



SİPARİŞ KABULÜ VE ÇİZELGELENMESİ BÜTÜNLEŞİK PROBLEMİ İÇİN BİR MATEMATİKSEL MODEL

Büşra TUTUMLU^{1*}, Tuğba SARAÇ²

¹Kütahya Dumlupınar Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Endüstri Mühendisliği Bölümü, KÜTAHYA

ORCID No : <http://orcid.org/0000-0002-0662-8128>

²Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Mühendislik Mimarlık Fakültesi, Endüstri Mühendisliği Bölümü, ESKİŞEHİR

ORCID No : <http://orcid.org/0000-0002-8115-3206>

Anahtar Kelimeler

Öz

Sipariş kabulü ve paralel makine çizelgeleme problemi, Sıra ve makine bağımlı hazırlık süreleri, Hazır olma zamanları, Son teslim zamanları, İş bölünmesi.

Literatürde yer alan çizelgeleme konulu çalışmalarda genellikle işlerin tamamının kabul edileceği varsayımı ile tüm işler çizelgelenmektedir. Ancak pek çok işletme kapasite kısıtları nedeniyle gelen siparişlerin hepsini kabul etme şansına sahip değildir. Böyle bir durumda hangi işlerin kabul edileceği önemli bir karar problemidir. Bu nedenle, bu çalışmada sipariş kabulü ve çizelgeleme problemleri bütünsel olarak ele alınmıştır hem hangi işlerin seçileceğine hem de nasıl çizelgelenenelerine eş zamanlı karar verilmiştir. Literatürde bu iki önemli problemi birlikte ele alan çalışmalardan farklı olarak sıra ve makine bağımlı hazırlık süreleri, hazır olma zamanları, son teslim zamanları ve iş bölünmesi problem özellikleri göz önünde bulundurulmuştur. Ele alınan problem için amacı toplam karın enbüyüklenmesi olan bir matematiksel model önerilmiştir. Önerilen modelin performansını gösterebilmek için rassal türetilen test problemleri kullanılmıştır. Elde edilen test sonuçları iş bölünmesine izin vermenin toplam karı %33,74'e kadar arttırabileceğini ortaya koymuştur.

*Sorumlu yazar; e-posta : busra.tutumlu@dpu.edu.tr

doi : <https://doi.org/10.46465/endustrimuhendisligi.1601313>

A MATHEMATICAL MODEL FOR THE INTEGRATED PROBLEM OF ORDER ACCEPTANCE AND SCHEDULING

Keywords	Abstract
Order acceptance and parallel machine scheduling problem, Sequence and machine dependent setup times, Release dates, Deadlines, Job splitting.	<i>In the studies on scheduling in the literature, all jobs are usually scheduled with the assumption that all jobs will be accepted. However, many businesses do not have the chance to accept all orders due to capacity constraints. In such a case, which jobs will be accepted is an important decision problem. Therefore, in this study, order acceptance and scheduling problems are considered in an integrated manner, and both which jobs will be selected and how they will be scheduled are decided simultaneously. Unlike the studies in the literature that address these two important problems together, the problem features of sequence and machine-dependent setup times, release dates, deadlines and job splitting are taken into consideration. A mathematical model aiming to maximize total profit is proposed for the considered problem. Randomly generated test problems are used to demonstrate the performance of the proposed model. The test results obtained show that allowing job splitting can increase total profit by up to 33.74%.</i>
Araştırma Makalesi	Research Article
Başvuru Tarihi : 14.12.2024	Submission Date : 14.12.2024
Kabul Tarihi : 29.01.2025	Accepted Date : 29.01.2025

1. Giriş

Makine çizelgeleme problemlerinde, genellikle tüm işlerin işleme alınacağı varsayılır. Oysa işletmenin kapasite kısıtı, işlerin katı teslim zamanlarına sahip olması gibi nedenlerle bazı işlerin kabul edilmesi mümkün olmayabilir. Bu problem genellikle ana sanayi konumundaki bir firmanın sınırlı kapasiteye sahip alternatif tedarikçileri için yaşanır. Her tedarikçi katı teslim zamanını sağlayabileceği ve en çok gelir elde edebileceği ürünleri kabul eder. Ana sanayi kabul edilmeyen siparişleri temin edebileceği alternatif tedarikçilere sahiptir. Bu durumda tedarikçi firmaların yaşadığı problem sadece işlerin makinelerde sıralanması problemi olmaktan çıkar ve hem hangi işlerin kabul edileceğinin hem de kabul edilen işlerin sırasının belirleneceği bütünlüklük bir problem yapısına dönüşür. Bu problemde, her kabul edilen iş için bir kazanç oluşur. İş ya da bir başka deyişle sipariş kabulü de göz önünde bulundurulduğunda problem, klasik çizelgeleme problemine kıyasla zorlaşır. Bu nedenle bu problem literatürde genellikle sadece bir makinenin olduğu durum için ele alınmıştır. Bu çalışmalarda en çok birlikte ele alınan problem özellikleri *sıra bağımlı hazırlık süresi* (SBHS), *hazır olma zamanı* (HOZ) ve *son teslim zamanı* (STZ)'dır (Mahmoudinazlou, Alizadeh, Noble ve Eslamdoust, 2024; Tarhan ve Oğuz, 2022).

SBHS, benzer işlerin arasındaki hazırlık süresinin kısa, benzemeyen işlerin

arasındaki hazırlık süresinin uzun olması nedeniyle hazırlık sürelerinin işlerin sırasına bağlı olarak değişebilmesidir. Pek çok üretim sürecinde karşılaşılması nedeniyle çizelgeleme literatüründe de sıklıkla ele alınmaktadır (Wu, Cheng, Yang ve Chena, 2018; Wang, Wu, Chu ve Yu, 2023; Erişgin Barak ve Koyuncu 2021).

İşler çizelgelenirken bazı işler planlama periyodunun başında hazır olamayabilir bu durumda işlerin HOZ'ları göz önünde bulundurulmalıdır. Bir iş için kullanılacak hammadde veya yarı mamüllerin tedarik zamanları ya da üretimde kullanılacak diğer kaynakların kısıtlı olması gibi nedenlerle üretim süreçlerinde sık yaşanan bir durumdur. Bu özellik çizelgeleme literatüründe sıklıkla ele alınmaktadır (Song, Xue, Hua ve Wang, 2021; Zhong, Pan ve Jiang, 2017; Zhong ve Ou, 2017).

Teslim zamanı, müşterinin siparişini teslim almak istediği zamandır. Bir iş eğer teslim zamanından sonra tamamlanırsa gecikmiş olur. İş gecikmelerinin enküçüklendiği çizelgeleme problemlerinde teslim zamanı aşılabılır ancak aşım miktarı azaltılmaya çalışılır. STZ ise siparişin müşteriye teslim edilebileceği son zamandır ve ötelenmesi mümkün değildir. Eğer bir iş ancak STZ'den sonra tamamlanabilecekse bu iş kabul edilmez. Sipariş kabulünün göz önünde bulundurulduğu çalışmaların önemli bir kısmında STZ özelliği de dikkate alınmıştır (Krim, Zufferey, Potvin, Benmansour ve Duvivier, 2022; Naderi ve Roshanaei, 2020; Kis ve Kovács, 2012)

Çizelgeleme problemlerinde bir diğer önemli durum iş bölünmesi (İB)'dir. İş bölünmesi, bir işin başladıktan sonra kesintisiz bir şekilde bitene kadar devam etmesi zorunluluğunun olmaması, işin farklı makinelere bölünerek üretilebilmesi anlamına gelmektedir. Öneme ve pek çok üretim sisteminde işleri zamanında teslim edebilmek için uygulanmasına rağmen problem karmaşıklığını çok arttırması nedeniyle genellikle çalışmaların çoğunda göz ardı edilmektedir. Literatürde sipariş kabulü ve tek makine çizelgelenmesi bütünlük problemini ele alan çalışmalardan erişilebilenlerin hiç birisinde işlerin bölünmesine izin verilmemiştir.

Üretim ortamı karmaşılaştıkça sipariş kabulü ve çizelgeleme problemlerinin bütünlük ele alındığı çalışmaların sayısı da tek makineye kıyasla azalmaktadır. Sipariş kabulü ve paralel makine çizelgeleme problemini birlikte ele alan çalışmalardan erişilebilenler Tablo 1'de verilmiştir. Tablonun ilk sütununda çalışma, izleyen sütunlarında ise sırasıyla iş bölünmesi (İB), sıra bağımlı hazırlık süresi (SBHS), hazır olma zamanı (HOZ) ve son teslim zaman (STZ) özelliklerinin ele alınıp alınmadığı yer almaktadır.

Tablo 1

Sipariş Kabulü ve Paralel Makine Çizelgeleme Problemini Ele Alan Çalışmalar

Çalışma	İB	SBHS	HOZ	STZ
Bu çalışma	✓	✓	✓	✓
Chua, Ravindran, Senga ve Viswanathan (2023)	✓	✓		✓
Ou, Lu ve Zhong (2023)	✓		✓	
Chen (2023)		✓	✓	✓
Wu, Cheng, Yang ve Chena (2018)		✓		✓
Wang, Wu, Chu ve Yu (2023)		✓		
Erişgin Barak ve Koyuncu (2021)		✓		
Bruni, Khodaparasti ve Demeulemeester (2020)		✓		
Emami, Moslehi ve Sabbagh (2017)		✓		
Wang, Yin ve Cheng (2018)			✓	✓
Mor ve Mosheiov (2024)			✓	
Song, Xue, Hua ve Wang (2021)			✓	
Zhong, Pan ve Jiang (2017)			✓	
Zhong ve Ou (2017)			✓	
Shabtay, Karhi ve Oron (2015)			✓	
Krim, Zufferey, Potvin, Benmansour ve Duvivier (2022)				✓
Naderi ve Roshanaei (2020)				✓
Kis ve Kovács (2012)				✓
Mosheiov ve Sarig (2024)				
Mor ve Mosheiov (2024)				
Li, Tang, Bai ve Coelho (2024)				
Atsmony ve Mosheiov (2023)				
Wang ve Ye (2019)				
Kones ve Levin (2019)				
Li, Chen, Feng ve Jiao (2019)				
Wang ve Wang (2018)				
Mor ve Mosheiov (2018)				
Zhong ve Ou (2017)				
Ou ve Zhong (2017)				
Jiang ve Tan (2016)				
Ou, Zhong ve Wang (2015)				
Gerstl ve Mosheiov (2012)				

Tablodan da görülebileceği gibi çalışmaların yaklaşık yarısında sözü geçen problem özelliklerinden hiçbirisi dikkate alınmamıştır. Önemli bir kısmında da bu özelliklerden sadece birisi göz önünde bulundurulmuştur. Özellikle önemine rağmen iş bölünmesinin sadece iki çalışmada göz önünde bulundurulmuş olması dikkat çekicidir. Bu iki çalışma Chua, Ravindran, Senga ve Viswanathan (2023) ve Ou, Lu ve Zhong (2023)'dir. Chua ve diğ. (2023) sipariş kabulü ve çizelgeleme probleminde İB haricinde SBHS ve STZ özelliklerini dikkate almışlardır. Ele aldıkları problemin çözümü için sezgisel bir yöntem önermişlerdir. Ou, Lu ve Zhong (2023) ise sınırlı makine kapasitesine ve HOZ özelliklerine sahip ve sipariş reddine izin verilen çizelgeleme problemini ele almışlardır. Bu problemin çözümü için polinom zamanlı bir çözüm yaklaşımı sunmuşlardır.

İncelenen literatürde İB, SBHS, HOZ ve STZ özelliklerinin hepsini birlikte ele alan çalışmaya rastlanmamıştır. Oysa, katı son teslim zamanları ile çalışan

müşterilere sahip tedarikçi konumundaki işletmeler sıklıkla hangi siparişleri kabul edebilecekleri kararını vermek zorunda kalmaktadır. Bu problem, sıra bağımlı hazırlık süreleri, hazır olma zamanları ve iş bölünmesi ile birlikte ele alınarak olabildiğince genelleştirilmiş ve pek çok işletmenin uygulayabileceği bir yapıda tariflenmiştir. Önerilen matematiksel model, ilgili parametrelere uygun değerler verilerek kolaylıkla iş bölünmesiz, hazırlık sürelerinin sıra bağımlı olmadığı ve tüm işlerin planlama periyodu başında hazır olduğu problemlerin çözümünde de kullanılabilir yapıdadır. Dolayısıyla oldukça geniş bir uygulama alanına sahip olduğu öngörülmektedir. Bu çalışma hem literatürdeki boşluğu doldurmayı hem de tedarikçilerin yaşadığı bu önemli probleme uygulanabilir, gerçekçi bir matematiksel model sunmayı hedeflemektedir. Bu çalışmanın bir diğer motivasyonu iş bölünmesine izin verilmesinin toplam kara katkısının analiz edilmesidir.

İzleyen bölümde ele alınan problem tanımı ve önerilen matematiksel model verilmiştir. Üçüncü bölümde deneysel sonuçlar sunulmuştur. Son bölümde ise elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

2. Problem Tanımı ve Önerilen Matematiksel Model

Ele alınan problemde n işten hangilerinin seçileceğine, seçilen işlerin bölünüp bölünmeyeceğine, m paralel makineden hangisine ya da hangilerine atanacağına ve işlerin atandıkları makinelerde hangi sırada işleneceklerine eş zamanlı olarak karar verilmektedir. Bir işin her makine için işlem süresi farklıdır. Her işten önce bir hazırlığa ihtiyaç duyulmaktadır ve hazırlık süreleri hem iş sırasına hem de makineye göre değişebilmektedir. Tüm işler planlama periyodunun başında hazır değildir, hazır olma zamanları farklıdır. Bir iş teslim zamanından sonra tamamlanırsa gecikir. Son teslim zamanından sonra teslim edilebilmesi ise mümkün değildir. Bir işin son teslim zamanından önce tamamlanabilmesi mümkün değilse o iş kabul edilemez. Her kabul edilen iş bir kazanç sağlamakta, her geciken iş ise gecikme miktarı oranında maliyete sebep olmaktadır. Amaç, toplam karın enbüyüklenmesidir. Ele alınan problem için önerilen matematiksel model aşağıda verilmiştir.

Kümeler ve İndisler:

$N = \{1, 2, \dots, n\}$ iş kümesi, $i, j \in N$ iş indisi, $k \in N$ sıra indisi

$M = \{1, 2, \dots, m\}$ makine kümesi, $l \in M$ makine indisi

Parametreler:

p_{jl} : j . işin bir biriminin l . makinedeki işlem süresi

μ_j : j . işin parti büyüklüğü (adet)

h_{jl} : j . işin l . makinede ilk sıraya atanması durumunda hazırlık süresi

s_{ijl} : i işi j işinden önce l . makinede çizelgelenmişse sıra ve makine bağımlı hazırlık süresi

α_j : j işinin hazır olma zamanı

d_j : j işinin teslim zamanı

ϑ_j : j işinin son teslim zamanı

R_j : j . iş seçilirse sağlanacak kazanç

φ_j : j . iş bir birim zaman gecikirse oluşacak maliyet

β : işlerin bir makineye bölünebileceği en küçük miktar

γ : yeterince büyük bir pozitif sayı

Karar Değişkenleri:

x_{jkl} : eğer j . iş k . sırada l . makineye atandıysa 1, diğer durumda 0

θ_{jl} : j . işin l . makinede üretileceği miktar (adet)

y_j : eğer j . işi seçilirse 1, seçilmezse 0

C_{jl} : j işinin l . makinede tamamlanma zamanı

C'_j : j işinin tamamlanma zamanı

T_j : j işinin gecikme süresi

$$enb\ z = \sum_j R_j y_j - \sum_j \varphi_j T_j \quad (1)$$

$$\sum_j x_{jkl} \leq 1 \quad \forall k, l \quad (2)$$

$$\sum_k x_{jkl} \leq 1 \quad \forall j, l \quad (3)$$

$$\sum_k \sum_l x_{jkl} \geq y_j \quad \forall j \quad (4)$$

$$\sum_k \sum_l x_{jkl} \leq m y_j \quad \forall j \quad (5)$$

$$\sum_j x_{jkl} - \sum_i x_{i(k-1)l} \leq 0 \quad \forall k, l: k > 1 \quad (6)$$

$$\sum_l \theta_{jl} = \mu_j y_j \quad \forall j \quad (7)$$

$$\theta_{jl} \geq \beta \sum_k x_{jkl} \quad \forall j, l \quad (8)$$

$$\theta_{jl} \leq \mu_j \sum_k x_{jkl} \quad \forall j, l \quad (9)$$

$$C_{jl} \geq \alpha_j + h_{jl} + p_{jl}\theta_{jl} - \gamma(1 - x_{jkl}) \quad \forall j, k, l: k = 1 \quad (10)$$

$$C_{jl} \geq C_{il} + p_{jl}\theta_{jl} + s_{ijl} - \gamma(2 - x_{jkl} - x_{i(k-1)l}) \quad \forall i, j, k, l: i \neq j, k > 1 \quad (11)$$

$$C_{jl} \geq \alpha_j + p_{jl}\theta_{jl} + s_{ijl} - \gamma(2 - x_{jkl} - x_{i(k-1)l}) \quad \forall i, j, k, l: i \neq j, k > 1 \quad (12)$$

$$C_{jl} \leq \gamma \sum_k x_{jkl} \quad \forall j, l \quad (13)$$

$$C'_j \geq C_{jl} \quad \forall j, l \quad (14)$$

$$C'_j \leq \vartheta_j y_j \quad \forall j \quad (15)$$

$$T_j \geq C'_j - d_j \quad \forall j \quad (16)$$

$$T_j \leq (\vartheta_j - d_j)y_j \quad \forall j \quad (17)$$

$$x_{jkl} \in \{0,1\} \quad \forall j, k, l \quad (18)$$

$$y_j \in \{0,1\} \quad \forall j \quad (19)$$

$$\theta_{jl} \geq 0 \text{ ve tamsayı} \quad \forall j, l \quad (20)$$

$$C_{jl} \geq 0 \quad \forall j, l \quad (21)$$

$$C'_j, T_j \geq 0 \quad \forall j \quad (22)$$

Amaç (1) seçilen işlerden elde edilen toplam kazançtan, toplam gecikme maliyetinin çıkarılması ile elde edilen toplam karın enbüyüklenmesidir. Denklem (2) ve (3) sırasıyla bir makinenin bir sırasına en fazla bir işin atanabilmesini ve bir işin bir makineye en fazla bir kez atanabilmesini sağlamaktadır. Denklem (4)

ve (5) seçilen her işin en az bir makineye, en fazla m makineye atanmasını sağlamaktadır. Denklem (6) aynı makineye atanan işlerin sıra atlamadan işlenmesini sağlamaktadır. Denklem (7) işlerin makinelere bölünme miktarlarının toplamının parti büyüklüğüne eşit olmasını sağlamaktadır. Denklem (8) ve (9) x_{jkl} ve θ_{jl} karar değişkenleri için ilişki kısıtlarıdır. Ayrıca denklem (8), işlerin makinelere en az β kadar atanmasını garanti etmektedir. Denklem (10) her makinedeki ilk işin ve denklem (11) ve (12) ilk sıra haricindeki işlerin tamamlanma zamanını belirlemektedir. Denklem (13) x_{jkl} ve C_{jl} karar değişkenleri için ilişki kısıtlarıdır. Denklem (14) işlerin tamamlanma zamanını hesaplatmak için kullanılan kısıttır. Denklem (15) seçilen bir işin son teslim zamanından önce tamamlanmasını garanti eder. Denklem (16), işlerin gecikmelerini hesaplatma kısıtlarıdır. Denklem (17) seçilen bir işin gecikmesini, en geç teslim zamanını aşmayacak şekilde sınırlandırır. Denklem (18)-(22) karar değişkenlerin işletme kısıtlarıdır.

3. Deneyisel Sonuçlar

Bu bölümde önerilen matematiksel modelin performansını gösterebilmek için küçük boyutlu bir örnek problem ve farklı boyutlarda test problemleri türetilmiştir. Türetilen test problemleri hem önerilen matematiksel model hem de iş bölünmesine izin verilmeyen model ile GAMS 46'da CPLEX çözücüsü kullanılarak çözülmüştür ve elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. İş bölünmesine izin verilmeyen durum için önerilen matematiksel modelde Denklem (3), (5), (7), (8) ve (9)'da verilen kısıtlar kaldırılmış ve Denklem (10), (11) ve (12)'de yer alan kısıtlarda θ_{jl} karar değişkeni yerine μ_j parametresi kullanılmıştır.

Bu çalışmada araştırma ve yayın etiğine uyulmuştur.

3.1. Örnek Problem

Örnek problemde 6 iş ve 2 makine vardır. Tablo 2'de örnek problemin işlem süreleri (p_{jl}), ilk hazırlık süreleri (h_{jl}) ve Tablo 3'de sıra ve makine bağımlı hazırlık süreleri (s_{ijl}) verilmiştir. Tablo 4'de ise işlerin parti büyüklüğü (μ_j), hazır olma zamanları (α_j), teslim zamanları (d_j), son teslim zamanları (θ_j), kazançları (R_j) ve gecikme maliyetleri (φ_j) verilmiştir. İşlerin bir makineye bölünebileceği en küçük parti büyüklüğü (β) 20'dir.

Tablo 2

 p_{jl} ve h_{jl} Değerleri

i	l	p_{jl}	h_{jl}
1	1	1	22
1	2	6	41
2	1	8	29
2	2	7	53
3	1	5	38
3	2	1	79
4	1	5	22
4	2	3	48
5	1	4	69
5	2	3	42
6	1	6	42
6	2	6	91

Tablo 3

 s_{ijl} Değerleri

i	j	l	s_{ijl}	i	j	l	s_{ijl}	i	j	l	s_{ijl}
1	1	1	0	3	1	1	50	5	1	1	25
1	2	1	46	3	2	1	53	5	2	1	89
1	3	1	11	3	3	1	0	5	3	1	35
1	4	1	13	3	4	1	14	5	4	1	62
1	5	1	38	3	5	1	2	5	5	1	0
1	6	1	9	3	6	1	76	5	6	1	96
1	1	2	0	3	1	2	84	5	1	2	75
1	2	2	75	3	2	2	75	5	2	2	88
1	3	2	29	3	3	2	0	5	3	2	61
1	4	2	91	3	4	2	12	5	4	2	65
1	5	2	62	3	5	2	91	5	5	2	0
1	6	2	79	3	6	2	55	5	6	2	39
2	1	1	23	4	1	1	72	6	1	1	23
2	2	1	0	4	2	1	52	6	2	1	86
2	3	1	56	4	3	1	33	6	3	1	42
2	4	1	17	4	4	1	0	6	4	1	49
2	5	1	85	4	5	1	77	6	5	1	88
2	6	1	54	4	6	1	21	6	6	1	0
2	1	2	59	4	1	2	22	6	1	2	99
2	2	2	0	4	2	2	75	6	2	2	13
2	3	2	52	4	3	2	70	6	3	2	30
2	4	2	64	4	4	2	0	6	4	2	15
2	5	2	51	4	5	2	39	6	5	2	73
2	6	2	66	4	6	2	23	6	6	2	0

Tablo 4

 $\mu_j, \alpha_j, d_j, \vartheta_j, \varphi_j$ ve R_j Değerleri

i	μ_j	α_j	d_j	ϑ_j	φ_j	R_j
1	60	30	264	396	3	800
2	80	0	458	687	2	900
3	70	0	250	375	2	700
4	90	50	316	474	5	600
5	40	0	678	1017	3	800
6	50	20	244	366	2	900

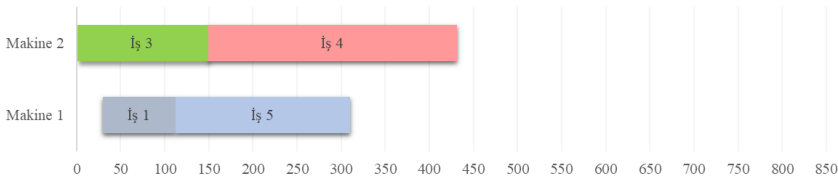
Örnek problem, önerilen model (M_{IB}) ve işlerin bölünmesine izin verilmeyen model (M_{IBZ}) ile çözülmüştür. Elde edilen amaç fonksiyonu değerleri (z), toplam seçilen iş sayıları ($\sum_j y_j$) ve çözüm süreleri (t) Tablo 5'de verilmiştir.

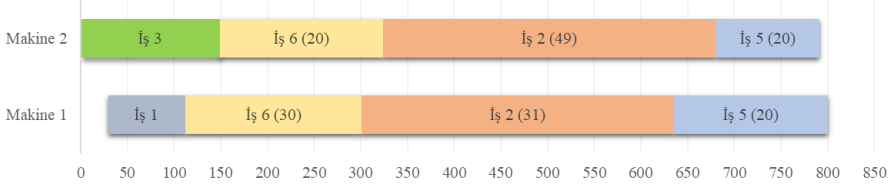
Tablo 5

Elde Edilen Sonuçlar

	z	$\sum_j y_j$	$t(s.)$
M_{IBZ}	2325	4	0,12
M_{IB}	3130	5	4,17

Tablo 5 incelendiğinde M_{IB} modeli ile M_{IBZ} 'e kıyasla %25,72 daha fazla kar elde edildiği görülmektedir. Yani işlerin bölünmesine izin verildiğinde 4 iş yerine 5 iş seçilerek toplam seçilen iş sayısı artırılmıştır. Böylece toplam kar 2325'den 3130'a çıkmıştır. Örnek problemde bile önemli ölçüde bir iyileşme sağlanmıştır. M_{IB} 'de işlerin hangi makinelere hangi sırada atanacağını yanı sıra işlerin hangi makinelere, hangi miktarda bölüneceğinin de belirlenmesi gerektiğinden M_{IBZ} 'ye göre daha uzun sürede çözüm bulunmuştur. M_{IBZ} ve M_{IB} 'nin çözümlerinin Gantt Şemaları sırasıyla Şekil 1 ve Şekil 2'de verilmiştir. Şekil 2'de iş isimlerinin yanında parantez içinde ilgili makinede işlem görecektir miktarlar da verilmiştir.

Şekil 1. M_{IBZ} ile Elde Edilen Çözümün Gantt Şeması

Şekil 2. M_{IB} ile Elde Edilen Çözümün Gantt Şeması

Şekil 1 incelendiğinde, M_{IBZ} ile elde edilen çözümde işlerin bölünmesine izin verilmediğinden toplam 6 işten sadece 4 iş (İş 1, İş 3, İş 4 ve İş 5) kabul edilebilmiştir. 2 iş (İş 2 ve İş 6) son teslim zamanları nedeniyle reddedilmiştir. İş 1 sıfır anında hazır olmadığından, Makine 1 sıfır anında işleme başlayamamıştır. Makine 1, İş 1'in hazır olma zamanı ($\alpha_j = 30$) kadar boş beklemiştir. Şekil 2 incelendiğinde ise, M_{IB} ile elde edilen çözümde işler bölünebildiğinden İş 2 Makine 1'de 31 adet ve Makine 2'de 49 adet, İş 5 Makine 1 ve Makine 2' de 20'şer adet ve İş 6 ise Makine 1'de 30 adet ve Makine 2'de 20 adet şeklinde üretildiği görülmektedir. Toplam 6 işten 5 iş (İş 1, İş 2, İş 3, İş 5 ve İş 6) kabul edilmiş ve sadece bir iş (İş 4) reddedilmiştir. Makine 1, M_{IBZ} 'de olduğu gibi İş 1'in sıfır anında hazır olmaması nedeniyle belli bir süre boş beklemiştir. Sipariş kabulünde M_{IB} ile elde edilen çözümün M_{IBZ} ile elde edilen çözüme göre daha esnek olduğu ve makine kullanımı konusunda da daha verimli olduğu görülmüştür.

3.2. Test Problemleri

Önerilen matematiksel modelin performansını gösterebilmek için Chen (2023) ve Saraç ve Tutumlu (2022) çalışmaları baz alınarak rassal olarak türetilen 24 test problemi kullanılmıştır. Test problemlerinde; birim işlem süresi (p_{jl}) [1;10] aralığında, ilk işin hazırlık süresi (h_{jl}) ve sıra ve makine bağımlı hazırlık süresi (s_{ijl}) [1;100] aralığında, işlerin parti büyüklüğü (μ_j) [β ;100] aralığında, işlerin hazır olma zamanı (α_j) [$0; 0,15 \sum_j \frac{\bar{p}_{jl}\mu_j + (\bar{h}_{jl} + \bar{s}_{ijl})/2}{m}$] aralığında ve kazançları (R_j) [100;500] aralığında kesikli düzgün dağılıma uygun olarak türetilmiştir. β değeri ise 20 olarak belirlenmiştir. İşlerin teslim zamanı (d_j) [$\alpha_j + [1; 1 + \delta] (\bar{p}_{jl}\mu_j + (\bar{h}_{jl} + \bar{s}_{ijl})/2)$], en geç teslim zamanı (ϑ_j) [$d_j + \varepsilon (\bar{p}_{jl}\mu_j + (\bar{h}_{jl} + \bar{s}_{ijl})/2)$] ve gecikme maliyetleri (φ_j) $\left\lceil \frac{R_j}{\vartheta_j - d_j} \right\rceil$ formülleri ile türetilmiştir. δ değeri için 0,25 ve 0,75 ve ε değeri için 0,25 ve 1 olarak iki seviye belirlenmiştir. Bu iki seviyeye göre 24 adet test probleminin 12 adedi $\delta = 0,25$ ve $\varepsilon = 0,25$ (sıkı), diğer 12 adedi ise $\delta = 0,75$ ve $\varepsilon = 1$ (gevşek) olarak türetilmiştir.

Türetilen test problemlerinin n , m , δ ve ε değerleri Tablo 6'da verilmiştir. Her tip problemten üç adet örnek türetilmiştir. Tabloda problem tipleri verilirken örnek numarası x ile gösterilmiştir. Türetilen test problemleri iş sayısı (n), makine sayısı (m), örnek numarası ve sıkı/gevşek bilgileri kullanılarak adlandırılmıştır. Örneğin; 6 iş, 2 makine, probleminin 3. örneği $\delta = 0,25$ ve $\varepsilon = 0,25$ ise 6-2-3-sıkı şeklinde isim verilmiştir.

Tablo 6

Test Problemlerinin n , m , δ ve ε Değerleri

<i>Problem</i>	<i>n</i>	<i>m</i>	δ	ε
8-2- <i>x</i> -gevşek	8	2	0,75	1
8-2- <i>x</i> -sıkı	8	2	0,25	0,25
8-3- <i>x</i> -gevşek	8	3	0,75	1
8-3- <i>x</i> -sıkı	8	3	0,25	0,25
10-2- <i>x</i> -gevşek	10	2	0,75	1
10-2- <i>x</i> -sıkı	10	2	0,25	0,25
10-3- <i>x</i> -gevşek	10	3	0,75	1
10-3- <i>x</i> -sıkı	10	3	0,25	0,25

3.3. Test Sonuçları

Türetilen test problemleri hem önerilen M_{IB} modeli hem de iş bölünmesine izin verilmeyen M_{IBZ} modeli ile çözülmüş ve elde edilen sonuçlar Tablo 7'de verilmiştir.

Tablo 7

Test Sonuçları

Problem	M_{IBZ}		M_{IB}		iyileşme oranı
	z_{IBZ}	t_{IBZ}	z_{IB}	t_{IB}	
8-2-1-gevşek	1258	12,02	1318	321,44	4,55
8-2-1-sıkı	1375	1,12	1515	66,72	9,24
8-2-2-gevşek	2289	0,47	2442	17,72	6,27
8-2-2-sıkı	2055	4,48	2199	20,14	6,55
8-2-3-gevşek	2406	7,45	2642	6,11	8,93
8-2-3-sıkı	2444	5,59	2637	422,45	7,32
8-3-1-gevşek	2339	1,24	2365	4,56	1,10
8-3-1-sıkı	2276	0,62	2485	1284,58	8,41
8-3-2-gevşek	2016	1,23	2046	3,31	1,47
8-3-2-sıkı	1925	0,19	2029	9187,14	5,13
8-3-3-gevşek	2329	0,81	2515	21,50	7,40
8-3-3-sıkı	2160	0,45	2429	6372,62	11,07
10-2-1-gevşek	2193	10,08	2313	3095,67	5,19
10-2-1-sıkı	2024	1,34	2099	633,97	3,57
10-2-2-gevşek	1592	18,06	1713	3276,41	7,06
10-2-2-sıkı	1122	1,20	1313	258,39	14,55
10-2-3-gevşek	2441	5,66	2569	4483,80	4,98
10-2-3-sıkı	2050	0,52	2187	2221,92	6,26
10-3-1-gevşek	2834	28,67	2882	43,91	1,67
10-3-1-sıkı	2199	14,50	3317	1,45	33,71
10-3-2-gevşek	2458	2,73	2602	657,11	5,53
10-3-2-sıkı	2357	1,44	2381	4,66	1,01
10-3-3-gevşek	2390	1,23	2414	5,23	0,99
10-3-3-sıkı	2515	8,38	2539	20,23	0,95

Tablo 7, altı sütundan oluşmaktadır. İlk sütunda test problemi, ikinci ve üçüncü sütunlarda M_{IBZ} modeli ile elde edilen amaç fonksiyonu değeri (z_{IBZ}) ve çözüm süresi (t_{IBZ}), dördüncü ve beşinci sütunlarda M_{IB} modeli ile elde edilen amaç fonksiyonu değeri (z_{IB}) ve çözüm süresi (t_{IB}), son sütunda ise iyileşme oranı verilmiştir. Çözüm süreleri saniye cinsindendir. İyileşme oranları, Denklem (23)'te verilen formül kullanılarak hesaplanmıştır.

$$iyileşme\ oranı = 100 \left(\frac{z_{IB} - z_{IBZ}}{z_{IB}} \right) \quad (23)$$

Tablo 7'den de görülebileceği gibi M_{IB} modeli daha karmaşık bir model olduğu için çözüm süreleri M_{IBZ} 'ye kıyasla daha uzundur ancak M_{IB} modeli ile tüm test problemlerinde iş bölünmesine izin verilmeyen modele kıyasla çok daha başarılı amaç fonksiyonu değerleri elde edilmiştir. İyileşme oranlarının %33,74'e kadar

ulaşabildiği gözlemlenmiştir. Bu nedenle iş bölünmesinin sipariş kabulü ve çizelgeleme bütünleşik problemlerinde ele alınmasının kritik olduğu sonucuna varılmıştır. İş bölünmesine izin verilmesi ile hem kabul edilebilen iş sayısı arttırılabilmiş hem de iş gecikmelerinde azalma sağlanabilmektedir.

Önerilen matematiksel modelin daha büyük boyutlu problemlerde performansını gösterebilmek amacıyla 100 iş 8 makineye kadar Bölüm 3.2’de verilen test problemleri türetme mekanizmaları kullanılarak 6 adet sıkı test problemi türetilmiştir. Türetilen problemler önerilen M_{IB} modeli ile çözülmüş, elde edilen sonuçlar Tablo 8’de verilmiştir. Tablonun ilk sütunda test problemi, ikinci ve üçüncü sütunlarda elde edilen amaç fonksiyonu değeri (z_{IB}) ve çözüm süresi (t_{IBZ}) verilmiştir.

Tablo 8

Büyük Boyutlu Problemlerin Test Sonuçları

<i>Problem</i>	z_{IB}	t_{IB}
50-4-1-sıkı	2352	10800
50-8-1-sıkı	3860	10800
75-4-1-sıkı	3799	10800
75-8-1-sıkı	-	-
100-4-1-sıkı	-	-
100-8-1-sıkı	-	-

Tablo 8’den de görülebileceği gibi önerilen matematiksel model ile 10800 saniye içerisinde 75 iş 4 makineye kadar olan problemlere uygun çözümler bulunabilmektedir.

4. Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada, sıra ve makineye bağlı hazırlık süreleri, hazır olma zamanları, son teslim zamanları ve iş bölünmesi gibi karmaşık problem özelliklerini dikkate alan bütünleşik sipariş kabulü ve çizelgeleme problemi ilk kez ele alınmıştır.

İş bölünmesi, işlerin birden fazla makinede veya zaman aralığında bölünmesini ve işlenmesini sağlayarak kaynakların daha verimli bir şekilde tahsis edilmesini sağlar, darboğazları azaltır ve genel sistem kullanımını iyileştirir. Bu özellik, geleneksel çizelgeleme yaklaşımlarının yetersiz kalabileceği sıkı teslim zamanlarının veya sınırlı kaynakların olduğu durumlarda özellikle önemlidir. İşletmeler, iş bölünmesine izin vererek daha yüksek operasyonel verimliliğe

ulaşabilir, müşteri gereksinimlerini daha hızlı bir şekilde karşılayabilir ve dinamik ortamlarda rekabet güçlerini artırabilirler. Bu çalışmada önerilen matematiksel model ile elde edilen amaç fonksiyonu değerleri iş bölünmesine izin verilmeyen durumda elde edilen amaç fonksiyonu değerleri ile karşılaştırılmıştır. İş bölünmesinin temel bir özellik olarak probleme dahil edilmesinin hem çizelgeleme esnekliğini hem kabul edilen iş sayısını hem de bunlara bağlı olarak toplam karı arttırdığı deneysel sonuçlarla gösterilmiştir.

Gelecekteki çalışmalarda, ele alınan problemin daha büyük boyutlu örnekleri için sezgisel veya metasezgisel yaklaşımlar geliştirilebilir.

Araştırmacıların Katkısı

Bu araştırmada; Büşra TUTUMLU, çalışma fikrinin oluşturulması, literatürün taranması, matematiksel modelin geliştirilmesi, test problemlerinin çözülmesi ve makalenin yazılması; Tuğba SARAÇ, çalışma fikrinin oluşturulması, literatürün taranması, matematiksel modelin geliştirilmesi, test problemlerinin çözülmesi ve makalenin yazılması konularında katkı sağlamışlardır.

Çıkar Çatışması

Yazarlar tarafından herhangi bir çıkar çatışması beyan edilmemiştir.

Kaynaklar

- Atsmony, M. ve Mosheiov, G. (2023). Scheduling to maximize the weighted number of on-time jobs on parallel machines with bounded job-rejection. *Journal of Scheduling*, 26(2), 193-207. Doi: <https://doi.org/10.1007/s10951-022-00745-7>
- Bruni, M. E., Khodaparasti, S. ve Demeulemeester, E. (2020). The distributionally robust machine scheduling problem with job selection and sequence-dependent setup times. *Computers & Operations Research*, 123, 105017. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.cor.2020.105017>
- Chen, C. L. (2023). An Iterated population-based metaheuristic for order acceptance and scheduling in unrelated parallel machines with several practical constraints. *Mathematics*, 11(6), 1433. Doi: <https://doi.org/10.3390/math11061433>
- Chua, G. A., Ravindran, A., Senga, J. R. L. ve Viswanathan, S. (2023). Job scheduling for maximum revenue on uniform, parallel machines with major and minor setups and job splitting. *Computers & Industrial Engineering*, 178, 109147. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2023.109147>

- Emami, S., Moslehi, G. ve Sabbagh, M. (2017). A Benders decomposition approach for order acceptance and scheduling problem: A robust optimization approach. *Computational And Applied Mathematics*, 36, 1471-1515. Doi: <https://doi.org/10.1007/s40314-015-0302-8>
- Erişgin Barak, M. Z. ve Koyuncu, M. (2021). Fuzzy order acceptance and scheduling on identical parallel machines. *Symmetry*, 13(7), 1236. Doi: <https://doi.org/10.3390/sym13071236>
- Gerstl, E. ve Mosheiov, G. (2012). Scheduling on parallel identical machines with job-rejection and position-dependent processing times. *Information Processing Letters*, 112(19), 743-747. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.ipl.2012.06.009>
- Jiang, D. ve Tan, J. (2016). Scheduling with job rejection and nonsimultaneous machine available time on unrelated parallel machines. *Theoretical Computer Science*, 616, 94-99. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2015.12.020>
- Kis, T. ve Kovács, A. (2012). On bilevel machine scheduling problems. *OR Spectrum*, 34(1), 43-68. Doi: <https://doi.org/10.1007/s00291-010-0219-y>
- Kones, I. ve Levin, A. (2019). A unified framework for designing EPTAS for load balancing on parallel machines. *Algorithmica*, 81(7), 3025-3046. Doi: <https://doi.org/10.1007/s00453-019-00566-9>
- Krim, H., Zufferey, N., Potvin, J. Y., Benmansour, R. ve Duvivier, D. (2022). Tabu search for a parallel-machine scheduling problem with periodic maintenance, job rejection and weighted sum of completion times. *Journal of Scheduling*, 1-17. Doi: <https://doi.org/10.1007/s10951-021-00711-9>
- Li, S. S., Chen, R. X., Feng, Q. ve Jiao, C. W. (2019). Parallel-machine scheduling with job-dependent cumulative deterioration effect and rejection. *Journal of Combinatorial Optimization*, 38(3), 957-971. Doi: <https://doi.org/10.1007/s10878-019-00429-7>
- Li, Y., Tang, L., Bai, D. ve Coelho, L. C. (2024). Profit maximization through integrated order acceptance and scheduling: A metaheuristic approach. *Applied Soft Computing*, 159, 111570. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2024.111570>
- Mahmoudinazlou, S., Alizadeh, A., Noble, J. ve Eslamdoust, S. (2024). An improved hybrid ICA-SA metaheuristic for order acceptance and scheduling with time windows and sequence-dependent setup times. *Neural Computing and Applications*, 36(2), 599-617. Doi: <https://doi.org/10.1007/s00521-023-09030-w>
- Mor, B. ve Mosheiov, G. (2018). A note: minimizing total absolute deviation of job completion times on unrelated machines with general position-dependent processing times and job-rejection. *Annals of Operations Research*, 271, 1079-1085. Doi: <https://doi.org/10.1007/s10479-018-2779-1>

- Mor, B. ve Mosheiov, G. (2024). Due-Date assignment with acceptable lead-times on parallel machines. *Computers & Operations Research*, 166, 106617. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.cor.2024.106617>
- Mor, B. ve Mosheiov, G. (2024). Scheduling on parallel dedicated machines with job rejection. *International Journal of Production Research*, 1-8. Doi: <https://doi.org/10.1080/00207543.2024.2314714>
- Mosheiov, G. ve Sarig, A. (2024). A common due-date assignment problem with job rejection on parallel uniform machines. *International Journal of Production Research*, 62(6), 2083-2092. Doi: <https://doi.org/10.1080/00207543.2023.2217277>
- Naderi, B. ve Roshanaei, V. (2020). Branch-Relax-and-Check: A tractable decomposition method for order acceptance and identical parallel machine scheduling. *European Journal of Operational Research*, 286(3), 811-827. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2019.10.014>
- Ou, J. ve Zhong, X. (2017). Bicriteria order acceptance and scheduling with consideration of fill rate. *European Journal of Operational Research*, 262(3), 904-907. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2017.04.036>
- Ou, J., Lu, L. ve Zhong, X. (2023). Parallel-batch scheduling with rejection: Structural properties and approximation algorithms. *European Journal of Operational Research*, 310(3), 1017-1032. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2023.04.019>
- Ou, J., Zhong, X. ve Wang, G. (2015). An improved heuristic for parallel machine scheduling with rejection. *European Journal of Operational Research*, 241(3), 653-661. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2014.09.028>
- Saraç, T. ve Tutumlu, B. (2022). A bi-objective mathematical model for an unrelated parallel machine scheduling problem with job-splitting. *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*, 37(4), 2293-2307. Doi: <https://doi.org/10.17341/gazimmfd.967343>
- Shabtay, D., Karhi, S. ve Oron, D. (2015). Multipurpose machine scheduling with rejection and identical job processing times. *Journal of Scheduling*, 18(1), 75-88. Doi: <https://doi.org/10.1007/s10951-014-0386-9>
- Song, Y., Xue, M., Hua, C. ve Wang, W. (2021). A Column Generation Algorithm for the Resource-Constrained Order Acceptance and Scheduling on Unrelated Parallel Machines. *Mathematical Problems in Engineering*, 2021(1), 5566002. Doi: <https://doi.org/10.1155/2021/5566002>
- Tarhan, İ. ve Oğuz, C. (2022). A matheuristic for the generalized order acceptance and scheduling problem. *European Journal of Operational Research*, 299(1), 87-103. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2021.08.024>

- Wang, B. ve Wang, H. (2018). Multiobjective order acceptance and scheduling on unrelated parallel machines with machine eligibility constraints. *Mathematical Problems in Engineering*, 2018(1), 6024631. Doi: <https://doi.org/10.1155/2018/6024631>
- Wang, D., Yin, Y. ve Cheng, T. C. E. (2018). Parallel-machine rescheduling with job unavailability and rejection. *Omega*, 81, 246-260. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.omega.2018.04.008>
- Wang, S. ve Ye, B. (2019). Exact methods for order acceptance and scheduling on unrelated parallel machines. *Computers & Operations Research*, 104, 159-173. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.cor.2018.12.016>
- Wang, S., Wu, R., Chu, F. ve Yu, J. (2023). An exact decomposition method for unrelated parallel machine scheduling with order acceptance and setup times. *Computers & Industrial Engineering*, 175, 108899. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2022.108899>
- Wu, G. H., Cheng, C. Y., Yang, H. I. ve Chena, C. T. (2018). An improved water flow-like algorithm for order acceptance and scheduling with identical parallel machines. *Applied Soft Computing*, 71, 1072-1084. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2017.10.015>
- Zhong, X. ve Ou, J. (2017). Improved approximation algorithms for parallel machine scheduling with release dates and job rejection. *4OR*, 15, 387-406. Doi: <https://doi.org/10.1007/s10288-016-0339-6>
- Zhong, X. ve Ou, J. (2017). Parallel machine scheduling with restricted job rejection. *Theoretical Computer Science*, 690, 1-11. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2017.05.033>
- Zhong, X., Pan, Z. ve Jiang, D. (2017). Scheduling with release times and rejection on two parallel machines. *Journal of Combinatorial Optimization*, 33(3), 934-944. Doi: <https://doi.org/10.1007/s10878-016-0016-x>