E_1^3 de, CAYLEY FORMÜLÜ VE BAZI UYGULAMALARI

B. BÜKCÜ

Özet

R_1^3 uzayında bir $\vec{s} \wedge \vec{\omega} = S.\vec{\omega}$ eşitliğini gerçekleyen semi antisimetrik matrisi elde edildi. Dolayısıyla, matris ile vektör eşlenmiş oldu. Bu semi antisimetrik matristen yararlanılarak, R_1^3 de Cayley formülü elde edildi. R_1^3 de, s vektörü (ekseni), bir timelike eğrinin eğrilikler matrisine karşılık gelen vektör seçilerek, semi ortogonal matrisi bulundu. Bu matrisinin özel durumu için, R_1^2 hiperbolik düzlemdeki, semi ortogonal dönme matrisi elde edildi. Ayrıca, R_1^3 deki semi ortogonal matrisin s eksenini invaryant bıraktığı gösterildi.

1.Temel Kavramlar

Tanım 1.1 R_1^3 Lorentz uzayında $A^{-1} = \varepsilon A^T \varepsilon$ eşitliğini sağlayan A matrisine, semi ortogonal matris denir. Buradaki işaret matrisi, bir köşegen matris olup, ilk bileşeni -1 ve diğer iki elemanı 1 dir [1].

Tanım 1.2 $S^T = -\varepsilon S \varepsilon$ eşitliğini sağlayan S matrisine, Lorentz anlamında antisimetrik matris denir.

$S = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$ matrisi $S^T = -\varepsilon S \varepsilon$ şartını sağladığından Lorentz anlamında antisimetrik matristir. Ayrıca $S \leftrightarrow \vec{s} = (a,b,c)$ ise $S.\vec{s} = [0]_{3x1}$ dır [1].

Anahtar Kelimeler: Cayley Formülü, Lorentz Uzay, Timelike curve

Tanım 1.3 $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $y=(y_1,y_2,y_3)\in R^3$ gibi iki vektörün Lorentz anlamında, standart iç çarpımı;

$$<,> : R^3xR^3 \longrightarrow R$$
$$(\vec{x},\vec{y}) \longrightarrow <\vec{x},\vec{y}>=-x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$$

biçiminde tanımlanır. Eğer $\vec{x}=\vec{y}$ ise $\|\vec{x}\|=\sqrt{|<\vec{x},\vec{x}>|}$ eşitliğine, ***x*** vektörünün normu denir[1].

Tanım 1.4 $\vec{v}=(x,y,z)$, $\vec{s}=(a,b,c)$ gibi iki vektörün, Lorentz anlamında vektörel çarpımı,

$$\vec{s}\wedge\vec{v}=(yc-bz,xc-az,ay-bx)$$

biçiminde tanımlanır. $\vec{s}$ ye karşılık gelen matris S ise $S.\vec{v}=\vec{s}\wedge\vec{v}$ dır.

Teorem 1.1 M_q^n ($n\geq 3$) bir Yarı Riemann manifoldu ve $\alpha : R \longrightarrow M_q^n$ diferensiyellenebilir bir eğri olsun. Eğrinin herhangi bir noktasındaki Frenet vektörleri, $\{V_1,V_2,\Lambda,V_n\}$ ve $\varepsilon_{i-1}=g(V_i,V_i)$ olmak üzere, Frenet vektörleri ve türevleri arasındaki ilişki, aşağıdaki gibidir [2].

(i) $D_{V_1}V_1=k_1V_2$

(ii) $D_{V_1}V_i=-\in_{i-2}\in_{i-1}k_{i-1}V_{i-1}+k_iV_{i+1}$, $(1<i<n)$

(iii) $D_{V_1}V_r=-\in_{r-2}\in_{r-1}k_{r-1}V_{r-1}$

Eğer α Lorentz manifoldunda timelike(zaman benzeri) eğri ve n=3 ise bu durumda, α nın Frenet vektör alanları ; V_1 zaman benzeri vektör alanı, V_2 ve V_3 uzay benzeri vektör alanlarıdır. Buna göre, $\varepsilon_0=-1,\varepsilon_1=1,\varepsilon_2=1$ olacaktır. Bu durumda Frenet denklemlerini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$D_{V_1}V_1=k_1V_2,\ D_{V_1}V_2=k_1V_1+k_2V_3,\ D_{V_1}V_3=-k_2V_2$$

2 LORENTZ UZAYINDA CAYLEY FORMÜLÜ

2.1 *S* Semi Antisimetrik Matrisinin Belirlenmesi

$$\vec{s} \wedge \vec{\omega} = S\vec{\omega}$$

eşitliğini sağlayan S matrisini bulalım. $\vec{s} \wedge \vec{\omega} = (cv - bw, uc - aw, av - bu)$

$$S.\vec{\omega} = \begin{bmatrix} x & y & z \\ k & l & m \\ e & f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = (xu + yv + zw, ku + lv + mw, eu + fv + gw)$$

$$\vec{s} \wedge \vec{\omega} = S\vec{\omega}$$

eşitliğinin sağlanması için,

$$\begin{aligned} 0u + cv - bw &= xu + yv + zw \Rightarrow x = 0 \quad y = c \quad z = -b \\ cu + 0v - aw &= ku + lv + mw \Rightarrow k = c \quad l = 0 \quad m = -a \\ -bu + av + 0w &= eu + fv + gw \Rightarrow e = -b \quad f = a \quad g = 0 \end{aligned}$$

şartları sağlanmalıdır. Bu durumda *S* matrisi $S = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$ dır.

Teorem 2.1 *S* Lorentz anlamında antisimetrik bir matris ve *S* ile birleştirilmiş vektör, $\vec{s} = (a,b,c)$ olsun. *s* spacelike bir vektör ise *S* nin öz değerleri 0,-1 ve 1 dır.

İspat: S nin öz denklemini bulalım.

$$\det(S - \lambda I) = 0$$

$$-\lambda^3 + (-a^2 + b^2 + c^2)\lambda = 0$$

$$-\lambda^3 + \lambda = 0$$

$$-\lambda(\lambda^2 - 1) = 0$$

son denklemden; $\lambda = 0, \lambda = -1, \lambda = 1$ elde edilir. Eğer *s* timelike bir vektör ise bu durumda, öz denklem $\lambda^3 + \lambda = 0$ bulunur. Buradan da $\lambda = 0, \lambda = -i, \lambda = i$ elde edilir.

2.2 Lorentz Uzayında Cayley Formülü

Teorem 2.2 $\vec{x},\vec{y},\vec{b}\in R_1^3$; $A\in SO(3,1)$ ve S de aynı mertebeden bir semi antisimetrik matris olsun.

(i) Eğer A, -1 öz değerine sahip değilse, bu durumda A matrisine karşılık gelen semi antisimetrik matrisi S,

$$S=(A-I)(A+I)^{-1}$$

dır.

(ii) Eğer S, -1 öz değerine sahip değilse, bu durumda S ye karşılık gelen pozitif semi ortogonal matrisi A,

$$A=(I-S)^{-1}(I+S)$$

dır.

İspat:

(i) Orijin etrafında bir Lorentziyen bir dönme hareketi,

$$y=Ax, A\in SO(3,1)$$

formunda verilir [3]. Bir dönme hareketinde uzaklıklar değişmeyeceğinden

$$<\vec{x},\vec{x}>|_L=<\vec{y},\vec{y}>|_L$$

dır. Ayrıca,

$$<\vec{y}-\vec{x},\vec{y}+\vec{x}>|_L=<\vec{y},\vec{y}>|_L+<\vec{y},\vec{x}>|_L-<\vec{x},\vec{y}>|_L-<\vec{x},\vec{x}>|_L$$

$$<\vec{y}-\vec{x},\vec{y}+\vec{x}>|_L=<\vec{y},\vec{y}>|_L-<\vec{x},\vec{x}>|_L$$

$$<\vec{y}-\vec{x},\vec{y}+\vec{x}>|_L=0$$

dır. $f=\vec{y}-\vec{x}$ ve $g=\vec{y}+\vec{x}$ denirse,

$$<f,g>|_L=0$$

elde edilir.

$$f=\vec{y}-\vec{x}=Ax-x=(A-I)x$$

(2.1)

$$g=\vec{y}+\vec{x}=Ax+x=(A+I)x$$

(2.2)

(2.2) denkleminde, A nın öz değeri -1 den farklı olduğu durumlarda, $(A+I)^{-1}$ vardır.

O halde, bu şart altında x çekilir ve (2.1) denkleminde yerine yazılırsa,

$$f=(A-I)(A+I)^{-1}g$$

bulunur.

$$S = (A - I)(A + I)^{-1} \tag{2.3}$$

denirse, $f=S.g$ elde edilir.

(2.3) denklemindeki S matrisinin Lorentz anlamında antisimetrik olduğunu gösterelim. Bunun için, $S^T = -\varepsilon S \varepsilon$ eşitliğinin doğru olduğu gösterilmelidir.

$$(A+I)S = (A+I)\left[(A-I)(A+I)^{-1}\right]$$
$$(A+I)S = A - I$$
$$S^T (A+I)^T = A^T - I$$
$$S^T (A+I)^T (\varepsilon A \varepsilon) = (A^T - I)(\varepsilon A \varepsilon)$$
$$S^T (A^T \varepsilon A \varepsilon + \varepsilon A \varepsilon) = A^T (\varepsilon A \varepsilon) - \varepsilon A \varepsilon$$
$$S^T (\varepsilon^2 A^T \varepsilon A \varepsilon + \varepsilon A \varepsilon) = \varepsilon^2 A^T \varepsilon A \varepsilon - \varepsilon A \varepsilon$$
$$S^T (\varepsilon(\varepsilon A^T \varepsilon) A \varepsilon + \varepsilon A \varepsilon) = \varepsilon(\varepsilon A^T \varepsilon) A \varepsilon - \varepsilon A \varepsilon$$
$$S^T (\varepsilon A^{-1} A \varepsilon + \varepsilon A \varepsilon) = \varepsilon A^{-1} A \varepsilon - \varepsilon A \varepsilon$$
$$S^T (\varepsilon I \varepsilon + \varepsilon A \varepsilon) = \varepsilon I \varepsilon - \varepsilon A \varepsilon$$
$$S^T (I + \varepsilon A \varepsilon) = I - \varepsilon A \varepsilon$$
$$S^T (I + \varepsilon A \varepsilon)(I + \varepsilon A \varepsilon)^{-1} = (I - \varepsilon A \varepsilon)(I + \varepsilon A \varepsilon)^{-1}$$
$$\begin{aligned} S^T &= (\varepsilon\varepsilon - \varepsilon A \varepsilon)(\varepsilon\varepsilon + \varepsilon A \varepsilon)^{-1} \\ &= \left[\varepsilon(I - A)\varepsilon\right]\left[\varepsilon(I + A)\varepsilon\right] \\ &= \left[\varepsilon(I - A)\varepsilon\right]\left[\varepsilon^{-1}(I + A)\varepsilon^{-1}\right]^{-1^*} \\ &= \varepsilon(I - A)(\varepsilon\varepsilon^{-1})(I + A)^{-1}\varepsilon^{-1} \\ &= \varepsilon(I - A)(I + A)^{-1}\varepsilon^{-1} \\ &= -\varepsilon(A - I)(I + A)^{-1}\varepsilon \ ; \varepsilon^{-1} = \varepsilon \end{aligned}$$
$$S^T = -\varepsilon S \varepsilon$$

dır. Verilen eşitlik doğrulandığı için (i) şıkkının ispatı tamamlanır.

(ii) Şimdi, Lorentz anlamında bir S antisimetrik matrisi verildiğinde, A pozitif semi ortogonal matrisini bulalım. Bunun için, (2.3) denkleminden A matrisini çekersek,

$$S(A+I) = (A-I)(A+I)^{-1}(A+I)$$
$$S(A+I) = (A-I)$$
$$SA + S = A + I$$
$$SA - A = -S - I$$

$$A - SA = I + S$$
$$(I - S)A = I + S \;;\det(I - S) \neq 0$$
$$A = (I - S)^{-1}(I + S)$$
(2.4)
bulunur.

Tanım 2.1 (**Cayley dönüşümü**) S özdeğeri -1 den farklı bir antisimetrik matris olsun.

$$f : so(3,1) \longrightarrow SO(3,1)$$
$$S \longrightarrow f(S) = A = (I - S)^{-1}(I + S)$$

biçiminde tanımlanan f dönüşümüne S matrisinin Cayley dönüşümü denir. Burada $so(3,1)$ ve $SO(3,1)$ sırasıyla, $3x3$ tipindeki Lorentz anlamında antisimetrik ve semi ortogonal matrislerin uzayıdır.

2.3 Lorentz Uzayında Cayley Formülünün Bazı Uygulamaları

1) S, **Tanım 1.2** ile verilen matris olsun. Bu durumda, A semi ortogonal matrisi S nin Cayley dönüşümünü hesaplamak suretiyle bulunur.

$$\Delta = \det(I - S) = 1 + a^2 - b^2 - c^2,$$

$$(I - S)^{-1} = \Delta^{-1}\begin{bmatrix} 1+a^2 & c-ab & -ac-b \\ ab+c & 1-b^2 & -a-bc \\ ac-b & a-bc & 1-c^2 \end{bmatrix}$$

dır. $-a^2 + b^2 + c^2 = 1$, olduğunda formül geçerli değildir. Bu durumda, S matrisini değişik formda almalıyız. $-a^2 + b^2 + c^2 \neq 1$ olduğu durumlar için, A semi ortogonal matrisini bulalım.

$$A = (I - S)^{-1}(I + S)$$

$$= \Delta^{-1}\begin{bmatrix} 1+a^2 & c-ab & -ac-b \\ ab+c & 1-b^2 & -a-bc \\ ac-b & a-bc & 1-c^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & c & -b \\ c & 1 & -a \\ -b & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \Delta^{-1}\begin{bmatrix} 1+a^2+b^2+c^2 & 2(c-ab) & -2(ac+b) \\ 2(ab+c) & 1-a^2-b^2+c^2 & -2(a+bc) \\ 2(ac-b) & 2(a-bc) & 1-a^2+b^2-c^2 \end{bmatrix}$$

(2.5)
elde edilir. (2.5) denklemindeki $S \leftrightarrow \vec{s} = (a,b,c)$ ekseni, timelike vektör seçildiğinde,bu formül her zaman geçerlidir. Çünkü, $\det(I - S) \neq 0$ dır. Fakat $S \leftrightarrow \vec{s} = (a,b,c)$ spacelike vektör ise $\|\vec{s}\| \neq 1$ olması halinde geçerlidir.

2) E_1^3 de timelike bir eğrinin eğrilikler matrisi S olsun. Bu durumda, (2.5) denkleminde, $a = -k_2, b = 0, c = k_1$ alınırsa,

$$A = \frac{1}{1+k_1^2+k_2^2}\begin{bmatrix} 1+k_1^2+k_2^2 & 2k_1 & 2k_1k_2 \\ 2k_1 & 1+k_1^2-k_2^2 & 2k_2 \\ 2k_1k_2 & 2k_2 & 1-k_1^2-k_2^2 \end{bmatrix}$$

(2.6)
bulunur.

3) (2.5) denkleminde, $a = b = 0$ ve $c \neq 1$ olsun. Bu durumda,

$$A = \frac{1}{1-c^2}\begin{bmatrix} 1+c^2 & 2c & 0 \\ 2c & 1+c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-c^2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1+c^2}{1-c^2} & \frac{2c}{1-c^2} & 0 \\ \frac{2c}{1-c^2} & \frac{1+c^2}{1-c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

bulunur.

$\sinh\theta = \frac{2c}{1+c^2}$ denirse, $\cosh\theta = \frac{1+c^2}{1-c^2}$ olur. Son iki eşitliğin kullanılmasıyla, A matrisi aşağıdaki gibi yazılır.

$$A = \begin{bmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta & 0 \\ \sinh\theta & \cosh\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu matris z eksenini sabit bıraktığından; A matrisi z spacelike ekseni boyunca Lorentz anlamında θ kadar dönmeye karşılık gelir.

Teorem 3.1 (2.5) matrisi $\vec{s} = (a,b,c)$ vektörünü (eksenini) invaryant bırakır.

İspat: Doğrudan bir hesaplamayla,

$$As = \Delta^{-1}\begin{bmatrix} 1+a^2+b^2+c^2 & 2(c-ab) & -2(ac+b) \\ 2(ab+c) & 1-a^2-b^2+c^2 & -2(a+bc) \\ 2(ac-b) & 2(a-bc) & 1-a^2+b^2-c^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$= \Delta^{-1}\begin{bmatrix} a+a^3+ab^2+ac^2+2bc-2ab^2-2ac^2-2bc \\ 2a^2b+2ac+b-ba^2-b^3+bc^2-2ac-2bc^2 \\ 2a^2c-2ab+2ab-2b^2c+c-a^2c+b^2c-c^3 \end{bmatrix}$$

$$= \Delta^{-1}\begin{bmatrix} a+a^3-ab^2-ac^2 \\ b-b^3+ba^2-bc^2 \\ c-c^3+ca^2-cb^2 \end{bmatrix}$$

$$= \Delta^{-1}\begin{bmatrix} a(1+a^2-b^2-c^2) \\ b(1+a^2-b^2-c^2) \\ c(1+a^2-b^2-c^2) \end{bmatrix}$$

$$As = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T$$

$$As = s$$

bulunur.

KAYNAKÇA

[1] B.O'Neill, Semi-Riemann Geometri, Akademic Pres, New York, (1983)

[2] N.Ekmekçi & K. İlarslan, Higher Curvatures in Space, Jour. of Inst. of Math. and Comp. Sci. (Math. Ser.) Vol.11, (1998), no.2,97-102.

[3] O.Bottema and B. Roth, Theoretical Kinematics, North Holland Publ. Com., (1979)

[4] B.Bahaddin, Lorentz Uzayında Cayley Formülü ve Uygulamaları, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, (2003)

B. BÜKCÜ*

Abstract. In the space R_1^3, the matrix satisfying the $S\vec{\omega} = \vec{s} \wedge \vec{\omega}$ is btained. So we can considered matrix insead of vector. By using this semi skew smymetric matrix, Cayley Formula is obtained in R_1^3, and so we have a semi orthogonal matrix. In R_1^3 the vectors being chosen as a vector corresponding to the matrices of curvatures of a timelike curve, a semi orthogonal rotation matrix is obtained for a special case of this matrix. Also, it is shown that the semi orthogonal matrix in R_1^3 leaves the axis s invariant.

Keywords: Cayley Formula, Lorentz Space, Timelike curve

*Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi,Matematik Bölümü, 60100-Tokat, e-mail: bukcu@gop.edu.tr