

NIVEAU D'ENERGIE ET L'AMPLITUDE DANS UN MILIEU A VITESSE LINEAIRE

Turan KAYIRAN

Mineral Research and Exploration Institute of Turkey

RESUME. — Il s'agit d'évaluer la transmission de l'amplitude dans un milieu où la vitesse est une fonction linéaire de la profondeur. Dans un autre ordre d'idées le calcul est mené en divisant le même milieu en n couches à vitesse constante et une comparaison fait ressortir sur un modèle la différence entre les 2 modes de calcul.

Le milieu—où la loi de vitesse est une fonction linéaire—est traité par Woelf (1937). Menzel et Rosenbach ont étudié le changement introduit dans le signal par l'analyse de Fourier. Berryman, Goupillaud et Waters (1958) et Bortfeld (1960) se sont penchés sur le même problème. Bortfeld a formulé l'expression de la transmission de l'amplitude pour les rayons d'onde perpendiculaires au milieu et sans tenir compte de changement de densité qui doit aller de pair avec la vitesse.

Nous avons essayé, ici, de proposer deux méthodes pour évaluer le bilan des changements d'amplitude des rayons à la suite d'innombrables réfractions ayant eu lieu dans le milieu.

La loi de vitesse est exprimée par la relation $V=V_0 (1+az)$ (1)

V_0 = la vitesse initiale

V = la vitesse finale

z = l'épaisseur du milieu

a = gradient de vitesse

a. Première solution

En divisant le milieu en n couches, essayons de calculer les changements d'amplitude au passage de chaque niveau (Fig. 1). La densité étant exprimée par d , le coefficient de réflexion est défini comme

$$R_i = \frac{v_i d_i - v_{i-1} d_{i-1}}{v_i d_i + v_{i-1} d_{i-1}}$$

En mettant $v_i d_i = u_i$

$$R_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{u_i + u_{i-1}} \dots \dots \dots (2)$$

En écrivant u_i et u_{i-1} en fonction de u_0 et u_{n+1} on obtient

$$R_i = \frac{\left(\frac{u_{n+1}}{u_0}\right)^{\frac{1}{n+1}} - 1}{\left(\frac{u_{n+1}}{u_0}\right)^{\frac{1}{n+1}} + 1} \dots \dots \dots (3)$$

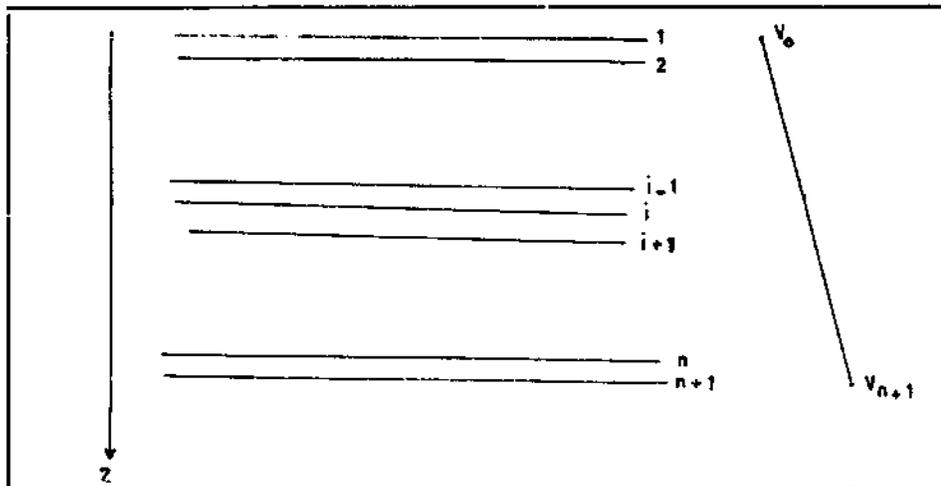


Fig. 1

Pour le rayon normal le coefficient de transmission étant $(1-R_i)$, si le rayon fait un angle de θ_0 avec le normal, l'amplitude sera, en admettant que tout est linéaire dans l'infiniment petit, proportionnelle avec $\frac{\sin \theta_0}{dx_i}$ pour n couches traversées. On obtient:

$$(1-R_i)^{n+1} \frac{\sin \theta_0}{\sum_1^n dx_i} \dots\dots\dots (4)$$

En mettant

$$\left(\frac{u_{n+1}}{u_0}\right)^{\frac{1}{n+1}} = P \dots\dots\dots (5)$$

$$(n + 1) \log_e P = \log_e \frac{u_{n+1}}{u_0} \dots\dots\dots (6)$$

$$(1-R_i)^{n+1} = \left(\frac{2}{P+1}\right) \frac{\log_e P^{n+1}}{\log_e P} \dots\dots\dots (7)$$

$$\log_e (1 - R_i)^{n+1} = \frac{\log_e P^{n+1} \log_e \frac{2}{P+1}}{\log_e P} \dots\dots\dots (8)$$

Dans la relation (8), si l'on fait tendre n vers l'infini, p tend vers 1 et on arrive à une indétermination de la forme 0/0. En dérivant le numérateur et le dénominateur on obtient:

$$\lim_{P \rightarrow 1} \frac{\log_e P^{n+1} \log_e \frac{2}{P+1}}{\log_e P} = - \frac{\log_e (P^{n+1})}{2} \dots\dots\dots (9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1-R_i)^{n+1} = e^{-\frac{\log(P^{n+1})}{2}} = \sqrt{\frac{u_o}{u_{n+1}}} \dots \dots \dots (10)$$

Reste à résoudre la deuxième partie du (4):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \theta_o}{\sum^n dx_i} \dots \dots \dots (11)$$

$$dx_i = dz_i \operatorname{tg} \theta_i \dots \dots \dots (11)$$

$$\text{pour } n \rightarrow \infty \quad X = \int_0^z \operatorname{tg} \theta \, dz \dots \dots \dots (12)$$

la loi de Descartes donne : $\frac{\sin \theta_o}{v_o} = \frac{\sin \theta}{v_{n+1}} = Q \dots \dots \dots (13)$

d'où on peut écrire $X = \int_{\theta_o}^{\theta} \frac{\frac{I}{Q} \sin \theta}{\frac{I}{Q} \cos \theta \frac{d\theta}{dz}} \dots \dots \dots (14)$

En tenant compte de $\frac{I}{Q} \cos \theta \frac{d\theta}{dz} = \alpha v_o \dots \dots \dots (15)$

on trouve : $X = \int_{\theta_o}^{\theta} \frac{V_{n+1}}{V_o \alpha} d\theta = \frac{I}{\alpha} \int \frac{\sin \theta}{\sin \theta_o} d\theta \dots \dots \dots (16)$

l'intégration donne : $X = \frac{I}{\alpha \sin \theta_o} (\cos \theta_o - \cos \theta) \dots \dots \dots (17)$

la formule (4) peut donc s'exprimer comme

$$\frac{\sqrt{U_o}}{U_{n+1}} \frac{\alpha \sin^2 \theta_o}{(\cos \theta_o - \cos \theta)} \dots \dots \dots (18)$$

En admettant que, suivant Nafe et Drake, $\frac{V_1}{V_2} = \frac{d_1}{d_2} \dots \dots \dots (19)$

(18) peut s'écrire comme suit :

$$\frac{I}{(1+az)} \frac{\alpha \sin^2 \theta_o}{(\cos \theta_o - \cos \theta)} \dots \dots \dots (20)$$

En se donnant $\sin \theta_o$, a , et z et sachant la fonction $\cos \theta_o = f(\theta_o, a, z)$, à partir de (20) on peut calculer l'amplitude pour les rayons obliques.

b. Deuxieme solution

Divisons le milieu a n couches (Fig. 1) et cherchons l'expression de l'amplitude au passage de chaque niveau. Si A et B sont les amplitudes des ondes P et SV avec les angles d'incidence a et b respectivement et C, D, E, F les amplitudes des ondes P et SV reflechies P et SV refractees sous des angles a, b, e, f respectivement et si les vitesses des ondes P sont V_1 et V_2 , celles des SV sont U_1 et U_2 dans le premier et second milieu.

On peut ecrire les conditions aux limites qui sont:

- a) Egalite des sommes des deplacements normaux de deux cotes de l'interface,
- b) Egalite des sommes des deplacements tangentiels,
- c) Egalite des sommes des tensions normales de deux cotes de l'interface,
- d) Egalite des sommes des tensions tangentielles

et en definissant K comme le rapport des densites on obtient 4 equations en fonction des angles et des amplitudes. Pour l'onde P incidente ces equations sont les suivantes:

$$(A-C) \sin a + D \sin b - E \sin e + F \cos f = 0$$

$$(A-C) \cos a + D \sin b - E \cos e - F \sin f = 0$$

$$-(A+C) \sin 2a + b \frac{V_1}{U_1} \cos 2b + EK \left(\frac{U_2}{U_1} \right)^2 \frac{V_1}{V_2} \sin 2e - FK \left(\frac{U_2}{U_1} \right)^2 \frac{V_1}{U_2} \cos 2f = 0 \dots (21)$$

$$-(A-C) \cos 2a + D \frac{U_1}{V_1} \sin 2b + E \frac{V_2}{V_1} \cos 2f + FK \frac{U_2}{V_2} \sin 2f = 0$$

En se donnant a et en prenant A=1 on a a faire a un systeme de 4 equations lindaires a 4 inconnus. Si l'on nomme (a) la matrice des coefficients, (A) la matrice representee par les termes contenant A et (C) la matrice des inconnues, (21) peut etre exprimee comme: (A)=(a) (C)

En passant de la premiere couche a la deuxieme le meme systeme devient:

$$(A_1) = (a_1)(C_1) \dots \dots \dots (22)$$

Dans cette formule l'indice superieure appartenant a C represents l'inconnue C dans la formule (21)

$$(22) \text{ donne } (C_1) = (a_1)^{-1} (A_1) \dots \dots \dots (23)$$

En passant de la deuxieme a la troisieme il est evident que

$$(A_2) = (C_1)$$

d'ou on peut ecrire

$$(C_2) = (a_2)^{-1} (A_2) \dots \dots \dots (24)$$

$$(C_n^{-1}) = (a_n)^{-1} (A_n)$$

n ieme recurrence nous donne l'amplitude du rayon sortant du milieu.

Il suffit donc chaque fois d'injecter la valeur de C dans le systeme et d'amenager comme il convient la matrice des coefficients pour ensuite resoudre n fois le systeme ainsi obtenu.

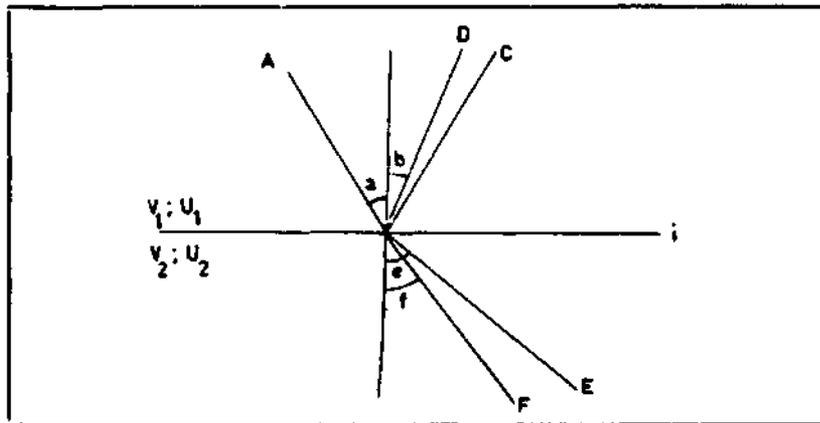


Fig. 2

A cet effet nous avons établi un programme que nous vous présentons ci-dessous:

```

DIMENSION V (100), SIA (100), G (4,4),
RFR (4), VO (100)
READ (2,104) SI
104 FORMAT (F5.3)
SIA (1)=SI
READ (2,100) K
100 FORMAT (13)
READ (2,101) Z
101 FORMAT (F5.0)
READ (2,102) V1
102 FORMAT (F.0)
READ (2,103) A
103 FORMAT (F8.5)
TK=K
ZT=Z/TK
FAC=1.
V (1)=V1
DOI I=1, K
V (I+1)=V(I) (1.+(ZT*A)
VO(I)=(V(I+1)+V(I))/2.
IF(I-1)1,1,2
2 RV=VO(I)/VO(I-1)
SIA(I)=SIA(I-1)/RV
SIE=SIA(I)/RV
SIB=SIA(I)/SQRT(3.)
COA=SQRT(1.-SIA(I)**2)
SIA=2.*SIA(I)*COA
SIF=SIE/SQRT(3.)
COB=SQRT(1.-SIB**2)
COE=SQRT(1.-SIE**2)
COF=SQRT(1.-SIF**2)
SIB=2.*SIB*COB
SIE=2.*SIE*COE
SIF=2.*SIF*COF
CO2B=COB**2-SIB**2
CO2E=COE**2-SIE**2
CO2F=COF**2-SIF**2
G(1,1)=SIA(I)
G(1,2)=COB
G(1,3)=-SIE
G(1,4)=COF
RFR(1)=-FAC*SIA (I)
G(2,1)=COA
G(2,2)=SIB
G(2,3)=-COE
G(2,4)=-SIF
RFR(2)=-FAC*COA
G(3,1)=-SIA
G(3,2)=CO2B SQRT(3.)
G(3,3)=SIE/RV**2
G(3,4)=-CO2F SQRT(3.)/RV**2
RFR(3)=FAC SIA
G(4,1)=CO2B
G(4,2)=SIB/SQRT(3.)
G(4,3)=CO2F/RV**2
G(4,4)=SIF/(RV**2*SQRT(3.1))
CALL SIMQ (G,RFR,4,KS)
FAC,RFR(3)
1 CONTINUE
WRITE 3,200 FAC
200 FORMAT(2X,F11.8)
CALL EXIT
END

```

c. Calcul numérique et comparaison

$$a = 0,0004$$

$$z = 500 \text{ m}$$

$$V_o = 1000 \text{ m/s}$$

$$V_{n+1} = 1200 \text{ m/s}$$

Pour les valeurs ci-dessus, en utilisant la formule (20) nous avons trouvé les changements introduits dans les amplitudes se rapportant à des angles d'attaque (Fig. 3) différents

pour $\sin \theta_o = 0,25$ la valeur trouvée : 0,0016

pour $\sin \theta_o = 0,50$ la valeur trouvée : 0,00126

pour $\sin \theta_o = 0,75$ la valeur trouvée : 0,000833

Dans le calcul il est évident qu'il a été tenu compte de l'expansion géométrique. Pour extraire le changement dû uniquement aux réflexions et réfractions, il suffit de calculer les longueurs d'arc correspondant à chaque angle (Fig. 3) et diviser les valeurs trouvées par les longueurs d'arc. Finalement, en prenant $A=1$ à l'entrée, à la sortie on trouve pour les amplitudes W_1, W_2, W_3 les valeurs suivantes:

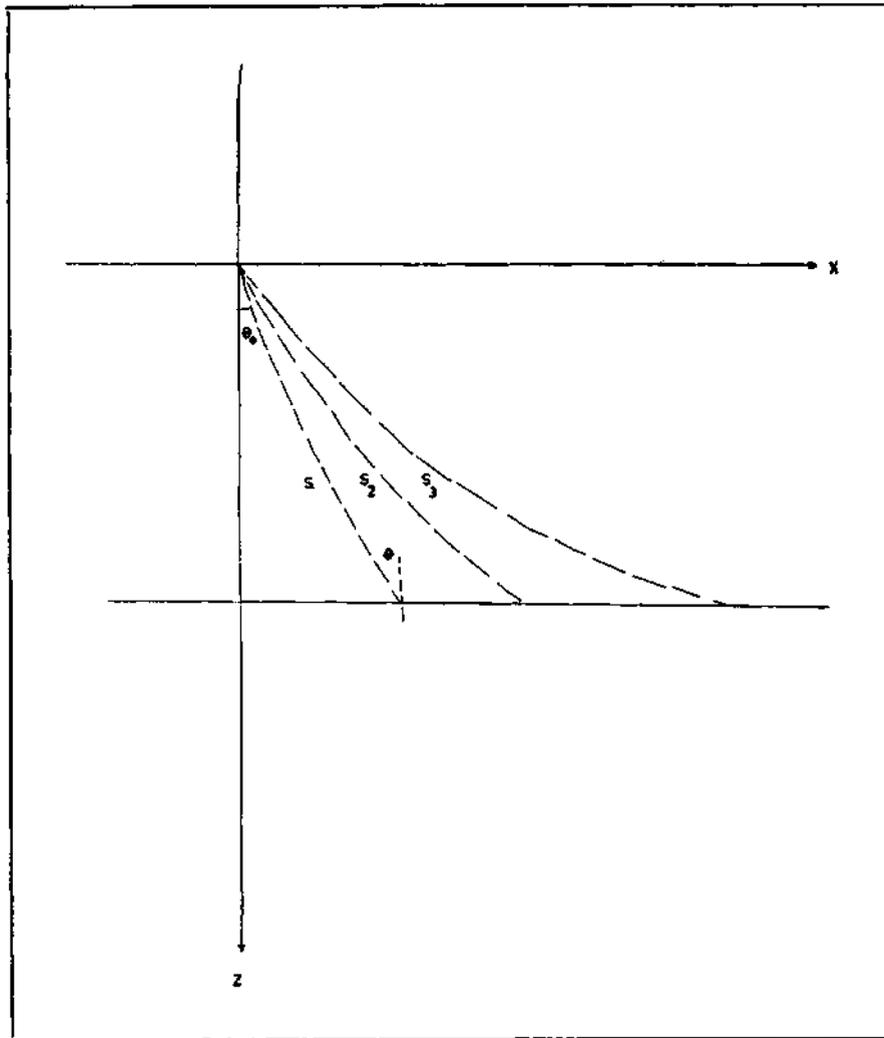


Fig. 3

$$S_1 = 0,0016 = 0,0016 = 0,8208$$

$$S_3 = 0,000833 = 0,000833 = 0,4993$$

En adoptant des vitesses en escalier sur le meme modele nous avons essaye la deuxieme solution en utilisant les formules (21), (23), (24).

Pour chaque angle d'attaque, nous avons divise le milieu en n tranches. En prenant pounn respectivement 4,40, 100 on trouve les amplitudes correspondantes comme suit:

pour $\sin \theta_0 = 0,25$

$$C_4 = 0,85973 \quad C_{40} = 0,82180 \quad C_{100} = 0,81933$$

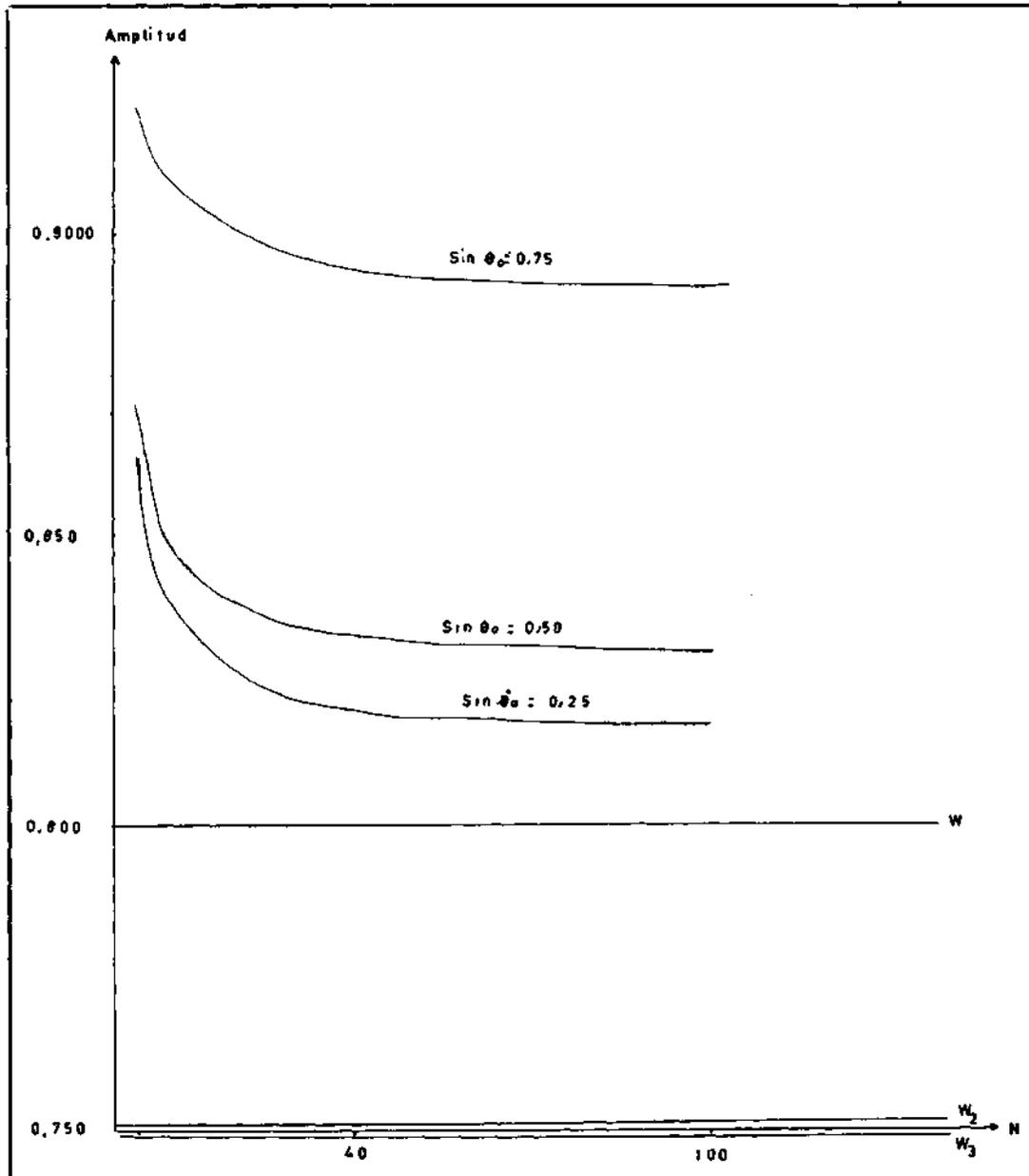


Fig. 4

pour $\sin \theta_0 = 0,50$

$$C_4 = 0,86883 \quad C_{40} = 0,833626 \quad C_{100} = 0,83134$$

pour $\sin \theta_0 = 0,75$

$$C_4 = 0,92002 \quad C_{40} = 0,89432 \quad C_{100} = 0,89262$$

Figure 4 represente les courbes obtenues, ainsi que les valeurs W_1 , W_2 , W_3 .

Un rapide coup d'oeil montre que quel que soit θ_0 la fonction d'amplitude presente une convergence assez rapide. Autrement dit, il y a peu de difference entre echantillonnage en 40 tranches et en 100 tranches.

On peut observer, en outre, que en prenant $\theta_0 = 0$ de la formule (10) on trouve:

$$W_{az} = \underline{1} \underline{0,833}$$

Ceci nous montre, s'il en etait besoin, que l'amplitude n'est pas une fonction lineaire de θ_0 . Car leur relation est definie par les equations de Zoeppritz. La formule (20) nous donne, sans doute, des resultats refletant mieux la realite. Il semble, d'autre part, que pour θ_0 grand la difference entre les deux modes de calcul augmente. Il en resulte que meme si Ton adoptait un nombre assez grand pour n, du fait qu'il n'existe pas une convergence entre les deux methodes, un echantillonnage avec vitesse constante ne donne pas toujours une bonne approximation.

Manuscript received August 24, 1972

BIBLIOGRAPHIE

McCAMY, P.; MEYER, J. & SMITH (1962): Generally applicable solutions of Zoeppritz amplitude equation. *B.S.S.A.*

BORTFELD, R. (1960): Seismic waves in transition layers. *Geophysical Prospecting*.

HRON, Frantisek (1969): Introduction to the ray theory in a broader sense. *Laboratoire de Physique de l'Ecole Normale Superieure—Universite de Paris*.

EWING, M.; JARDETZKY, W. & PRESS, F. (1957): Elastic waves in layered media.