Review
Journal of Business and Trade (JOINBAT) 6(1), 56-67, 2025
Recieved: 14-Dec-2024 Accepted: 27-Feb-2025
https://doi.org/10.58767/joinbat.1601559

SAKARYA UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Kesirli Diferensiyel Denklemlerle Finansal Problemlerin Matematiksel Analizi ve Çözüm Yöntemleri

Engin CAN[1]

[1] Sakarya Uygulamalı Bilimler Üniversitesi, Teknoloji Fakültesi, Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü, Sakarya, Türkiye

ÖZ

Finansal problemlerin analizi ve çözümü, geleneksel matematiksel yöntemlerin sınırlarını zorlayan karmaşıklıklar içerir. Özellikle finansal piyasalarda gözlemlenen volatilite, alışkanlık etkileri ve uzun vadeli bağımlılıklar gibi özellikler, klasik diferensiyel denklemlerle modellemede yetersiz kalabilir. Bu bağlamda, kesirli diferensiyel denklemler, finansal matematiğe yeni bir yaklaşım sunarak bu tür karmaşık süreçleri daha etkili bir şekilde temsil etme potansiyeline sahiptir. Kesirli hesaplama, türev ve integral işlemlerinin tam sayı olmayan mertebeleriyle çalışarak, kolayca sınıflandırılamayan yayılma süreçlerini modelleme imkanı sağlar. Bu özellikler, finansal sistemlerdeki uzun vadeli bağımlılıkları, geçmiş olayların mevcut durumlara etkisini ve piyasaların karmaşık doğasını daha doğru bir şekilde açıklamak için güçlü bir araç sunar. Bu çalışmada, kesirli diferensiyel denklemlerin teorik temelleri ele alınarak, bu denklemlerin finansal problemlerdeki uygulanabilirliği incelenmiştir. Özellikle volatilite analizi, opsiyon fiyatlandırma, risk yönetimi ve portföy optimizasyonu gibi temel finansal alanlarda kesirli modellerin sunduğu avantajlar tartışılmıştır. Geleneksel Black-Scholes modelinin kesirli versiyonu gibi spesifik uygulamalar, piyasaların daha gerçekçi bir şekilde modellenmesini mümkün kılarak bu yöntemlerin potansiyelini göstermektedir. Ayrıca, finansal verilerin kesirli zaman serisi analizine tabi tutulması, kolayca sınıflandırılamayan yayılma süreçli piyasa davranışlarının daha iyi anlaşılmasını sağlamaktadır. Çalışmada aynı zamanda, kesirli denklemlerin çözümünde kullanılan analitik ve nümerik yöntemlerin literatürünü de içermektedir. Sonlu fark yöntemleri, spectral yaklaşımlar ve Grünwald-Letnikov tekniği gibi nümerik yöntemler, kesirli denklemlerin çözümünde kritik bir rol oynar. Bunun yanı sıra, yapay zeka destekli algoritmaların, finansal verilerden öğrenerek daha etkili çözümler sunma potansiyeline sahip olduğu vurgulanmıştır. Ancak, kesirli diferensiyel denklemlerin çözümünde karşılaşılan zorluklar bu alanda daha fazla çalışmaya ihtiyaç duyulduğunu göstermektedir. Gelecekte, daha gelişmiş hesaplama yöntemlerinin ve veri odaklı yaklaşımların entegrasyonu ile bu modellerin finansal matematikteki rolü daha da artacaktır. Sonuç olarak bu çalışmayla, kesirli diferensiyel denklemlerle finansal problemlerin çözümüne yönelik yapılmış ve gelitirilmeye aday çalışmaların teorik, uygulama ve araştırma alanları sunulmaya çalışılmıştır.

Anahtar kelimeler: Kesirli diferensiyel denklemler, finansal matematik, matematiksel modelleme, nümerik yöntemler, volatilite analizi.

Corresponding Author e-mail: ecan@subu.edu.tr

Cite as: Can, E. (2025). Kesirli Diferensiyel Denklemlerle Finansal Problemlerin Matematiksel Analizi ve Çözüm Yöntemleri. *Journal of Business and Trade*, 6(1), 56-67. https://doi.org/10.58767/joinbat.1601559

Mathematical Analysis and Solution Methods for Financial Problems with Fractional Differential Equations

ABSTRACT

The analysis and solution of financial problems involve complexities that challenge the limits of traditional mathematical methods. Especially in financial markets, characteristics such as volatility, memory effects, and long-term dependencies can be insufficiently modeled by classical differential equations. In this study, fractional differential equations offer a new approach to financial mathematics, with the potential to represent such complex processes more effectively. Fractional calculus, by working with non-integer orders of differentiation and integration, provides the ability to model diffusion processes that cannot be easily classified. These features provide a powerful tool to more accurately explain long-term dependencies in financial systems, the impact of past events on current situations, and the complex nature of markets. In this work, the theoretical foundations of fractional differential equations are addressed, and the applicability of these equations in financial problems is examined. In particular, the advantages of fractional models in fundamental financial areas such as volatility analysis, option pricing, risk management, and portfolio optimization have been discussed. Specific applications such as the fractional version of the traditional Black-Scholes model demonstrate the potential of these methods by enabling a more realistic modeling of the markets. Additionally, subjecting financial data to fractional time series analysis facilitates a better understanding of market behaviors with diffusion processes that are not easily classified. The study also includes a review of the literature on the analytical and numerical methods used in the solution of fractional equations. Numerical methods such as finite difference methods, spectral approaches, and the Grünwald-Letnikov technique play a critical role in the solution of fractional equations. In addition, it has been emphasized that AI-supported algorithms have the potential to offer more effective solutions by learning from financial data. However, the challenges encountered in solving fractional differential equations indicate that more research is needed in this area. In the future, with the integration of more advanced computational methods and data-driven approaches, the role of these models in financial mathematics will further increase. As a result, this study aims to present the theoretical, practical, and research areas of works that have been conducted and are candidates for further development in solving financial problems with fractional differential equations.

Keywords: Fractional differential equations, financial mathematics, mathematical modeling, numerical methods, volatility analysis.

1 Giriş

Finansal sistemler, doğası gereği karmaşık, belirsizliklerle dolu ve dinamik yapılardır. Bu sistemlerin, bireysel yatırımcı davranışlarından makroekonomik değişkenlere kadar geniş bir yelpaze altında etkileri vardır. Özellikle finansal piyasalarda meydana gelen fiyat dalgalanmaları, volatilite hareketleri, risk ve likidite gibi unsurlar, finansal problemlerin matematiksel olarak modellenmesini hem zorunlu hem de oldukça zorlu bir alan haline getirmiştir. Bu zorluklar, finansal sistemlerin içsel dinamiklerinin daha iyi anlaşılması ve yönetilmesi için yenilikçi matematiksel yaklaşımların geliştirilmesini gerekli kılmıştır. İşte bu noktada kesirli diferensiyel denklemler, finansal matematikte giderek daha fazla ilgi gören bir araç olarak öne çıkmaktadır.

Kesirli diferensiyel denklemler, türev ve integral işlemlerinin tam sayı olmayan mertebelerini ele alarak, klasik diferensiyel denklemlerin ötesine geçen bir analiz çerçevesi sunar (Podlubny, 1999; Kilbas et al., 2006). Geleneksel diferensiyel denklemler, genellikle doğrudan ilişkileri ve kısa vadeli bağımlılıkları modellemek için uygundur. Ancak finansal piyasalar, yalnızca kısa vadeli etkilerle sınırlı kalmayan, uzun vadeli bağımlılıkları, davranış etkilerini ve piyasanın normal dışı yayılma süreçlerini içeren karmaşık bir yapıya sahiptir. Kesirli hesaplama, bu tür uzun vadeli bağımlılıkları ve yayılma süreçlerini daha etkili bir şekilde modellemek için uygun bir matematiksel çerçeve sağlar (Mandelbrot, 1963; Hurst, 1951). Özellikle volatilite analizi, finansal zaman serileri ve risk yönetimi gibi alanlarda kesirli modellerin kullanımı, finansal sistemlerin daha gerçekçi ve ayrıntılı bir şekilde anlaşılmasını mümkün kılmaktadır.

Finansal matematikte klasik diferensiyel denklemler, özellikle Black-Scholes modeli gibi yaklaşımlar aracılığıyla önemli bir etki yaratmıştır. Black-Scholes modeli, opsiyon fiyatlandırma alanında devrim yaratan bir araç olarak öne çıkmış ve finansal ürünlerin değerlemesinde bir standart haline gelmiştir. Bununla birlikte, bu modelin belirli sınırlamaları olduğu da iyi bilinmektedir. Örneğin, piyasa volatilitesindeki oynaklık, geçmiş olayların mevcut fiyatlamalara etkisi ve piyasalardaki normal dışı hareketlilikler, Black-Scholes modeli tarafından tam olarak yakalanamamaktadır (Cont, 2001; Cartea ve del-Castillo-Negrete, 2007). Kesirli Black-Scholes modeli, bu sınırlamaları ele alarak, piyasa davranışlarının daha doğru bir şekilde modellenmesini sağlayan bir genişleme sunar. Özellikle volatilite dinamiklerini ve bellek etkilerini içeren bu model, geleneksel modele kıyasla piyasa verileriyle daha uyumludur.

Kesirli diferensiyel denklemler, yalnızca teorik bir araç olmanın ötesine geçerek, finansal piyasalarda uygulamalı bir çözüm sunar. Volatilite modellemesinde bellek etkilerinin dikkate alınması, piyasalardaki normal dışı davranışların daha iyi anlaşılmasını sağlar. Örneğin, uzun vadeli bağımlılık ve Hurst üssü gibi kavramlar, finansal zaman serilerinin kesirli bir yaklaşımla analiz edilmesini mümkün kılar. Bu tür analizler, sadece finansal piyasalarda değil, aynı zamanda ekonometrik modelleme, portföy optimizasyonu ve risk yönetimi gibi alanlarda da etkili sonuçlar doğurur (Metzler ve Klafter, 2000). Kesirli modeller, piyasalardaki belirsizlikleri ve dalgalanmaları modelleyerek, yatırımcılar ve politika yapıcılar için daha etkili stratejiler geliştirilmesine olanak tanır.

Bu çalışmanın amacı, kesirli diferensiyel denklemlerin teorik temellerini açıklamak, bu modellerin finansal problemlerdeki uygulanabilirliğini değerlendirmek ve çözüm yöntemlerini detaylı bir şekilde ele almaktır. Çalışmada, kesirli denklemlerin finansal matematikteki rolü, teorik temel, pratik uygulama ve çözüm yöntemleri olmak üzere üç ana eksen etrafında incelenmiştir.

Kesirli diferensiyel denklemlerin çözümü, analitik yaklaşımlar kadar nümerik yöntemlerle de zenginleşmiştir. Sonlu Farklar yöntemi, spectral yaklaşımlar ve Grünwald-Letnikov tekniği gibi nümerik yöntemler, bu denklemlerin çözümünde önemli bir yere sahiptir. Ayrıca, yapay zeka destekli algoritmaların ve veri odaklı yaklaşımların kesirli modellerin çözümüne entegrasyonu, bu alandaki araştırmalara önemli katkılar sağlamıştır (Cartea ve del-Castillo-Negrete, 2007). Ancak, kesirli diferensiyel denklemlerin çözümünde karşılaşılan hesaplama zorlukları, bu alanda daha fazla çalışmaya ihtiyaç duyulduğunu göstermektedir.

Dolayısıyla kısaca bu çalışmada, kesirli diferensiyel denklemleri finansal matematik bağlamında detaylı bir şekilde incelenmeye çalışılmış, bu modellerin finansal sistemlerin dinamiklerini anlamada nasıl kullanılabileceğinin gösterilmesi amaçlanmıştır. Çalışmanın bundan sonraki bölümlerinde sırasıyla; ilk olarak, kesirli diferensiyel denklemlerin matematiksel altyapısı ve finansal problemlere uygulanabilirliği tartışılmış, daha sonra, finansal piyasalardaki belirli uygulama alanları, özellikle volatilite modellemesi, opsiyon fiyatlandırma ve risk yönetimi gibi başlıca konular ele alınmıştır. Son olarak da, kesirli denklemlerin çözümünde kullanılan analitik ve nümerik yöntemler üzerinde durulmuştur.

2 Kesirli Diferensiyel Denklemlerin Teorik Temelleri

2.1 Kesirli Hesaplamanın Tanımı ve Kapsamı

Kesirli hesaplama, türev ve integral işlemlerinin tam sayı olmayan mertebelerde uygulanmasıyla ilgilenen matematik dalıdır. Bu alan, klasik diferensiyel denklemlerin sunduğu sınırların ötesine geçerek, alışkanlık etkileri, sistemin geçmiş durumlarına bağımlılık gibi özellikleri modellemeyi mümkün kılar. Kesirli türevler ve integraller, normal dışı yayılma, alışkanlık etkileri ve uzun vadeli bağımlılık gibi süreçlerin modellenmesi için ideal bir araçtır (Podlubny, 1999; Kilbas et al., 2006).

Kesirli hesaplamanın matematiksel altyapısı, geleneksel türevlerin ve integral operatörlerinin genelleştirilmiş formlarına dayanır. En yaygın kullanılan tanımlar arasında Riemann-Liouville, Caputo ve Grünwald-Letnikov türevleri bulunur. Bu tanımların her biri farklı uygulamalara ve problemlere özgü avantajlar sunar. Kısaca bahsetmek gerekirse; Riemann-Liouville Türevi, tarihsel olarak ilk tanımlardan biri olup, çoğunlukla teorik çalışmalarda tercih edilir. Caputo Türevi, daha çok mühendislik ve uygulamalı matematik problemlerinde kullanılır, başlangıç koşullarını tanımlamada kolaylık sağlar. Grünwald-Letnikov Türevi ise nümerik hesaplamalarda ve algoritmalarda kullanımı yaygındır (Kilbas et al., 2006; Diethelm, 2010).

Bu farklı tanımların temelinde, türev işleminin yalnızca mevcut durumu değil, aynı zamanda tüm geçmiş durumları hesaba katan bir yapıya sahip olması yer alır. Kesirli türevler, bu özelliğiyle alışkanlık etkisine sahip sistemlerin modellenmesinde klasik türevlerin ötesine geçer.

2.2 Kesirli Diferensiyel Denklemler ve Özellikleri

Kesirli diferensiyel denklemler, diferensiyel denklemlerin kesirli türev ve integral operatörleri içeren genelleştirilmiş formudur. Bu denklemler, klasik diferensiyel denklemlere göre iki temel avantaj sağlar. Bu avantajlar;

- Uzun Vadeli Bağımlılıklar: Kesirli denklemler, sistemin geçmiş durumlarının gelecekteki davranış üzerindeki etkisini hesaba katar. Bu özellik, özellikle finansal piyasalardaki fiyat hareketleri ve volatilite analizinde önemlidir,
- Karmaşık Süreçlerin Modellenmesi: Normal dışı yayılma ve karmaşık yapılar gibi karmaşık süreçler, kesirli diferensiyel denklemlerle daha iyi temsil edilebilir (Mandelbrot, 1983; Metzler ve Klafter, 2000)

olarak özetlenebilir.

Kesirli diferensiyel denklemlerin çözümü genellikle analitik olarak elde edilemez; bu nedenle nümerik yöntemler yaygın olarak kullanılmaktadır. Ayrıca, bu denklemler başlangıç ve sınır koşullarının doğru tanımlanmasını gerektirir, çünkü yanlış tanımlanan başlangıç koşulları sistemin davranışını önemli ölçüde etkileyebilir (Diethelm, 2010).

2.3 Kesirli Hesaplamanın Finansal Matematikteki Yeri

Finansal matematikte kesirli diferensiyel denklemler, özellikle alışkanlık etkilerinin ve uzun vadeli bağımlılıkların olduğu durumlarda uygulanır. Örnek olarak;

- Volatilite Modelleme: Kesirli türevler, finansal piyasalardaki volatiliteyi modellemek için güçlü bir araç sunar. Geleneksel modellerde genellikle eksik temsil edilen geçmiş etkiler, kesirli yaklaşımlar sayesinde hesaba katılabilir,
- Opsiyon Fiyatlandırma: Black-Scholes modelinin kesirli versiyonu, piyasa volatilitesindeki belirsizlikleri ve geçmişe bağımlılığı daha gerçekçi bir şekilde modelleyerek klasik modelin eksikliklerini giderir (Cartea ve del-Castillo-Negrete, 2007),

- Risk Yönetimi: Kesirli modeller, portföy yönetiminde bellek etkilerini dikkate alarak risk analizi ve yönetimini daha etkili bir hale getirir (Mishura ve Zili, 2008)

verilebilir.

Kesirli diferensiyel denklemler, birçok avantaja sahip olmakla birlikte belirli zorluklar da barındırır. Avantaj olarak, uzun vadeli bağımlılıkların modellenmesi, daha gerçekçi ve karmaşık süreçlerin temsil edilmesi ve esnek matematiksel yapı, farklı uygulamalara uyarlanabilir olmaları, kısıtlama olarak da, analitik çözümlerin nadir olması, model parametrelerinin seçimi ve doğruluğu söylenebilir.

3 Finansal Problemlerde Kesirli Denklemlerin Kullanımı

3.1 Volatilite Modelleme

Finansal piyasalarda volatilite, fiyatların zaman içindeki oynaklığı ile tanımlanır ve risk analizi, opsiyon fiyatlandırma ve portföy yönetimi gibi birçok alanda kritik bir rol oynar. Volatilite genellikle geleneksel modellerle incelenir, ancak piyasalardaki uzun vadeli bağımlılıklar ve geçmiş olayların etkisi dikkate alınmadığında bu modeller yetersiz kalabilir. Kesirli diferensiyel denklemler, volatilitenin bellek etkileri ile analiz edilmesinde güçlü bir araç olarak öne çıkmaktadır (Comte ve Renault, 1998; Cartea ve del-Castillo-Negrete, 2007).

Örneğin, kesirli Heston modeli, klasik Heston volatilite modeline kıyasla daha geniş bir kapsama sahiptir. Bu model, volatilitenin uzun vadeli bağımlılıklarını ve karmaşık özelliklerini hesaba katarak, piyasalardaki dinamiklerin daha gerçekçi bir şekilde modellenmesini sağlar. Ayrıca, bu tür modeller, piyasa stres testlerinde ve risk senaryolarında daha güvenilir tahminler sunar.

3.2 Opsiyon Fiyatlandırma

Opsiyon fiyatlandırma, finansal matematiğin en önemli uygulama alanlarından biridir. Black-Scholes modeli, bu alanda bir devrim yaratmış olsa da, modelin varsayımları (sabit volatilite, geçmiş etkilerinin olmaması vb.) gerçek piyasa koşullarıyla tam anlamıyla örtüşmemektedir (Black ve Scholes, 1973; Merton, 1973). Bu noktada, kesirli Black-Scholes modeli, bu sınırlamaları aşmak için bir alternatif olarak geliştirilmiştir.

Kesirli Black-Scholes modeli, sabit volatilite yerine bellek etkilerini ve piyasanın tarihsel oynaklık profillerini hesaba katar. Bu modelin anahtar özelliği, volatilitenin yalnızca güncel piyasa koşullarına değil, aynı zamanda geçmiş olaylara da bağlı olmasıdır. Örneğin, piyasa çöküşleri ve yüksek volatilite dönemlerinin etkisi, kesirli türevler aracılığıyla modellenebilir ve bu durum, opsiyon fiyatlarının daha doğru bir şekilde belirlenmesine olanak tanır (Cartea ve del-Castillo-Negrete, 2007).

Kesirli modellerin bir diğer avantajı, piyasanın normal dışı hareketlerini daha iyi yansıtmalarıdır. Geleneksel Black-Scholes modelinde sıklıkla gözlemlenen "volatilite gülümsemesi" gibi normal dışı etkileri, kesirli yaklaşımlar ile daha iyi açıklanabilir (Metzler ve Klafter, 2000).

3.3 Risk Yönetimi ve Portföy Optimizasyonu

Finansal sistemlerde risk yönetimi, belirsizlikleri minimize etmek ve yatırımcıların kararlarını optimize etmek için kritik bir süreçtir. Geleneksel risk yönetimi modelleri, genellikle geçmiş verilerin mevcut ve gelecekteki risk üzerindeki etkisini sınırlı bir şekilde dikkate alır. Kesirli diferensiyel denklemler, geçmiş veri bağımlılığını ve alışkanlık etkilerini dahil ederek, daha hassas risk analizleri yapılmasını sağlar (Mishura ve Zili, 2008).

Özellikle portföy optimizasyonunda, yatırım araçlarının getirileri arasındaki korelasyonun zamansal bağımlılıkları dikkate alınmalıdır. Kesirli modeller, bu korelasyonları daha iyi analiz ederek, yatırımcıların portföylerini optimize etmelerine yardımcı olur. Bu tür bir yaklaşım, yalnızca mevcut piyasa koşullarını değil, aynı zamanda uzun vadeli getiri profillerini de hesaba katar.

3.4 Finansal Zaman Serilerinin Analizi

Finansal zaman serilerinin analizi, piyasaların dinamiklerini anlamak ve gelecekteki fiyat hareketlerini tahmin etmek için kullanılan temel yöntemlerden biridir. Ancak, finansal zaman serilerinin doğası gereği uzun vadeli bağımlılık göstermesi ve alışkanlık etkilerine sahip olması, geleneksel yöntemlerin etkinliğini sınırlandırır. Kesirli zaman serisi modelleri, Hurst üssü gibi kavramlar aracılığıyla bu bağımlılıkları yakalamada başarılıdır (Hurst, 1951).

Kesirli Brown hareketi gibi stokastik süreçler, finansal zaman serilerinin doğasını daha iyi açıklayabilir. Bu süreçler, zaman serilerindeki alışkanlık etkilerini ve piyasa fiyatlarının karmaşık yapısını temsil eder. Özellikle volatilite kümelenmesi, uzun vadeli bağımlılık ve anomalik yayılma gibi piyasa özellikleri, kesirli süreçlerle daha iyi modellenebilir (Mandelbrot, 1983).

Kesirli diferensiyel denklemler, yukarıda bahsedilenlerin yanı sıra örneğin kredi riski analizinde, kredi riskinin uzun vadeli bağımlılıklarını modellemek için kullanılmaktadır. Bu yöntem, bankaların ve finansal kurumların kredi risklerini daha etkili bir şekilde yönetmelerine yardımcı olabilir. Ya da örneğin, bir makroekonomik modellemede, ekonomik büyüme ve iş döngülerindeki uzun vadeli bağımlılıkları incelemek için de kullanılmaktadır (Diethelm, 2010).

4 Çözüm Yöntemleri ve Nümerik Yaklaşımlar

Kesirli diferensiyel denklemlerin çözümü, bu denklemlerin doğası gereği klasik diferensiyel denklemlerden daha karmaşıktır. Kesirli türev ve integral operatörlerinin hesaplama zorlukları, bu denklemler için hem analitik hem de nümerik çözüm yöntemlerinin geliştirilmesini zorunlu kılmıştır. Analitik çözümler yalnızca belirli sınırlı durumlar için elde edilebilirken, nümerik yöntemler daha genel ve karmaşık problemlerin çözümünde önemli bir araç olarak öne çıkar. Aşağıda, bu alandaki temel çözüm yöntemleri ele alınmıştır.

4.1 Analitik Çözüm Yöntemleri

Kesirli diferensiyel denklemlerin analitik çözümleri, genellikle özel durumlar ve idealize edilmiş problemler için mümkündür. Bu çözümler, teorik çalışmalarda önemli bir yer tutsa da, karmaşık finansal problemler için çoğu zaman uygulanabilir değildir. En yaygın kullanılan analitik yöntemler olarak,

- Laplace Dönüşümü: Kesirli diferensiyel denklemlerin çözümünde sıklıkla kullanılan bir yöntemdir. Bu teknik, özellikle Riemann-Liouville ve Caputo türevleriyle ifade edilen denklemlerin çözümünde etkilidir (Podlubny, 1999),

- Green Fonksiyonları: Kesirli denklemler için Green fonksiyonlarının kullanımı, başlangıç ve sınır koşullarına dayalı çözümler elde etmeyi mümkün kılar. Özellikle finansal problemlerde bu yöntem, başlangıç durumlarının etkilerini analiz etmek için faydalıdır (Kilbas et al., 2006),
- Seri Çözümleri: Güç serileri ve Mittag-Leffler fonksiyonları, kesirli diferensiyel denklemlerin analitik çözümünde önemli bir rol oynar. Mittag-Leffler fonksiyonu, kesirli sistemlerin zamanla azalan bellek etkilerini modellemek için sıklıkla kullanılır (Diethelm, 2010)

verilebilir.

4.2 Nümerik Çözüm Yöntemleri

Nümerik yöntemler, kesirli diferensiyel denklemlerin çözümünde en yaygın kullanılan araçlardır. Bu yöntemler, geniş bir problem seti için uygulanabilirlik sunar ve özellikle finansal problemlerdeki karmaşık süreçlerin modellenmesinde kritik bir rol oynar.

- Sonlu Farklar Yöntemi (Finite Difference Method): Kesirli türevlerin nümerik olarak çözümü için kullanılan en yaygın yöntemlerden biridir. Grünwald-Letnikov türevi, sonlu farklar yönteminin kesirli diferensiyel denklemlere uygulanmasında temel bir yaklaşımdır. Bu yöntem, zamanla değişen volatiliteyi modellemek gibi finansal problemlerde sıklıkla kullanılır (Meerschaert ve Tadjeran, 2004).
- Spektral Yöntemler: Kesirli diferensiyel denklemlerin çözümünde spektral yöntemler, çözüm doğruluğunu artırmak için kullanılmaktadır. Bu yöntem, çözüm fonksiyonlarını polinomlar veya trigonometrik fonksiyonlar gibi özel fonksiyonlarla ifade ederek hızlı ve doğru sonuçlar elde eder. Özellikle yüksek doğruluk gerektiren finansal modellemelerde etkilidir (Shen ve Wang, 2011).
- Adomian Ayrıştırma Yöntemi (Adomian Decomposition Method): Doğrusal olmayan kesirli diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanılır. Yöntem, denklemi ayrıştırarak kolay çözülebilir alt problemlere ayırır. Bu yöntem, finansal risk modellemelerinde yaygın olarak uygulanmıştır (Jafari ve Daftardar-Gejji, 2006).
- Monte Carlo Simülasyonları: Monte Carlo yöntemleri, stokastik kesirli diferensiyel denklemler için güçlü bir çözüm aracıdır. Finansal uygulamalarda, özellikle opsiyon fiyatlandırma ve risk analizi gibi belirsizlik içeren durumlarda tercih edilir (Mishura ve Zili, 2008).

4.3 Yapay Zeka ve Makine Öğrenimi Destekli Yöntemler

Son yıllarda, yapay zeka (AI) ve makine öğrenimi (ML) yöntemleri, kesirli diferensiyel denklemlerin çözümünde yenilikçi bir yaklaşım olarak öne çıkmıştır. Bu yöntemler, karmaşık finansal sistemlerin modellenmesinde önemli avantajlar sunar:

- Derin Öğrenme (Deep Learning): Sinir ağları, kesirli diferensiyel denklemleri çözmek için kullanılan güçlü bir araç haline gelmiştir. Özellikle Recurrent Neural Networks (RNN) ve Convolutional Neural Networks (CNN), finansal zaman serilerinin analizi ve tahmini için kullanılmaktadır (Raissi et al., 2019).
- Veri Odaklı Yaklaşımlar: Büyük veri analitiği, kesirli diferensiyel denklemlerden türetilen finansal modellerin optimizasyonunda kullanılabilir. Bu yaklaşım, finansal verilerin uzun vadeli bağımlılıklarını ve bellek etkilerini analiz etmek için etkili bir araçtır (Wang ve Zhang, 2020).

Sonuç olarak çözüm yöntemlerinin bir karşılaştırılması tablo 1 de verilmiştir.

Tablo 1: *Çözüm Yöntemlerinin Karşılaştırılması*

Yöntem	Avantajlar
Sonlu Farklar Yöntemi (FDM)	Basit ve uygulaması kolay
Spektral Yöntemler	Yüksek doğruluk
Adomian Ayrıştırma Yöntemi	Doğrusal olmayan problemlere uygundur
Monte Carlo Simülasyonu	Stokastik süreçler için uygundur
Makine Öğrenimi Yöntemleri	Büyük veri setlerinde yüksek performans sağlar

5 Finansal Problemlere Uygulamalar

Kesirli diferensiyel denklemlerin çözüm yöntemleri, finansal problemlere doğrudan uygulanabilir. Örneğin:

- Opsiyon fiyatlandırmada Monte Carlo simülasyonu, kesirli Black-Scholes modeline entegre edilebilir.
- Volatilite analizi için sonlu farklar yöntemi kullanılabilir.
- Portföy optimizasyonu için yapay zeka destekli veri analitiği uygulanabilir.

Kesirli diferensiyel denklemler, finansal sistemlerin dinamiklerini daha gerçekçi bir şekilde modellemek için kullanılır. Aşağıda, bu denklemlerin finansal uygulamalardaki kullanımına dair somut örnekler sunulmuştur.

5.1 Kesirli Black-Scholes Modeli ile Opsiyon Fiyatlandırma

Klasik Black-Scholes modeli, opsiyon fiyatlandırmada temel bir araçtır; ancak piyasa verilerindeki bellek etkilerini ve uzun vadeli bağımlılıkları göz ardı eder. Bu eksiklikleri gidermek amacıyla, kesirli türevler kullanılarak modelin genelleştirilmiş bir versiyonu geliştirilmiştir.Örneğin, bir Avrupa tipi alım opsiyonunun fiyatlandırılmasında, kesirli Black-Scholes modeli kullanılarak, volatilitenin geçmişe bağımlılığı ve piyasa bellek etkileri hesaba katılır. Bu yaklaşım, opsiyon fiyatlarının piyasa verileriyle daha uyumlu olmasını sağlar (Cartea, Á. & del-Castillo-Negrete, D., 2007)

5.2. Kesirli Heston Modeli ile Volatilite Tahmini

Heston modeli, stokastik volatiliteyi modellemek için yaygın olarak kullanılır; ancak volatilitenin uzun vadeli bellek etkilerini tam olarak yansıtmaz. Kesirli Heston modeli, bu bellek etkilerini dahil ederek volatilite tahminlerinin doğruluğunu artırır. Örneğin, bir hisse senedinin gelecekteki volatilitesini tahmin etmek için kesirli Heston modeli uygulanır. Bu model, volatilitenin geçmiş değerlerine olan bağımlılığı dikkate alarak, daha isabetli tahminler sunar (Comte, F. & Renault, E., 1998).

5.3. Kesirli Vasicek Modeli ile Faiz Oranı Dinamikleri

Vasicek modeli, faiz oranlarının dinamiklerini modellemek için kullanılır; ancak kısa vadeli bellek etkilerini göz ardı eder. Kesirli Vasicek modeli, bu etkileri dahil ederek faiz oranı tahminlerinin doğruluğunu artırır. Örneğin, Merkez bankasının politika faiz oranlarının gelecekteki seyrini tahmin etmek için kesirli Vasicek modeli kullanılır. Bu model, faiz oranlarının geçmiş eğilimlerini ve bellek etkilerini dikkate alarak, daha güvenilir tahminler sağlar (Mishura, Y. & Zili, M., 2008).

5.4. Kesirli GARCH Modelleri ile Volatilite Kümelenmesi

GARCH modelleri, finansal zaman serilerindeki volatilite kümelenmesini modellemek için kullanılır; ancak uzun vadeli bağımlılıkları tam olarak yansıtmaz. Kesirli GARCH modelleri, bu bağımlılıkları dahil ederek volatilite tahminlerinin doğruluğunu artırır. Örneğin, bir borsa endeksinin günlük getiri volatilitesini tahmin etmek için kesirli GARCH modeli uygulanır. Bu model, volatilitenin uzun vadeli bağımlılıklarını ve bellek etkilerini dikkate alarak, daha isabetli tahminler sunar (Baillie, R. T., Bollerslev, T. & Mikkelsen, H. O., 1996).

5.5. Kesirli Brownian Hareketi ile Piyasa Modelleme

Kesirli Brownian hareketi, finansal piyasalardaki bellek etkilerini ve uzun vadeli bağımlılıkları modellemek için kullanılır. Bu yaklaşım, varlık fiyatlarının dinamiklerini daha gerçekçi bir şekilde yansıtır. Örneğin, bir hisse senedinin fiyat hareketlerini modellemek için kesirli Brownian hareketi kullanılır. Bu model, fiyatların geçmiş hareketlerine olan bağımlılığını ve bellek etkilerini dikkate alarak, daha doğru simülasyonlar sağlar (Mandelbrot, B. B. & Van Ness, J. W., 1968).

Sonuç olarak tablo 2 de, bazı finansiyel problemler, bu problemlerin çözümü için ilgili kesirli modeller ve bu modellerin amaçları gösterilmiştir.

Tablo 2: *Kesirli Denklemler ve Çözülen Problemler*

Problem	Kesirli Denklem	Amaç
Opsiyon Fiyatlandırma	Kesirli Black-Scholes Modeli	Bellek etkileri ile opsiyon fiyatlarının daha doğru belirlenmesi
Volatilite Tahmini	Kesirli Heston Modeli	Stokastik volatilitenin geçmiş bağımlılıklarla modellenmesi
Faiz Oranı Modelleme	Kesirli Vasicek Modeli	Faiz oranlarındaki uzun vadeli bağımlılıkların analizi
Zaman Serisi Analizi	Kesirli Zaman Serisi Modelleri	Finansal zaman serilerinin uzun vadeli bağımlılıklarla modellenmesi
Kredi Riski Analizi	Kesirli Kredi Risk Modelleri	Kredi temerrüt riskinin geçmiş verilere dayalı tahmini
Makroekonomik Modelleme	Kesirli Dinamik Modeller	Ekonomik büyüme ve iş döngülerindeki bağımlılıkların incelenmesi

6. Sonuç ve Gelecek Çalışmalar

6.1. Sonuç

Kesirli diferensiyel denklemler, geleneksel matematiksel modelleme yöntemlerinin ötesine geçerek, finansal problemlerin karmaşık dinamiklerini anlamada ve çözüm üretmede önemli bir araç olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu denklemler, özellikle finansal piyasalarda gözlemlenen alışkanlık etkilerini, uzun vadeli bağımlılıkları ve normal dışı yayılma süreçlerini modellemede büyük bir avantaj sağlamaktadır.

Bu çalışmada, finansal matematikte, volatilite modellemesi, opsiyon fiyatlandırma, faiz oranı modelleme, portföy optimizasyonu ve kredi riski analizi gibi birçok kritik alanda kesirli modellerin uygulanabilirliği gösterilmiştir. Örneğin, kesirli Black-Scholes modeli, volatilitenin geçmişe bağımlılığını hesaba katarak daha doğru opsiyon fiyatları sunarken, kesirli Heston modeli volatilitenin uzun vadeli bellek etkilerini daha hassas bir şekilde yakalamaktadır. Ayrıca, kesirli zaman serisi modelleri ve Brownian hareketi gibi yaklaşımlar, finansal piyasalardaki dinamiklerin daha derinlemesine analizine olanak tanımaktadır.

Bununla birlikte, kesirli diferensiyel denklemlerin çözümü bazı zorluklar içermektedir. Parametrizasyon sorunları ve nümerik yöntemlerin hassasiyeti gibi faktörler, bu modellerin finansal problemlerde yaygın bir şekilde kullanılabilmesinin önündeki başlıca engellerdir. Ancak, bu alandaki teknolojik ve yöntemsel ilerlemeler, gelecekte bu zorlukların üstesinden gelinmesini sağlayabilecek, geliştirilebilir bir potansiyele işaret etmektedir.

6.2. Gelecek Çalışmalar

Kesirli diferensiyel denklemler ve finansal matematik alanındaki araştırmalar, önümüzdeki yıllarda birçok yenilikçi çalışmaya kapı aralayacak gibi görünmektedir. Bu kapsamda, gelecek çalışmalarda aşağıdaki alanların öne çıkması beklenmektedir:

- Daha Gelişmiş Nümerik Yöntemler: Yüksek doğruluk sunan yeni algoritmalar, hem akademik çalışmalar hem de endüstriyel uygulamalar için büyük önem taşımaktadır,
- Makine Öğrenimi ve Yapay Zeka Uygulamaları: Gelecekte, derin öğrenme algoritmalarının, özellikle büyük finansal veri setleriyle entegre edilerek daha etkili kesirli modeller oluşturulmasında önemli bir rol oynaması beklenmektedir.
- Stokastik Kesirli Modeller: Bu modeller, özellikle risk analizi, türev ürünler ve portföy yönetimi gibi alanlarda daha sofistike çözümler üretmek için geliştirilebilir.
- Ekonomik ve Makroekonomik Uygulamalar: Gelecekte, bu modellerin makroekonomik politikaların analizinde ve uzun vadeli ekonomik tahminlerde daha yaygın bir şekilde kullanılması beklenmektedir.
- Çoklu Kesirli Sistemler: Gerçek finansal sistemler genellikle birden fazla bağımsız değişkene ve karmaşık etkileşimlere sahiptir. Bu nedenle, çoklu kesirli diferensiyel denklemlerin geliştirilmesi, bu tür sistemlerin daha iyi anlaşılmasını sağlayabilir. Özellikle, finansal varlıklar arasındaki korelasyonların ve çapraz etkilerin modellenmesi bu alandaki önemli bir araştırma konusu olacaktır.
- Gerçek Zamanlı Uygulamalar: Finansal piyasalarda gerçek zamanlı veri analizi ve karar verme süreçleri, giderek daha fazla önem kazanmaktadır. Kesirli modellerin gerçek zamanlı veri akışlarına entegre edilmesi, yatırım kararları ve risk yönetimi için daha etkili araçlar sunabilir.

- Kesirli Modelleme Yazılımları ve Araçları: Özellikle finans sektöründe, bu tür araçların kullanımıyla modelleme süreçlerinin hızlanması ve kolaylaşması beklenmektedir.
- Ekosistem Uygulamaları ve Sürdürülebilirlik: Kesirli modeller, finansal sistemlerin sürdürülebilirlik analizi ve çevresel etkilerinin değerlendirilmesinde de kullanılabilir. Örneğin, karbon piyasalarının dinamiklerini modellemek ve çevresel riskleri analiz etmek için kesirli modellerin uygulanması, yeni bir araştırma alanı olarak dikkat çekmektedir.

Sonuç olarak, kesirli diferensiyel denklemler, finansal problemlerin çözümünde ve finansal sistemlerin dinamiklerini anlamada büyük bir potansiyele sahiptir. Gelecekte, bu modellerin daha geniş bir uygulama yelpazesinde kullanılabilmesi için hem teorik hem de pratik düzeyde ilerlemeler beklenmelidir. Özellikle teknolojik gelişmeler ve veri analizindeki yenilikler, bu alandaki çalışmalara hız kazandıracaktır.

Kaynakça

Baillie, R. T., Bollerslev, T. & Mikkelsen, H. O. (1996). "Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity". Journal of Econometrics, 74(1), 3–30.

Black, F. & Scholes, M. (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". Journal of Political Economy, 81(3), 637–654.

Cartea, Á. & del-Castillo-Negrete, D. (2007). "Fractional Diffusion Models of Option Prices in Markets with Jumps". Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 374(2), 749–763.

Comte, F. & Renault, E. (1998). "Long Memory in Continuous-Time Stochastic Volatility Models". Mathematical Finance, 8(4), 291–323.

Cont, R. (2001). "Empirical Properties of Asset Returns: Stylized Facts and Statistical Issues". Quantitative Finance, 1(2), 223–236.

Diethelm, K. (2010). The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Hurst, H. E. (1951). "Long-term Storage Capacity of Reservoirs". Transactions of the American Society of Civil Engineers, 116(1), 770–799.

Jafari, H. & Daftardar-Gejji, V. (2006). "An Iterative Method for Solving Nonlinear Functional Equations". Applied Mathematics and Computation, 181(1), 598–603.

Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. & Trujillo, J. J. (2006). Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier Science Limited.

Mandelbrot, B. B. (1963). "The Variation of Certain Speculative Prices". Journal of Business, 36(4), 394–419.

Mandelbrot, B. B. (1983). The Fractal Geometry of Nature. W. H. Freeman and Co.

Mandelbrot, B. B. & Van Ness, J. W. (1968). "Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications". SIAM Review, 10(4), 422–437.

Meerschaert, M. M. & Tadjeran, C. (2004). "Finite Difference Approximations for Fractional Advection-Dispersion Flow Equations". Journal of Computational and Applied Mathematics, 172(1), 65–77.

Merton, R. C. (1973). "Theory of Rational Option Pricing". The Bell Journal of Economics and Management Science, 4(1), 141–183.

Metzler, R. & Klafter, J. (2000). "The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A Fractional Dynamics Approach". Physics Reports, 339(1), 1–77.

Mishura, Y. & Zili, M. (2008). Financial Models with Long Memory and Persistence. World Scientific Publishing Company.

Podlubny, I. (1999). Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, Some Methods of Their Solution and Some of Their Applications. Academic Press.

Raissi, M., Perdikaris, P. & Karniadakis, G. E. (2019). "Physics-Informed Neural Networks: A Deep Learning Framework for Solving Forward and Inverse Problems Involving PDEs". Journal of Computational Physics, 378, 686–707.

Shen, J. & Wang, L. (2011). "Spectral Methods for Fractional Differential Equations". Numerical Mathematics: Theory, Methods and Applications, 4(2), 164–198.

Wang, Y. & Zhang, L. (2020). "Deep Learning for Fractional Differential Equations: Theory and Numerical Applications". SIAM Journal on Scientific Computing, 42(3), A1707–A1735.