Essentials of Robust Control”, Prentice-Hall Inc, (1998).
- [2] Yazıcı A., *Kayma Kipli Kontrol Yaklaşımlarının Ters Sarkaç Sistemine Uygulanması*, Yüksek Lisans Tezi, **Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**, (Aralık 2000).
- [3] Awtar S., King N., Allen T., Bang I., Hagan M., Skidmore D., Craig K., “Inverted pendulum systems: rotary and arm-driven –a mechatronic system design case study,” **Mechatronics**, 12(2):357-370, (2002).
- [4] Dussy S., El-Ghaoui L., “Multiobjective bounded control of uncertain nonlinear systems: an inverted pendulum example”, **European Control Conference 1997**, July 1 - 4, Brussels, (1997).
- [5] Ogata K., “Modern Control Engineering”, Prentice-Hall Inc, (1990).
- [6] Kuo B. C., “Automatic Control Systems”, Prentice-Hall Inc, (1987).
- [7] Balas G., Doyle J. C., Glover K., Packard A., Smith R., “ $\mu$ -Analysis and Synthesis Toolbox: User’s Guide”, MUSYN Inc. and The MathWorks Inc., (2001).
- [8] Braatz R. P., Young P. M., Doyle J. C., Morari M., “Computational-complexity of  $\mu$ -calculation”, **IEEE Transactions on Automatic Control**, 39:1000-1002, (1994).
- [9] Nemirovskii A., “Several NP-hard problems arising in robust stability analysis”, **Mathematics of Control, Signals, and Systems**, 6: 99–105, (1993).
- [10] Fan M. K. H., Tits A.L., Doyle J.C., “Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics”, **IEEE Transactions on Automatic Control**, 36: 25-38, (1991).
- [11] Young P. M., Newlin M. P., Doyle J. C., “Computing bounds for the mixed- $\mu$  problem”, **International Journal of Robust And Nonlinear Control**, 5:573-590, (1995).
- [12] Fu M., Barabanov N. E., “Improved upper bounds for the mixed structured singular value”, **IEEE Transactions on Automatic Control**, 42:1447-1452, (1997).
- [13] Young P. M., “Structured singular value approach for systems with parametric uncertainty”, **International Journal of Robust And Nonlinear Control**, 11: 653-680, (2001).