Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
Sayı:12 Aralık 2006 ISSN - 1302 - 3055

ON 1-PARAMETER MOTION IN LORENTZ SPACE E_1^3

Bahaddin BÜKCÜ*

*Gaziosmanpaşa Üniversitesi Matematik Bölümü, 60250 Taşlıçiftlik – Tokat, TÜRKİYE,
e-mail: bbukcu@yahoo.com

ABSTRACT

In this study, using Cayley Formula [1], A matrix-positive semi-orthogonal- is obtained from Darboux matrix [2] of α time-like curve. Taking $c=\alpha$ and by the equality $x = Ax_0 + c$, an one parameter H/H' Lorentzian motion is specified. It is derived Darboux vectors of this motion. And then the relation between Darboux matrices and curvature matrix is given. Moreover, it is shown α time-like curve must be a general helix on condition that components of Darboux vectors (matrices) are equal.

Keywords: *Cayley formula, Curvature matrix, Darboux vectors, General helix.*

BİR PARAMETRELİ LORENTZİYAN HAREKET ÜZERİNE

ÖZET

Bu çalışmada, bir α time-like eğrisinin Darboux [2] vektöründen, Cayley formülü [1] yardımıyla, pozitif semi ortogonal, A matrisi elde edildi. $c=\alpha$ alınarak $x = Ax_0 + c$ denklemiyle bir parametreli H/H' Lorentziyan hareketi tanımlandı. Bu hareketin, Darboux vektörleri (matrisleri) bulundu. Daha sonra Darboux vektörü ile eğrilikler matrisi arasındaki bağıntı verildi. Ayrıca, Darboux vektörlerinin (matrislerinin) bileşenlerinin eşit olması durumunda, α time-like eğrisinin, bir genel helis olması gerektiği gösterildi.

Anahtar Kelimeler: *Cayley formülü, Eğrilikler matrisi, Darboux vektörleri, Genel helis*.

1. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 1.1. $x=(x_1,x_2,x_3)$ ve $y=(y_1,y_2,y_3)\in E^3$ olsun.

$$\langle , \rangle : E^3 \times E^3 \longrightarrow R$$
$$(x,y) \longrightarrow \langle x,y\rangle = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

metrik tensörüne sahip olan E^3 uzayına, Minkowski 3-uzayı denir ve E_1^3 ile gösterilir [3].

Tanım 1.2. 3- boyutlu standart reel vektör uzayı E^3 de,

$$\wedge_L : E^3 x E^3 \longrightarrow E^3$$
$$(x,y) \longrightarrow x \wedge_L y) = \varepsilon\, x \wedge y = x \wedge \varepsilon\, y = \varepsilon\,(x \wedge y)$$

şeklinde tanımlanan bir vektörel çarpım işlemine E_1^3 uzayında vektörel çarpım işlemi denir. x vektörüne karşılık gelen matris X ise her $\forall y \in E_1^3$ için, $X.y = x \wedge_L y$ dir. Burada $\varepsilon = dia(-1,1,1)$ şeklinde bir köşegen matris ve "$\wedge$" notasyonu, 3-boyutlu Öklid uzayındaki standart vektörel çarpım işlemidir.

Tanım 1.3. E_1^3 Lorentz uzayında $A^{-1} = \varepsilon\, A^T \varepsilon$ eşitliğini sağlayan A matrisine semi-ortogonal matris denir. Burada $\varepsilon = dia(-1,1,1)$ şeklinde bir köşegen matristir.
Ayrıca, $S^T = -\varepsilon\, S\, \varepsilon$ eşitliğini sağlayan S matrisine de Lorentz anlamında anti-simetrik matris veya semi-skew matris denir. Ayrıca $n = 3$ ve $S \leftrightarrow s$ ise $S.s = 0$ dır [2].

Teorem 1.1. α , Lorentz manifoldunda bir time-like (zamansı) eğri ve $n = 3$ olsun. α 'nın Frenet vektör alanları; V_1, zamansı vektör alanı V_2 ve V_3 uzaysı vektör alanları için, Frenet denklemlerini aşağıdaki gibi yazabiliriz [3].

$$D_{V_1} V_1 = k_1 V_2,\ D_{V_1} V_2 = k_1 V_1 + k_2 V_2,\ D_{V_1} V_3 = -k_2 V_2 .$$

2. BİR PARAMETRELİ LORENZİYAN HAREKET

Teorem 2.1. H hareketli, H' , sabit uzaylar ve x_0, H da sabit bir vektör olsun.

$$x = Ax_0 + c \tag{2.1}$$

denklemiyle tanımlanan, H / H' bir parametreli Lorentziyan harekette; $\Omega = \dot{A}A^{-1}$ eşitliği ile tanımlanan matris, bir semi-anti-simetrik matristir.

İspat. Hareketin dönme kısmı olan $x = Ax_0$ eşitliğinden $x_0 = A^{-1}x$ çekilir. Sonra eşitliğin türevi alınır ve $\Omega = \dot{A}A^{-1}$ denilirse, $\dot{x} = \Omega x$ bulunur. A semi-ortogonal bir matris ise $A^{-1} = \varepsilon\, A^T \varepsilon$ dir. Basit bir hesaplama ile,

$$\varepsilon = \left(A^T \varepsilon\right) A \tag{2.2}$$

bulunur. (2.2) eşitliğinin diferansiyeli alınır ve $\varepsilon\, A$ ile çarpılırsa,

$$\dot{A}^T = -A^T \varepsilon \dot{A} A^{-1} \varepsilon$$

elde edilir. Doğrudan bir hesaplama ile,

$$\begin{aligned}
\Omega &= \dot{A}A^{-1} \\
\Omega^T &= (A^{-1})^T \dot{A}^T \\
&= \left(A^{-1}\right)^T \left(-A^T\varepsilon\dot{A}A^{-1}\varepsilon\right) \\
&= -\varepsilon A(\varepsilon A^T\varepsilon)\Omega\varepsilon \\
&= -\varepsilon A(\varepsilon A^T\varepsilon)\Omega\varepsilon \\
&= -\varepsilon AA^{-1}\Omega\varepsilon \\
&= -\varepsilon\Omega\varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlik bize Ω matrisinin Lorentz anlamında anti-simetrik olduğunu gösterir.

Teorem 2.2. E_1^3 Lorentz uzayında $H = Sp\{\alpha(s);\ T, N, B\}$ ve $H' = Sp\{O\ ;\ e_1, e_2, e_3\}$ sırası ile hareketli ve sabit uzayları göstersinler. (2.1) ile belirlenen Lorentziyen hareketin semi-ortogonal matrisi $A = [T\ \ N\ \ B]$ ve c ötelemesi de $c = \alpha(s)$ ile gösterilsin.

$$x(s) = A(s)x_0(s) + c(s) \tag{2.3}$$

denklemiyle α eğrisi boyunca bir katı cismin bir parametreli bir Lorentziyen hareketi verilmiş olsun. (2.3) deki hareketin sabit ve hareketli uzaylara göre Darboux vektörleri sırası ile,

$$\omega = 2\left(1 - k_1^2 + k_2^2\right)^{-1}\left(-\dot{k}_2, \dot{k}_1 k_2 - k_1\dot{k}_2, \dot{k}_1\right) \quad \text{ve} \quad w = 2\left(1 - k_1^2 + k_2^2\right)^{-1}\left(-\dot{k}_2, k_1\dot{k}_2 - \dot{k}_1 k_2, \dot{k}_1\right)$$

dır.

İspat. s space-like vektörüne (eksenine) karşılık gelen, semi anti-simetrik matris S ise bu durumda E_1^3, Lorentziyen uzayındaki Cayley formülünden

$$A = 2\left(1 - k_1^2 + k_2^2\right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 + k_1^2 + k_2^2 & 2k_1 & 2k_1 k_2 \\ 2k_1 & 1 + k_1^2 - k_2^2 & 2k_2 \\ -2k_1 k_2 & -2k_2 & 1 - k_1^2 - k_2^2 \end{bmatrix}$$

semi-ortogonal matrisi elde edilir [1]. Ayrıca α eğrisinin Frenet vektörleri,

$$T = (1 + k_1^2 + k_2^2,\ \ 2k_1,\ \ -2k_1 k_2),\quad N = (2k_1,\ \ 1 + k_1^2 - k_2^2,\ \ -2k_2),\quad B = (2k_1 k_2,\ \ 2k_2,\ \ 1 - k_1^2 - k_2^2)$$

dır. Uzun ve doğrudan bir hesaplama ile,

$$\dot{A} = 2\delta^{-2}\begin{bmatrix} 2k_1\left[k_1 + \dot{k}_1 k_2^2 - k_1 k_2 \dot{k}_2\right] & \dot{k}_1 m - 2k_1 k_2 \dot{k}_2 & \dot{k}_1 k_2 m + k_1 \dot{k}_2 n \\ \dot{k}_1 m - 2k_1 k_2 \dot{k}_2 & 2\left(k_1 \dot{k}_1 - k_2 \dot{k}_2\right) & \dot{k}_2 n + 2k_1 \dot{k}_1 k_2 \\ -\dot{k}_1 k_2 m - k_1 \dot{k}_2 n & -\dot{k}_2 n - 2k_1 \dot{k}_1 k_2 & 2k_2\left[\dot{k}_2 + k_1 \dot{k}_1 k_2 - k_2 k_1^2 \dot{k}_2\right] \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

türev matrisi bulunur, burada

$$\delta = 1 - k_1^2 + k_2^2 \,, m = 1 + k_1^2 + k_2^2 \,,\ m = 1 - k_1^2 + k_2^2$$

dır. $\Omega = \dot{A}A^{-1}$ olsun. Ω semi-skew matrisine, *A*' ya karşılık gelen hareketin sabit uzaya (yani H' ye) göre Darboux matrisi denir. Şimdi H/H' hareketinin Darboux matrislerini hesaplayalım:

$$\Omega = \dot{A}A^{-1} = \dot{A}\varepsilon A^T \varepsilon$$

eşitliğinin sağ tarafı

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \dot{k}_1 & -(\dot{k}_1 k_2 - k_1 \dot{k}_2) \\ \dot{k}_1 & 0 & \dot{k}_2 \\ -(\dot{k}_1 k_2 - k_1 \dot{k}_2) & -\dot{k}_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

şeklinde bulunur. (2.3) ile belli olan semi anti-simetrik matrisine karşılık tutulan vektör, sabit uzayın

$$\omega = 2\left(1 - k_1^2 + k_2^2\right)^{-1}\left(-\dot{k}_2, \dot{k}_1 k_2 - k_1 \dot{k}_2, \dot{k}_1\right) \tag{2.6}$$

Darboux vektörüdür. *H* hareketli uzayındaki $H = Sp\left\{\alpha(s), T, N, B\right\}$ çatısına göre Darboux vektörü,

$$w = A^{-1}\omega$$

eşitliğinden

$$w = 2\left(1 - k_1^2 + k_2^2\right)^{-1}\left(-\dot{k}_2, k_1 \dot{k}_2 - \dot{k}_1 k_2, \dot{k}_1\right)$$

olarak bulunur.

Teorem 2.3. *H*' nın H' ye hareketini veren *B* matrisi ile, hareketin Ω Darboux matrisi arasında

$$\Omega = 2\left(1 - k_1^2 + k_2^2\right)^{-1}\left(B\dot{B} - \dot{B}B + \dot{B}\right) \text{ ve } \omega = 2\left(1 - k_1^2 + k_2^2\right)^{-1}\left(b \wedge \dot{b} + \dot{b}\right)$$

bağıntıları vardır. Burada *b* ve $\dot{b}$ sırası ile *B* ve $\dot{B}$ anti-simetrik matrislerinin üçer elemanından meydana gelen vektörlerdir.

İspat. Doğrudan bir hesaplama ile,

$$B\dot{B} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dot{k}_1 & 0 \\ -\dot{k}_1 & 0 & \dot{k}_2 \\ 0 & -\dot{k}_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1\dot{k}_1 & 0 & k_1\dot{k}_2 \\ 0 & k_1\dot{k}_1 - k_2\dot{k}_2 & 0 \\ -\dot{k}_1 k_2 & 0 & k_2\dot{k}_2 \end{bmatrix}$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$B\dot{B} - \dot{B}B + \dot{B} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{k}_1 & -\left(\dot{k}_1 k_2 - k_1\dot{k}_2\right) \\ \dot{k}_1 & 0 & \dot{k}_2 \\ -\left(\dot{k}_1 k_2 - k_1\dot{k}_2\right) & -\dot{k}_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

bulunur. (2.7) eşitliği ile $2\left(1 - k_1^2 + k_2^2\right)^{-1} = 2\delta^{-2}$ ile çarpılırsa,

$$2\delta^{-2}\left(B\dot{B} - \dot{B}B + \dot{B}\right) = 2\delta^{-2} \begin{bmatrix} 0 & \dot{k}_1 & -\left(\dot{k}_1 k_2 - k_1\dot{k}_2\right) \\ \dot{k}_1 & 0 & \dot{k}_2 \\ -\left(\dot{k}_1 k_2 - k_1\dot{k}_2\right) & -\dot{k}_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

elde edilir. (2.8) eşitliğinin sağ tarafı (2.5) eşitliğinde Ω olarak bulunmuştu. Böylece

$$\Omega = 2\left(1 - k_1^2 + k_2^2\right)^{-1}\left(B\dot{B} - \dot{B}B + \dot{B}\right)$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde

$$b \wedge \dot{b} = \left(0,\ \dot{k}_1 k_2 - k_1\dot{k}_2,\ 0\right)$$
$$b \wedge \dot{b} + \dot{b} = \left(0,\ \dot{k}_1 k_2 - k_1\dot{k}_2,\ 0\right) + \left(-\dot{k}_2,\ 0,\ \dot{k}_1\right)$$
$$2\delta^{-2}\left(b \wedge \dot{b} + \dot{b}\right) = 2\delta^{-2}\left(-\dot{k}_2,\ \dot{k}_1 k_2 - k_1\dot{k}_2,\ \dot{k}_1\right)$$

elde edilir. Buradan (2.9) eşitliğinin sağ tarafındaki vektörün eşlendiği matris (2.8) eşitliğinin sağ tarafındaki matristir. Bu nedenle,

$$\Omega = 2\left(1 - k_1^2 + k_2^2\right)^{-1}\left(B\dot{B} - \dot{B}B + \dot{B}\right)$$

dır.

ω ve w vektörleri arasındaki ilişki aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 2.4. H/H' hareketinin sabit ve hareketli uzaylara göre Darboux vektörleri sırasıyla ω ve w olsunlar. $\omega = w$ ise α eğrisi bir eğilim çizgisi (helis) dir.

İspat. Her $s \in I \subset R$, $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ eğrilikleri sabit olmayan ve yay parametresine göre verilmiş time-like bir eğri α olsun. H/H' hareketinde, sabit ve hareketli uzaylardaki Darboux vektörleri paralel yani $\omega = w$ olsun. Bu durumda,

$$\left(-\dot{k}_2,\, \dot{k}_1 k_2 - k_1 \dot{k}_2,\, \dot{k}_1\right) = \left(-\dot{k}_2,\, k_1 \dot{k}_2 - \dot{k}_1 k_2,\, \dot{k}_1\right) \Leftrightarrow \dot{k}_1 k_2 - k_1 \dot{k}_2 = k_1 \dot{k}_2 - \dot{k}_1 k_2$$

$$\Leftrightarrow \dot{k}_1 k_2 - k_1 \dot{k}_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{ds}\left(\frac{k_1}{k_2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{k_1}{k_2} = \text{ sabit} \qquad (2.9)$$

bulunur. (2.9) eşitliği, α time-like eğrisinin bir eğilim çizgisi olduğunu gösterir.

KAYNAKLAR

[1] Bükcü, B., Lorentz Uzayında Cayley Formülü ve Uygulamaları, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, (2003).

[2] Uğurlu, H.H., "On the Geometry Of Timelike Surfaces", Communications, Ankara University, Faculty Of Sciences Dept. Of Math. Seeries A1,Vol.46 pp.211-223 (1997).

[3] O'Neill, B.," Semi-Riemannian Geometry with Application to Relativity", Academic Press, New York, 278-292 (1983).

[4] Ekmekçi, N. & İlarslan," K. Higher Curvatures in Lorentzian Space", Jour. of Math. and Comp. Sci. (Math. Ser.) Vol.11, No.2; (1998), 97-102.