SEBED

SEBED

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

Sayılar Teorisiyle İlgili Hata ve Yanılgıların Soyutlamanın İndirgenmesi Teorik Çerçevesinde İncelenmesi*

Analysis of Errors and Misconceptions About Number Theory Through the Theory of Reducing Abstraction

Şaban Can Şenay, Ahmet Şükrü Özdemir

Yazar Bilgileri

Şaban Can Şenay
Dr. Öğr. Üyesi, Selçuk Üniversitesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü
can.senay@selcuk.edu.tr
ORCID: 0000-0001-8437-180X

Ahmet Şükrü Özdemir
Prof. Dr., Marmara Üniversitesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü
ahmet.ozdemir@marmara.edu.tr
ORCID: 0000-0002-0597-3093

ÖZ

Tarihsel geçmişi, biçimsel ve bilişsel doğasıyla 'matematiğin kraliçesi' olarak kabul edilen sayılar teorisi, matematiksel kavramların gelişimine ve problem çözmeye çok önemli katkılarda bulunmaktadır. Bu araştırmanın amacı, öğrencilerin sayılar teorisinin bazı kavramlarıyla ilgili hata ve kavram yanılgılarını, soyutlamanın indirgenmesi perspektifinden analiz etmektir. Soyutlamanın indirgenmesi, öğrencilerin kavramların sınıfta tanıtıldığı düzeyden daha düşük bir soyutlama düzeyinde çalışma eğilimlerini inceleyen teorik bir çerçevedir. Çalışma grubu, N.E.Ü. A.K. Eğitim Fakültesi İlköğretim ve Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği bölümlerinde öğrenim gören 136 matematik öğretmeni adayından oluşmaktadır. Veriler araştırmacılar tarafından geliştirilen sayılar teorisi soru formundan ve yarı yapılandırılmış öğrenci mülakatlarından toplanmıştır. *Soyutlamanın indirgenmesi*, zorunlu olarak kavram yanılgıları veya matematiksel hatalarla sonuçlanan zihinsel bir süreç olarak anlaşılmamalıdır. Ancak bu araştırmada, bu teorik çerçevenin öğrencilerin hatalarını ve kavram yanılgılarını analiz etmek için de kullanılabileceği gösterilmiştir.

Makale Bilgileri

Anahtar Kelimeler
Kavram yanılgısı,
Sayılar teorisi,
Soyutlamanın indirgenmesi

Keywords
Misconception,
Number theory,
Reducing abstraction

Makale Geçmişi
Geliş: 20.12.2024
Düzeltme: 22.12.2024
Kabul: 24.12.2024

ABSTRACT

Number theory as the 'queen of mathematics' with its history, formal and cognitive nature, makes significant contributions to the development of mathematical concepts and problem-solving. The aim of this research is to analyse the students' errors and misconceptions related to some concepts of number theory from the perspective of *reducing abstraction*. *Reducing abstraction* is a theoretical framework that examines students' tendency to work at a lower level of abstraction than the one which the concepts are introduced in class. The study group consists of 136 pre-service mathematics teachers from the Primary and Secondary Mathematics Teacher Education departments of N.E.U A.K. Faculty of Education. The data were collected from the number theory question form which is developed by the researchers and semi-structured student interviews. Although *reducing abstraction* should not be understood as a mental process which necessarily results in misconceptions or mathematical errors, in this research, we show that this theoretical framework can also be used to analyse the students' errors and misconceptions.

Makale Türü	Araştırma/Derleme
Önerilen Atıf	Şenay, Ş. C. & Özdemir, A. Ş. (2025). Sayılar teorisiyle ilgili hata ve yanılgıların soyutlamanın indirgenmesi teorik çerçevesinde incelenmesi, *SEBED*, 3(1), 24-37.

* Bu makale Şaban Can ŞENAY'ın "Matematik Öğretmen Adaylarının Sayılar Teorisine Yönelik Soyutlamayı indirgeme Eğilimlerinin Düşünme Stilleri ve Matematik Öz Yeterlikleri ile İlişkisinin İncelenmesi" isimli doktora tezinden üretilmiş olup ilk hali Uluslararası Matematik ve Matematik Eğitimi kongresinde (ICMME 2019) sözlü bildiri olarak sunulmuştur.

1. GİRİŞ

Günümüzde *yüksek aritmetik* olarak da adlandırılan, tam sayıların ve özellikle de pozitif tam sayıların gizemli özellikleri üzerine kurulmuş olan sayılar teorisi bilimlerin temeli olan matematiğin en eski dalıdır. Bütün zamanların en büyük matematikçisi olarak kabul edilen Gauss, sayılar teorisi için şu meşhur ifadeyi kullanmıştır: "Matematik bilimlerin prensi, ancak sayılar teorisi de matematiğin prensidir." (Şenay, 2007, s.1). Bununla birlikte, bilişsel ve formel yapısı, aritmetik ve cebirle ilişkisi, bilgisayar bilimleri ve kriptoloji gibi birçok uygulama sahası olmasından dolayı sayılar teorisi matematik eğitiminde de üzerinde özellikle durulması gereken bir alandır.

İlk ve ortaöğretim matematik dersi öğretim programlarındaki (Millî Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018a, 2018b) sayılarla ilgili kazanımlar dikkate alındığında, öğretmen adaylarının sayılar teorisi kapsamındaki kavram ve teoremleri algılayışlarının, alan bilgilerinin şekillenmesi, matematiği doğru olarak anlayabilme ve anlatabilmeleri için ne kadar önemli olduğu daha iyi görülecektir. Zaskis ve Campbell (2011) da sayılar teorisinin temel kavramlarının her yaştan öğrenicilerin matematiksel yapı ve prensipleri keşfedebilmesi için ulaşılabilir bir zemin hazırlamasından dolayı bu kavramların öğretmenlerin matematiği derinlemesine aktarabilmelerine katkı sağlayacağını ifade etmişlerdir.

Matematik öğretmenlerinin alan bilgisi için önemine rağmen yakın zamana kadar matematik eğitimi araştırmalarında sayılar teorisine kısıtlı yer verilmiştir. Bu çalışmaların bir kısmında da elementer sayılar teorisi kavramlarının sadece farklı sorunların araştırılması için matematiksel bir içerik olarak kullanıldığı görülmektedir (Zaskis & Campbell, 2011). Örneğin, Martin ve Harel (1989) *bölünebilme* kavramı üzerinden öğretmen adaylarının matematiksel ispatla ilgili anlayışlarını, Lester ve Mau (1993) da *asal çarpan* kavramı üzerinden ilköğretim öğretmen adaylarının problem çözme becerilerini incelemişlerdir. Papadopoulos ve Iatridou (2010) ise, öğrencilerin problem çözerken kullandıkları matematiksel modellemeleri incelemek için dikdörtgenin alanı ile ilgili geometrik bir problemi, öğrencilerden *Diofanten denklemleri* kullanarak modellemelerini istemiştir. Yapılan çalışmaların bazıları da elementer sayılar teorisi kavramlarının anlaşılması ve ilişkilendirilmesi üzerinedir. Örneğin Ball (1990), ilköğretim ve ortaöğretim öğretmen adaylarının *bölme* kavramını anlayışlarını; Zazkis ve Campbell (1996), öğretmen adaylarının doğal sayıların *bölünebilirliğini* ve *çarpımsal yapısını* anlamalarını; Bolte (1999), öğretmen adaylarının kavram haritalarını kullanarak *asal çarpan*, *bölen*, *bölünebilme* gibi sayılar teorisi kapsamındaki 20 terimi ilişkilendirmelerini; Smith (2002), lisans öğrencilerinin *kongrüanslar* ile ilgili anlayışlarını; Zazkis ve Liljedahl (2004) de ilköğretim öğretmen adaylarının *asal sayı* kavramını nasıl algıladıklarını incelemişlerdir.

Matematiksel kavramların soyutluğu ve birbirleriyle olan karmaşık ilişkisi, kişilerin matematiği öğrenirken zorlanmalarına, kavramları yanlış anlamalarına ve zihinlerinde yanlış yapılandırmalarına yol açmaktadır. Matematik öğrenimi ile ilgili yaşanan güçlükler sonucunda ortaya çıkan "kavram yanılgıları" ve "hatalar" da bu bağlamda değerlendirilmelidir (Bingölbali ve Özmantar, 2012). Araştırma sonuçlarına göre matematiksel kavram yanılgıları ve hataların, öğrencilerin uzun vadeli matematik öğrenmeleri üzerinde önemli etkileri bulunmaktadır (Nesher, 1987). Bu nedenle, kavram yanılgılarının ve hataların tanımlanması ve düzeltilmesi kritik öneme sahiptir.

1.1. Soyutlamanın İndirgenmesi Teorisi

Matematiksel bir kavramın nasıl anlaşıldığı, hangi süreçlerden geçerek anlamlı hale geldiği veya matematiksel bilginin yapılandırılması sürecinde nelerin etkili olduğu gibi soruların cevabı matematiksel soyutlama kavramının içinde yatmaktadır. Soyutlamanın matematik öğrenimindeki bu öneminden dolayı matematik eğitimcileri birçok farklı açıdan bu konuyu incelemiş, tartışmış ve soyutlamayla ilgili çeşitli teoriler geliştirmişlerdir. Bunlardan biri olan *soyutlamanın indirgenmesi teorisi* (Reducing abstraction theory), ilk olarak Hazzan (1999) tarafından, lisans öğrencilerinin soyut cebir kavramlarını algılayışlarını açıklamak için geliştirilmiş ve genellikle de ileri matematiksel düşünceyle ilgili alanlar (bilgisayar bilimleri gibi) ve lisans seviyesindeki matematik konuları ile ilişkilendirilmiş (Hazzan, 2001, 2003a, 2003b; Raychaudhuri, 2014; Şenay & Özdemir, 2014) bir teoridir. *Soyutlama seviyesinin indirgenmesi* (kısaca *soyutlamanın indirgenmesi*) *teorisi* öğrencilerin, karşılaştıkları kavramların gerektirdiği soyutlamadan veya uzmanların (öğretmenler, matematikçiler vb.) kendilerinden beklediğinden daha düşük bir soyutlama seviyesinde çalışma eğilimlerine dayandırılabilir. Soyutlama seviyesinin indirgenmesi aynı zamanda, öğrencinin karşılaştığı yeni kavramların üstesinden gelebilmek için çeşitli yollar bulmasının da göstergesidir. Öğrenciler bu yollarla, kavramları zihinsel olarak erişilebilir hale getirip onlarla düşünebilir ve bilişsel olarak ele alabilirler. *Soyutlamanın indirgenmesi teorisi*, literatürdeki soyutlama ile ilgili farklı yorumlardan hareketle geliştirilmiş üç alt temadan oluşmaktadır. (Hazzan, 1999, 2001). Aşağıda, *soyutlamanın indirgenmesi teorisinin* alt temaları örneklerle açıklanacaktır.

1.1.1. *Düşünülen nesne ile onu düşünen insan arasındaki ilişkinin kalitesi bakımından soyutlamanın indirgenmesi*

Soyutlamanın indirgenmesi ile ilgili bu alt tema, Wilensky' nin (1991) "herhangi bir şeyin soyut ya da somut olması, o şeyin doğal bir özelliği olmayıp kişi ile o şey arasındaki ilişkinin niteliğinden kaynaklanır" iddiasından hareketle geliştirilmiştir. Buna göre, her kavram ve her kişi için ikisi arasındaki önceki ilişkiyi yansıtan farklı bir seviyedeki soyutlamayı gözleyebiliriz. Bir kişi bir nesneyle ne kadar çok bağ kurmuşsa bu nesneyi o kadar daha somut (veya daha az soyut) hisseder. Bu bakış açısı, bazı öğrencilerin zihinsel süreçlerindeki tanıdık olmayan bir düşünceyi daha tanıdık yapma veya soyutu somut yapma eğilimlerini yansıtmaktadır (Hazzan, 1999). Örneğin, $(1001)_2 + (11)_2$ işlemi, ilkokuldan beri bildiğimiz "eldeli toplama" yaklaşımı ikilik sistemde kullanılarak doğrudan hesaplanabilir fakat verilen sayıları ilk önce kendisinin alışık olduğu onluk sisteme çevirip sonrasında toplama işlemini yapma eğiliminde olan bir öğrenci, soyutlama seviyesini indirgemiştir.

1.1.2. *Süreç-nesne ikiliğinin yansıması bakımından soyutlamanın indirgenmesi*

Soyutlamanın indirgenmesi ile ilgili bu alt tema, matematik eğitiminde kavramların zihinsel yapılandırılmasına ilişkin bazı teorilerde önerilen *süreç–nesne ikiliğine* dayanır. Bu ikiliğe dayanan teorilerde (*APOS* teorisi gibi), matematiksel düşüncelerin, süreç olarak kavranışı ile nesne olarak kavranışı birbirinden ayrılır ve matematiksel bir kavramın bir *süreç* (ardışık işlemler) olarak kavranmasının *nesne* olarak kavranmasından önce ve daha az soyut olduğu belirtilir. Bu teorilerden hareketle, matematiksel bir kavramın süreç olarak kavranışı, nesne olarak kavranışından daha düşük bir seviyede soyutlama (yani *soyutlamanın indirgenmesi*) olarak açıklanabilir (Hazzan, 1999).

Soyutlama seviyesinin indirgenmesi ile ilgili bu tema aynı zamanda (a) bölümünde açıkladığımız temayla da ilişkilidir çünkü kişi ilk başta süreç olarak algıladığı bir kavramla ne kadar çok uğraşırsa o kavram ona daha tanıdık gelmeye başlar ve sonunda onu nesne olarak kavrayabilir. Buna ilave olarak, soyutlama seviyesinin indirgenmesi ile ilgili bu temayı, bir kavramın süreç olarak algılanmasına dayanan aşağıda vereceğimiz iki ayrı bakış açısıyla da açıklayabiliriz:

i. Öğrencinin *birinci şahıs dili* kullanarak formel ifadeleri ve mantıksal argümanları kişiselleştirmesi,

ii. Öğrencinin problem çözerken *standart yöntemleri* kullanma eğilimi.

Birinci şahıs dilinin kullanılması, düşünülen kavramın bir *süreç* olarak algılanmasının, yani soyutlamanın indirgenmesinin bir göstergesi olarak şu örnekle açıklanabilir: Değişme özelliği ile ilgili olarak; "Reel sayılar kümesinin * işlemine göre değişme özelliği varsa, reel sayılar kümesinin her alt kümesi için de bu özellik vardır." ifadesini kullanan birinin, *değişme özelliğini* bir *nesne* olarak kavradığını söyleyebiliriz. Buna karşın, "çarpımdaki sayıların yerlerini *değiştirdiğimde* farklı bir sonuç elde *ediyorsam* onlar değişmeli değildir." ifadesini kullanarak değişme özelliğini kendi fiilleriyle, yani birinci şahıs dili ile açıklamaya çalışan kişi, soyutlama seviyesini indirgemiştir.

Standart yöntemler ise karşılaşılan problemle otomatik olarak tetiklenen yöntemlerdir. *Standart yöntemlerin* kullanımı, problemin doğasından kaynaklanabileceği gibi, öğrencinin daha önce karşılaştığı benzer bir problemin çözümü için uygulanan yöntemle ilişki kurmasının bir sonucu olarak da gerçekleşebilir. *Standart yöntemler*, problemde geçen matematiksel kavramların özellikleri analiz edilmeden, yani kavram *nesne* olarak göz önüne alınmadan hatta o yöntemin arka planındaki matematiksel düşüncelerin anlaşılmasına gerek olmadan problemin çözülmesine fırsat verdiğinden dolayı öğrenciler tarafından daha çok tercih edilmekle birlikte hatalara da sebep olabilmektedir (Hazzan, 1999).

1.1.3. *Düşünülen matematiksel kavramın karmaşıklığının derecesi bakımından soyutlamanın indirgenmesi*

Bu alt temayı bir örnekle şu şekilde açıklayabiliriz: Reel sayılar kümesi, kümedeki herhangi bir elemandan yani bir reel sayıdan daha karmaşık bir matematiksel yapıdır. Bu gerçek, elbette ki karmaşık nesnelerle düşünmenin her zaman daha zor olacağını gerektirmez. Burada, "matematiksel bir yapı ne kadar karmaşıksa o kadar da soyuttur" varsayımından hareket edilmektedir; çünkü, bir yapı bütün olarak analiz edildiğinde ayrıntılar göz ardı edilmelidir. Bundan dolayı, öğrencilerin karşılaştıkları karmaşık bir matematiksel kavram yerine onunla ilişkili olan veya ilişkili olduğu düşünülen daha basit bir kavramla çalışma eğilimi göstermesi soyutlama seviyesinin indirgenmesi olarak yorumlanabilir (Hazzan, 1999).

Hazzan'a (1999) göre, soyutlama seviyesinin indirgenmesi yukarıdaki alt temalarla yorumlanmakla birlikte bu temalar birbirlerini ne tamamen dışlamakta ne de tamamen kapsamaktadırlar. Ayrıca, soyutlamanın indirgenmesi süreci mutlaka matematiksel bir yanılgı veya hatayla sonuçlanan bir zihinsel süreç olarak da anlaşılmamalıdır. Bununla birlikte, soyutlamanın indirgenmesi süreci çoğu zaman bilinçli olarak gerçekleşmediği için kavram yanılgılarına ve hatalara da sebep olabilmektedir. Nitekim, *soyutlamanın indirgenmesi teorisi* çerçevesinde yapılan çalışmalarda (Hazzan, 2001, 2003a, 2003b; Hazzan & Zaskis, 2005; Raychaudhuri, 2014; Şenay, 2014; Şenay & Özdemir, 2014) esas amaç kavram yanılgısı ve hataların incelenmesi olmasa da analiz edilen öğrenci cevap ve yaklaşımlarının çoğunda öğrencilerin çeşitli kavram yanılgılarının olduğu ve hatalar yaptıkları gözlenmiştir. Ayrıca, Şenay (2024), üslü ve köklü ifadelere yönelik kavram yanılgıları ve hataları incelediği çalışması ile bu teorik çerçevenin kavram yanılgıları ve hataların analizi için de kullanışlı bir araç olduğunu göstermiştir. Bu düşüncelerden hareketle, *soyutlamanın indirgenmesi teorisi* bu çalışmanın teorik çerçevesi olarak kabul edilmiştir.

Araştırmamızın amacı, öğretmen adaylarının sayılar teorisi kapsamındaki bazı kavramlarla ilgili yanılgılarını ve yaptıkları hataları soyutlamanın indirgenmesi teorik çerçevesinde incelemektir. Bu yaklaşımın nedeni, bu kavramlarla ilgili kavram yanılgıları ve hataların olası sebeplerini farklı bir bakış açısıyla yorumlayarak öğretmenlere ve matematik eğitimcilerine öğrenci anlayışları hakkında yeni bir fikir sunmaktır. Ayrıca, bu teorik çerçeve ile lisans seviyesindeki bazı kavramlara yönelik kavram yanılgıları ve hataların ilk defa incelenecek olması da çalışmanın literatüre katkısı bakımından önemlidir.

2. YÖNTEM

2.1. Araştırmanın Modeli

Çalışmamızda nitel araştırma modellerinden biri olan durum çalışması modeli kullanılmıştır. Durum çalışmasında amaç, belirli bir durumun derinlemesine incelenerek, ayrıntılı sonuçların ortaya çıkarılmasıdır. Durum çalışmasının sonuçlarının genellenebilme özelliği olmamasına rağmen bu sonuçlar, benzer başka bir durum çalışmasında veri olarak kullanılabilir (Köse, 2010, s. 107).

2.2. Çalışma Grubu

Araştırmamızda, sayılar teorisi kapsamındaki kavramlarla ilgili yanılgılar ve hatalar inceleneceği için uygulamalara, *Sayılar Teorisi* veya *Elementer Sayılar Teorisi* derslerini almış veya almakta olan öğretmen adaylarından gönüllü olanlar katılmıştır. Buna göre çalışma, 2012-2013 güz döneminde, NEÜ A. K. Eğitim Fakültesinin İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü 4. sınıf ve Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü 3., 4. ve 5. sınıflarındaki 136 öğretmen adayı ile yürütülmüştür.

2.3. Veri Toplama Araçları ve Süreci

Bu araştırmanın amacı doğrultusunda, veri toplama aracı olarak Şenay'ın (2014) çalışmasında kullandığı Sayılar Teorisi Soru Formu (STSF) ile elde edilen yazılı cevaplardan ve yarı yapılandırılmış görüşmelerden uygun olanlar seçilmiştir. Aşağıda, STSF'nin hazırlanma süreci ve görüşmelerle ilgili bilgi verilecektir.

2.3.1. *Sayılar teorisi soru formu*

Soru formunun hazırlanması aşamasında bir grup uzmanın görüşlerinden faydalanılmıştır. Bu grup, uygulamalara katılan ilköğretim matematik öğretmen adaylarına *Elementer Sayılar Teorisi* dersini veren bir öğretim elemanı ve farklı üniversite ve bölümlerde uzun yıllar *Sayılar Teorisi* dersini vermiş iki ayrı öğretim elemanından oluşmaktadır. Çalışmanın hangi kavramlar üzerinden yürütüleceğine karar vermek için ilk olarak, ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmenliği lisans programlarındaki *Elementer Sayılar Teorisi* ve *Sayılar Teorisi* derslerinin içeriği, ortaokul ve lise matematik dersi öğretim programlarında yer alan (MEB, 2013a, 2013b) sayılar öğrenme alanındaki kazanımlar incelenmiştir. Yapılan bu inceleme sonunda uzmanların görüşleri de alınarak formun, *bölme*, *bölünebilme*, *ebob*, *Öklid algoritması*, *ekok*, *asal sayılar*, *aralarında asal sayılar*, *Euler (*ϕ*, fi) fonksiyonu*, *lineer kongrüanslar*, *lineer Diofantine denklemler* ve *Çin kalan teoremi* (ÇKT) ile ilgili sorulardan oluşturulmasına karar verilmiştir. Bunun için çeşitli üniversitelerde *Sayılar Teorisi* ders ve kaynak kitabı olarak kullanılan üç farklı eser (Altındiş, 2005; Özdemir, 2001; Şenay, 2007) taranarak yukarıda belirtilen teorem ve kavramlarla ile ilgili 30 klasik sorudan oluşan bir soru havuzu oluşturulmuştur. Soruların, katılımcıların motivasyonlarını bozmadan cevaplayabileceği süre dikkate alınarak ve zorluk derecelerinin çalışma grubuna uygunluğu bakımından uzmanların tam uyumunun sağlandığı 7 tanesi seçilerek formun son hali elde edilmiştir. seçilerek formun son hali elde edilmiştir.

2.3.2. *Görüşmeler*

Çalışmamızda, öğretmen adaylarının STSF'ye verdikleri yazılı cevapların daha derinlemesine incelenebilmesi ve soruların çözümlerinde kullandıkları yöntemleri tercih sebeplerinin belirlenebilmesi için rastgele örneklem yoluyla seçilen 25 öğretmen adayı ile birebir gerçekleştirilen yarı yapılandırılmış görüşmelerden elde edilen veriler kullanılmıştır

2.3.3. *Verilerin toplanması*

Uygulamalar için gerekli izinler alınarak ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmen adaylarına ayrı ayrı olmak üzere, ilk olarak STSF uygulanmıştır. Öğretmen adaylarının STSF'yi 60 dakikalık süre içinde yazılı olarak cevaplamaları istenmiştir. *Sayılar Teorisi* dersini yeni almakta olan katılımcılar için çalışma kapsamındaki kavram ve teoremleri derslerinde görmelerinden sonraki bir zamanda STSF'nin uygulanmasına ayrıca dikkat edilmiştir. STSF' nin uygulanmasından bir hafta sonra belirlenen 25 öğretmen adayı ile iki farklı günde ortalama 10'ar dakika süren birebir görüşmeler yapılmış ve görüşmeler dijital ortamda kayıt altına alınmıştır.

2.4. Verilerin Analizi

STSF'ye verilen yazılı cevaplar ve görüşmelerden elde edilen veriler içerik analizi ve betimsel analiz yöntemleri ile incelenmiştir. Buna göre, araştırmanın amacı doğrultusunda Şenay'ın (2014) çalışmasından seçilen ve *Euler (ϕ , fi) fonksiyonu*, *lineer kongrüanslar*, *lineer Diofantine denklemler* ve *Çin kalan teoremi* ile ilgili sorulara verilen cevaplar üzerinden belirlenen kavram yanılgıları ve hatalar, doğrudan alıntılar yapılarak *soyutlamanın indirgenmesi* teorik çerçevesine göre gerekçeleriyle birlikte açıklanmıştır. Doğrudan alıntılarda katılımcılar, $Ö_1$, $Ö_2$, $Ö_3$,… şeklinde kodlanarak gösterilmiştir.

3. BULGULAR

Bu bölümde, matematik öğretmen adaylarının sayılar teorisinin bazı kavramlarına yönelik yanılgı ve hataları, STSF'den seçilen sorulara verdikleri cevaplar üzerinden açıklanacaktır.

Soru 1. 60'a kadar olan sayılardan 60 ile aralarında asal olanların sayısını bulunuz.

Bu soruya verilen cevaplar üzerinden Euler $\phi(n)$ fonksiyonu ile ilgili yanılgı ve hatalar incelenmiştir. Buna göre, öğretmen adaylarından bazılarının, $\phi(n)$ fonksiyonunun *çarpanlanabilirlik* özelliğini doğru bir şekilde kullanmadıkları görülmüştür. Şekil 1. ve Şekil 2'de bu öğretmen adaylarının çözümlerinden örnekler verilmiştir.

$$60 = 2.3.2.5 =$$
$$\varphi(60) = \varphi(2).\varphi(3).\varphi(5) = 1.2.4 = 8$$

Şekil 1. $Ö_{107}$'nin çözümü

$$\varphi(60) = \varphi(2^2 \cdot 3 \cdot 5)$$
$$\varphi(60) = \varphi(2^2) \cdot \varphi(3) \cdot \varphi(5)$$
$$\varphi(60) = (2^2-1)\ (3-1)\ (5-1)$$
$$\varphi(60) = 3 \cdot 2 \cdot 4$$
$$\varphi(60) = 24$$

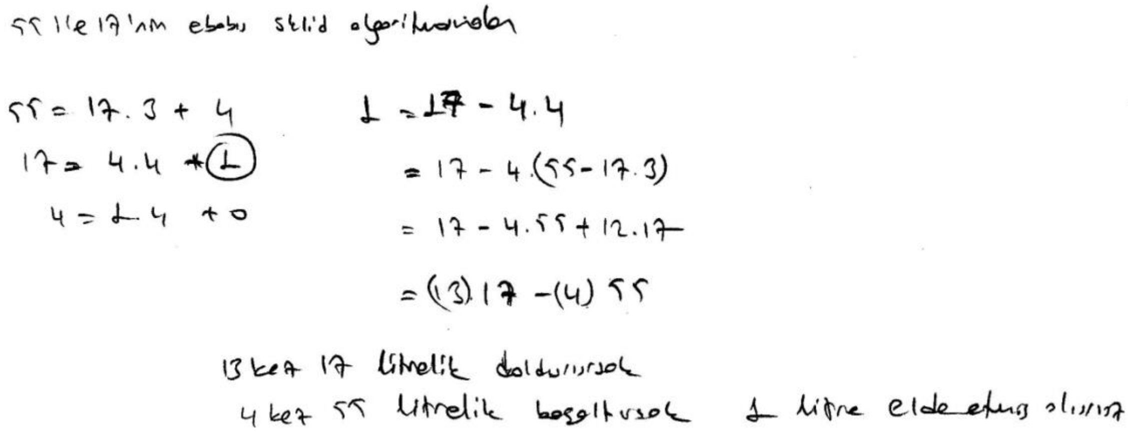
Şekil 2. $Ö_{136}$'nın çözümü

Şekil 1. ve Şekil 2'deki ve benzer çözümleri yapan öğretmen adaylarının, $\phi(n)$ fonksiyonunu matematiksel bir *nesne* olarak kavrayamadıklarından ve fonksiyonun özelliklerini sadece kendilerini sonuca götürecek işlemler (*süreç*) şeklinde düşünmelerinden dolayı soyutlama seviyesini, *süreç-nesne ikililiğinin yansıması bakımından* indirgediklerini söyleyebiliriz.

Soru 2. Ali'nin elinde biri 17 diğeri 55 litre su alan ölçeklendirilmemiş iki bidon vardır. Ali, bu iki bidonu kullanarak boş bir kabı 1 litre su ile doldurabilir mi? Doldurabilirse bunu nasıl yapabilir? Açıklayınız.

Bu soruya verilen cevaplar üzerinden lineer Diophantine denklemler ile ilgili yanılgı ve hatalar incelenmiştir. Buna göre, öğretmen adaylarından bazıları probleme uygun olan $17x + 55y = 1$ lineer

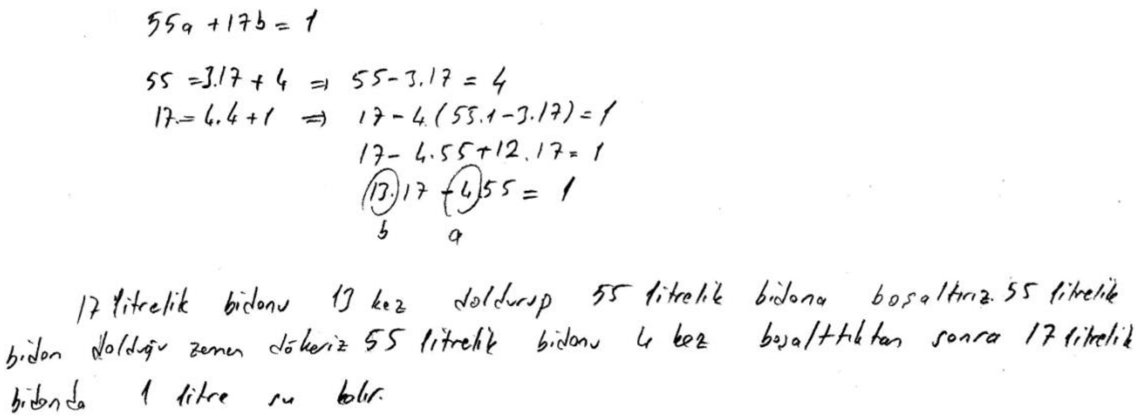
Diophantine denklemini oluşturmuş fakat bu denklemin tam sayılarda çözümünün varlığını incelemeden denklemi çözmeye çalışmışlardır. Şekil 3'te bir öğretmen adayının bu yaklaşımı örnek olarak verilmiştir.



Şekil 3. Ö1'in çözümü

Şekil 3'teki ve benzer çözümleri yapan öğretmen adayları, bir lineer Diophantine denkleminin çözümünün varlığına ilişkin şartları göz ardı ederek yani kavramın *nesne* olarak analizini yapmadan doğrudan işlemlere (*süreç*) yönelerek soyutlama seviyesini, *süreç-nesne ikililiğinin yansıması bakımından* indirgemişlerdir.

Probleme uygun olan $17x + 55y = 1$ denkleminin tam sayılardaki bir çözümü $x = 13$ ve $y = -4$ şeklindedir. Buna göre problemin açıklaması da "17 litrelik bidon ile uygun bir kaba 13 defa su doldurulduktan sonra 55 litrelik bidon ile kaptaki su 4 defa boşaltıldığında kapta geriye 1 litre su kalır" şeklinde olmalıdır. Bazı öğretmen adayları ise doğru çözümü bulmalarına rağmen kendilerine daha kolay gelen veya çözümü doğru olarak belirtmeyen ifadelerle açıklama yaparak soyutlama seviyesini, *düşünülen nesne ve düşünen insan arasındaki ilişkinin kalitesi bakımından* indirgemişlerdir. Şekil 4'te bir öğretmen adayının bu yaklaşımı örnek olarak verilmiştir.



Şekil 4. Ö131'in çözümü

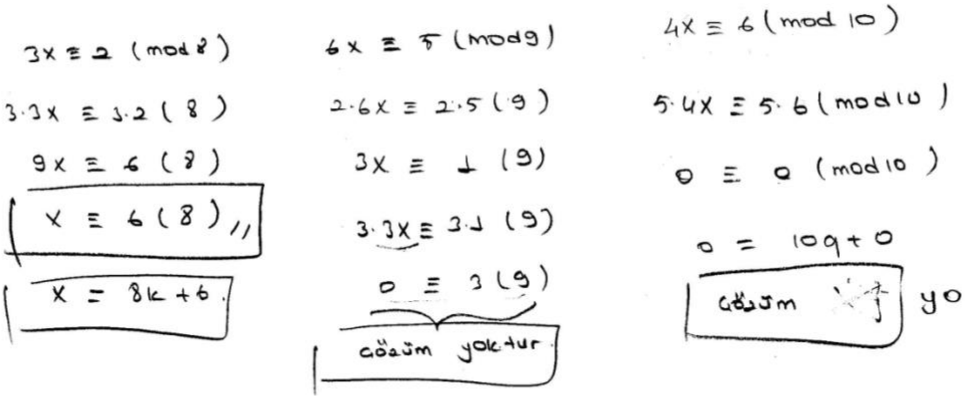
Soru 3. Aşağıdaki denklemlerin çözümünü elde ediniz.

a) $3x \equiv 2(mod\ 8)$

b) $6x \equiv 5(mod\ 9)$

c) $4x \equiv 6(mod\ 10)$

Bu soruya verilen cevaplar üzerinden öğretmen adaylarının lineer kongrüanslar ile ilgili yanılgı ve hataları incelenmiştir. Öğretmen adaylarından bazıları, "$ax \equiv b(mod\ m)$ kongrüans denkleminin çözümünün olabilmesi için $(a,m)|b$ olmalıdır" şartını kontrol etmeden işlemlere geçerek çözüme ulaşmaya çalışmıştır. Şekil 5'te bir öğretmen adayının bu yaklaşımı örnek olarak verilmiştir.



Şekil 5. Ö60'ın çözümü

Ö95 ile yapılan görüşmenin 115-180. sn. arasındaki kısmı da öğretmen adaylarının bu eğilimlerini göstermektedir:

A: Soruyu nasıl çözdün, onu anlatır mısın?

(Ö95 çözümünü anlattıktan sonra)

A: Peki bu denklemleri çözmeden önce çözümünün olup olmadığını kontrol etmek gerekir mi?

Ö95: …(düşünüyor)

A: Yani burada gördüğüme göre sen direkt hemen çözüme başlamışsın.

Ö95: (vurgulayarak) Hemen çözüme başladım.

Şekil 5'teki ve benzer yaklaşımı gösteren öğretmen adaylarının, özellikle sorunun (b) şıkkında verilen $6x \equiv 5(mod\ 9)$ denkleminin, $(6,9) = 3$ ve $3 \nmid 5$ olduğundan çözümünün olmamasına rağmen denklemi çözmeye çalıştıkları görülmüştür. Bu öğretmen adaylarının bir lineer kongrüans denkleminin çözümünün varlığıyla ilgili durumları içselleştiremedikleri görülmektedir. Bu öğretmen adaylarının, matematiksel bir yapıyı *nesne* olarak kavrayamadıklarını yani denklemlerin çözümlerinin varlığının analizinde kullanamadıklarını ve sadece karşılaştıkları soruyla tetiklenen *standart yöntemlere* (işlemlere) yöneldiklerini böylece de *süreç-nesne ikililiğinin yansıması bakımından* soyutlama seviyesini indirgediklerini söyleyebiliriz.

Öğretmen adaylarından bazıları da "$ax \equiv b(mod\ m)$ kongrüans denkleminin çözümünün olması için $(a,m)|b$ olmalıdır" bilgisini kullanmak yerine yanlış olarak "$(a,m) = 1$ ise $ax \equiv b(mod\ m)$ kongrüans denkleminin tek çözümü vardır." bilgisini kullanarak denklemleri çözmüşlerdir. Şekil 6'da bir öğretmen adayının bu yöntemle yaptığı çözüm örnek olarak verilmiştir.

Şekil 6'daki ve benzer çözümleri yapan öğretmen adaylarının, kendilerine $(a,m)|b$ nesnesinden daha az karmaşık gelen $(a,m) = 1$ nesnesi ile çalışma eğilimi göstererek soyutlama seviyesini *düşünülen kavramın karmaşıklığının derecesi bakımından* indirgediklerini söyleyebiliriz.

a) $3x \equiv 2 \pmod 8$ ebob$(3,8)=1$ oldugundan çözüm var.

$3x - 2 = 8k$ buradan $x = 6$

b) $6x \equiv 5 \pmod 9$

ebob$(6,9)=3$ oldugundan çözüm yoktur.

c) $4x \equiv 6 \pmod{10}$ $\quad 2x \equiv 3 \pmod 5$ ebob$(2,5)=1$ oldugundan çözüm var.

$4x - 6 = 10k$ buradan $x = 4$

$2x - 3 = 5k$

Şekil 6. Ö101'in çözümü

Soru 4. Bir çoban koyunlarını 5'er saydığında 2, 7'şer saydığında 4, 9'ar saydığında 6 koyun artmaktadır. Buna göre, çobanın en az kaç koyunu vardır?

Bu soruya verilen cevaplar üzerinden öğretmen adaylarının ÇKT ile ilgili yanılgı ve hataları incelenmiştir. Birinci dereceden bir kongrüans sisteminin çözümünde ÇKT'nin kullanılabilmesi için sistemdeki modüllerin karşılıklı olarak aralarında asal olması gereklidir. Öğretmen adaylarından bazıları bu şartı göz ardı ederek teoremi kullanmışlardır. Şekil 7'de, bir öğretmen adayının bu şekilde yaptığı çözüm örnek olarak verilmiştir.

Şekil 7'deki ve benzer çözümleri yapan öğretmen adayları, bir teoremin geçerli olabilmesi için hipotezinin sağlanması gerektiğini göz ardı etmiş ve hipotezin doğruluğunu kontrol etmeden teoremi kullanmışlardır. Bu öğretmen adaylarının, teoremi hipotezi ile bir bütün (*nesne*) olarak ele almak yerine, sadece verilen problemi çözmek için kullanılan bir yöntem (*süreç*) olarak gördüklerini ve soyutlama seviyesini *süreç-nesne ikililiğinin yansıması bakımından* indirgediklerini söyleyebiliriz.

$x \equiv 2 \ (5)$

$x \equiv 4 \ (7)$

$x \equiv 6 \ (9)$

$M = 5.7.9 = 315$

$m_1 = \frac{315}{5} = 63 \qquad 63.x \equiv 1 \pmod 5 \qquad x \equiv 2 \pmod 5 \qquad x_1 = 2$

$m_2 = \frac{315}{7} = 45 \qquad 45.x \equiv 1 \pmod 7 \qquad x \equiv 5 \pmod 7 \qquad x_2 = 5$

$m_3 = \frac{315}{9} = 35 \qquad 35.x \equiv 1 \pmod 9 \qquad x \equiv 8 \pmod 9 \qquad x_3 = 8$

$x = \sum_{i=1}^{3} M_i.a_i.x_i = 63.2.2 + 45.5.4 + 35.8.6$

$= 252 + 900 + 1680$

$x = 2832$

$x \equiv 2832 \pmod{315} \rightarrow x \equiv 312 \pmod{315}$

$x_t = 312 + 315t \quad t \in \mathbb{Z}$

Şekil 7. Ö47'nin çözümü

4. TARTIŞMA, SONUÇ ve ÖNERİLER

Matematiksel kavramlarla ilgili yanılgıları ve hataları incelemek için araştırmacılar tarafından çeşitli yaklaşımlar kullanılmıştır. Belli bir hata modelinin var olup olmadığını örneğin; öğrencinin tutarlı bir şekilde aynı tür hatayı yapıp yapmadığını belirlemek için hataların derinlemesine incelenmesi gerekir. Bu çalışmada diğerlerinden farklı olarak, matematik öğretmen adaylarının sayılar teorisinin bazı kavramlarına yönelik yanılgı ve hataları soyutlamanın indirgenmesi teorik çerçevesinde incelenmiştir. Analiz sonuçlarına göre, öğretmen adaylarının çoğunlukla kendilerine daha tanıdık veya kolay gelen yöntemleri kullanma eğiliminde oldukları gözlemlenmiştir. Bu eğilimin, çeşitli kavram yanılgılarından kaynaklandığı ve hatalara sebep olduğu söylenebilir.

Çalışmamızda, Smith'in (2002) bulgularına benzer şekilde, öğretmen adaylarının çoğunun lineer kongrüansların daha çok işlemsel yönüne ağırlık verdikleri ve lineer kongrüans denklemlerinin çözümünün varlığıyla ilgili şartları göz ardı ettikleri gözlenmiştir. Benzer şekilde, bir kısım öğretmen adayının da ilgili hipotezi doğrulamadan veya tam olarak uygulamadan lineer Diophantine denklemini çözmeye çalışmaları ve ÇKT'yi kullanmaları, matematiksel bir yapı olan teoremlerin bir bütün olarak değil de sadece belirli bir soru tipinin çözümünde kullanılan bir formül veya yöntem olarak algılandığını göstermektedir. Öğretmen adaylarından bazılarının, Euler'in $\phi(n)$ fonksiyonunun *çarpanlanabilirlik* özelliğini doğru bir şekilde kullanamamaları da fonksiyonun özelliklerini sadece kendilerini sonuca götürecek işlemler (*süreç*) şeklinde düşünmelerinden kaynaklanmaktadır. Hazzan'a (2003a) göre, matematiksel bir kavramın *nesne* olarak kavranması, onun tam ve eksiksiz bir yapı olarak ele alınması demektir. Bu sayede o kavramı başka bakış açılarından ele alabilir, özelliklerini, diğer matematiksel kavramlarla ilişkisini analiz edebilir ve üzerinde işlemler yapabiliriz. Bundan dolayı, bir kavramın sadece sonuca götürecek işlemler topluluğu (*süreç*) olarak görülmesi ve özelliklerinin analiz edilememesi, onun bir *nesne* olarak kavranışından daha düşük seviyede bir soyutlama olarak kabul edilebilir.

Sonuç olarak öğretmen adaylarının, kavram ve teoremlerin analizini yapmak gibi daha üst seviyede bir soyutlama gerektiren bir yaklaşım göstermek yerine daha alt seviyede bir soyutlama olan işlemlere (süreç) yönelerek soyutlama seviyesini indirgedikleri gözlemlenmiştir. Öğretmen adaylarının bu eğilimleri, kavramların ve ilgili teoremlerin matematiksel bir nesne olarak kavranamadığının ve içselleştirilemediğinin bir göstergesidir. Soyutlamanın indirgenmesi teorisi Hazzan'a (1999) göre, öğrenci hata ve yanılgılarını incelemek için geliştirilmiş bir teori olmasa da çalışmamızdaki örneklerle, soyutlama seviyesinin bilinçsizce indirgenmesinin öğrencileri hata ve yanılgılara sevk edebileceği; dolayısıyla bu teorik çerçevenin, öğrenci hata ve yanılgılarının incelenmesinde de kullanılabileceği gösterilmiştir. Benzer şekilde, Şenay (2024) da bu teorinin öğrenci hata ve yanılgılarının sebeplerini açıklamada kullanılabileceğini göstermiştir.

Sayılar Teorisi ve benzer dersler kapsamında verilen kavramların soyutluk seviyeleri ve bu derslerin işleniş şekli, öğrencilerin karşılaştıkları yeni matematiksel yapıları önceki bilgileriyle birlikte özümsemelerini engelleyebilmektedir. Bilgisayar ve teknoloji kullanımının, öğrencilerin teorik ağırlıklı derslere ilişkin negatif tutumlarını değiştireceği ve ilgilerini artıracağı (Sinclair vd., 2003) dikkate alınarak farklı öğretme süreçleri tasarlanmalıdır. Örneğin, GeoGebra gibi yazılımların sağladığı görsellik sayesinde öğrencilerin sayı örüntülerindeki düzen vb. yapıları fark edip genellemeleri kendilerinin oluşturmaları ve bu genellemelerin doğruluğunu test etmeleri, öğrencilerin kavramları daha kolay ve doğru bir şekilde öğrenmelerine yardımcı olabilir. İlköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmenliği programlarındaki "Sayılar Teorisi" veya ilgili derslerin teorik içeriği azaltılarak sayılar teorisinin günlük hayattaki uygulamalarına yönelik problemler, etkinlikler, ödevler ve projelerle zenginleştirilmesi de öğretmen adaylarının öğretilen kavramları tam ve kalıcı bir şekilde öğrenmelerinde faydalı ve etkili olacaktır.

KAYNAKÇA/REFERENCE

Altındiş, H. (2005). *Sayılar teorisi ve uygulamaları*. Ankara: Lazer Ofset.

Ball, D. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*, 132-144.

Bingölbali, E. & Özmantar, M. F. (2012). Matematiksel kavram yanılgıları: Sebepleri ve çözüm arayışları. E. Bingölbali & M. F. Özmantar (Ed.), *İlköğretimde karşılaşılan matematiksel zorluklar ve çözüm önerileri* içinde (ss. 1 – 30). Ankara, Turkiye: Pegem Akademi.

Bolte, L. (1999). Enhancing and assessing preservice teachers’ integration and expression of mathematical knowledge. *Journal of Mathematics Teacher Education, 2*(2), 167-185.

Hazzan, O. (1999). Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 40, 71–90.

Hazzan, O. (2001). Reducing abstraction: The case of constructing an operation table for a group. *Journal of Mathematical Behaviour,* 20(2), 163-172.

Hazzan, O. (2003a). How students attempt to reduce abstraction in the learning of mathematics and in the learning of computer science. *Computer Science Education,* 13(2), 95-122.

Hazzan, O. (2003b). Reducing abstraction when learning computability theory. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching,* 22(2), 95-117.

Hazzan, O., & Zaskis, R. (2005). Reducing abstraction: The case of school mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 58**,** 101–119.

Köse, E. (2010). Bilimsel araştırma modelleri. Remzi Y. Kıncal (Ed.), *Bilimsel araştırma yöntemleri* içinde (ss. 97-120), Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.

Lester, F . K. Jr., & Mau, S. M. (1993). Teaching mathematics via problem solving: A course for prospective elementary teachers. *For the Learning of Mathematics*, 13(2), 8-11.

Martin, W. G., & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 41-51.

Millî Eğitim Bakanlığı (MEB) (2013a). *Ortaokul Matematik Öğretim Programı.* Ankara: MEB Yayınevi.

Millî Eğitim Bakanlığı (MEB) (2013b). *Lise Matematik Öğretim Programı.* Ankara: MEB Yayınevi.

Millî Eğitim Bakanlığı (MEB) (2018a). Matematik Dersi Öğretim Programı (İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. Sınıflar). Ankara: MEB Yayınları.

Millî Eğitim Bakanlığı (MEB) (2018b). Ortaöğretim Matematik Dersi (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar) Öğretim Programı. Ankara: MEB Yayınları.

Nesher, P. (1987). Towards an instructional theory: The role of student's misconceptions. *For the Learning of Mathematics, 7*(3), 33-39.

Özdemir, A.Ş. (2001). *Sayılar teorisi çözümlü problem kitabı*. İstanbul: Salan Yayınevi.

Papadopoulos, I., & Iatridou, M. (2010). Modelling problem-solving situations into number theory tasks: The route towards generalisation. *Mathematics Education Research Journal*, Vol. 22/3, 85-110.

Raychaudhuri, D. (2014). Adaptation and extension of the framework of reducing abstraction in the case of differential equations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45:1, 35-57, https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.790503

Sinclair, N., Zaskis, R., & Liljedahl, P. (2003). Number Worlds: Visual and Experimental Access to Elementary Number Theory Concepts. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 8, 235–263.

Smith, J. C. (2002). An investigation of undergraduates' understanding of congruence of integers. Unpublished doctoral dissertation. The Graduate College of The University of Arizona.

Şenay, H. (2007). *Sayılar Teorisi Dersleri*. Konya: Dizgi Ofset Matbaacılık.

Şenay, Ş. C. (2014). *Matematik Öğretmen Adaylarının Sayılar Teorisine Yönelik Soyutlamayı İndirgeme Eğilimlerinin Düşünme Stilleri ve Matematik Öz Yeterlikleri İle İlişkisinin İncelenmesi* [Doktora tezi]. Marmara Üniversitesi.

Şenay, Ş. C. (2024). Analysis of Misconceptions and Errors Regarding Exponential and Radical Expressions Through the Theory of Reducing Abstraction. *Research on Education and Psychology*, 8(2), 281-295. https://doi.org/10.54535/rep.1520588

Şenay, Ş. C., & Özdemir, A. Ş. (2014). Matematik Öğretmen Adaylarının Lineer Kongrüanslar ile İlgili Soyutlamayı İndirgeme Eğilimleri. *Eğitim ve İnsani Bilimler Dergisi: Teori ve Uygulama [Journal of Education and Humanities: Theory and Practice]*, 5(10), 59-72.

Wilensky, U. (1991). Abstract meditations on the concrete and concrete implications for mathematical education. In I. Harel and S. Papert (Eds.), *Constructionism*, 193–203. Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation.

Zazkis, R., & Campbell, S. R. (1996). Divisibility and multiplicative structure of natural numbers: Preservice teachers' understanding. *Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 27, No. 5*, 540- 563.

Zazkis, R., & Campbell, S. R. (2011). Number theory in Mathematics Education: Perspectives and Prospects. In R. Zaskis & S. R. Campbell (Eds.), *Number theory in Mathematics Education: Perspectives and Prospects*. (Chp. 1). New York: Routledge.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2004). Understanding Primes: The Role of Representation. *Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 27, No. 5*, 164-186.

EXTENDED ABSTRACT

1. INTRODUCTION

Due to its cognitive and formal structure, its relationship with arithmetic and algebra, and its many applications in computer science and cryptology, number theory is an area that should be emphasized in mathematics education. Zaskis and Campbell (2011) also stated that since the basic concepts of number theory provide an accessible ground for learners of all ages to explore mathematical structures and principles, it will contribute to teachers' ability to explain mathematics in depth.

Despite its importance for mathematics teachers' content knowledge, number theory has been given limited attention in mathematics education research until recently. In some of these studies, it is seen that elementary number theory concepts are used only as a mathematical content to investigate different problems (Zaskis & Campbell, 2011), and some of the studies have focused only on understanding and relating the concepts of elementary number theory.

According to research results, mathematical misconceptions and errors have significant effects on students' long-term mathematics learning (Nesher, 1987). Therefore, it is critical to identify and correct misconceptions and errors.

Due to the importance of abstraction in mathematics learning, mathematics educators have examined and discussed this issue from many different perspectives and developed various theories about abstraction. Reducing abstraction theory, which is one of them, was first developed by Hazzan (1999) to explain undergraduate students' perceptions of abstract algebra concepts and is generally associated with fields related to advanced mathematical thinking (such as computer science) and undergraduate mathematics subjects (Hazzan, 2001, 2003a, 2003b; Raychaudhuri, 2014; Şenay & Özdemir, 2014). The theory of reducing abstraction is based on the tendency of students to work at a lower level of abstraction than the abstraction required by the concepts they encounter or what experts (teachers, mathematicians, etc.) expect of them. This theory consists of three sub-themes developed from different interpretations of abstraction in the literature:

a) Reduction of abstraction in terms of the quality of the relationship between the object of thought and the person thinking it.

b) Reduction of abstraction as the reflection of process-object duality.

c) Reduction of abstraction in terms of the degree of complexity of the mathematical concept being thought.

Although the main purpose of the studies conducted within the framework of the theory of reducing abstraction was not to examine misconceptions and errors, it was observed from these research that students had various misconceptions and made mistakes. The aim of our research is to examine the misconceptions and errors of pre-service teachers about some concepts in number theory within the theoretical framework of reducing abstraction. The reason for this approach is to interpret the possible reasons for misconceptions and errors about these concepts from a different perspective and to provide teachers and mathematics educators with a new idea about student understanding. In addition, the fact that this theoretical framework will be used to examine misconceptions and errors about some concepts at the undergraduate level for the first time is important in terms of the contribution of this study to the literature.

2. METHOD

In our study, the case study model, one of the qualitative research models, was used. The study was conducted in the fall semester of 2012-2013 with 136 pre-service teachers in the 4th grade of the Department of Elementary Mathematics Teaching and in the 3rd, 4th and 5th grades of the Department of Secondary Mathematics Teaching at N.E.U. A. K. Faculty of Education. In line with the purpose of the study, the appropriate ones were selected from the written answers obtained from the Number Theory Question Form used by Şenay (2014) and semi-structured interviews as data collection tools. Accordingly, the misconceptions and errors related to Euler’s function, linear congruences, linear Diophantine equations and Chinese remainder theorem (CRT) were explained with their justifications according to the theoretical framework of reduction of abstraction by using direct quotations.

3. FINDINGS, DISCUSSION AND RESULTS

In our study, similar to the findings of Smith (2002), it was observed that most of the pre-service teachers focused more on the operational aspects of linear congruences and ignored the conditions related to the existence of the solution of linear congruence equations. Similarly, the fact that some pre-service teachers tried to solve the linear Diophantine equation without verifying or fully applying the relevant hypothesis and used the CRT shows that theorems, which are a mathematical structure, are not perceived as a whole object but only as a formula or method used to solve a certain type of question. The fact that some of the pre-service teachers could not use the factorizability property of Euler's function correctly stems from the fact that they only think of the properties of the function as operations (processes) that will lead them to the result. According to Hazzan (2003a), understanding a mathematical concept as an object means treating it as a full and complete structure. In this way, we can consider the concept from different perspectives, analyze its properties, its relationship with other mathematical concepts, and perform operations on it. Therefore, considering a concept only as a collection of operations (process) leading to a result and not analyzing its properties can be considered as a lower level of abstraction than understanding it as an object.

Although, according to Hazzan (1999), the theory of reduction of abstraction is not a theory developed to examine student errors and misconceptions, the examples in our study show that unconscious reduction of the level of abstraction can lead students to errors and misconceptions; therefore, this theoretical framework can also be used to examine student errors and misconceptions.

The level of abstractness of the concepts given in Number Theory and similar courses and the way these courses are taught may prevent students from assimilating the new mathematical structures they encounter with their prior knowledge. Considering that the use of computers and technology can change students' negative attitudes towards theoretical courses and increase their interest (Sinclair et al., 2003), different teaching processes should be designed. Reducing the theoretical content of Number Theory or related courses in elementary and secondary mathematics teaching programs and enriching them with problems, activities, assignments and projects related to the applications of number theory in daily life will be useful and effective in helping pre-service teachers learn the concepts taught in a complete and permanent way.

ARAŞTIRMANIN ETİK İZNİ

Bu çalışmada "Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesi" kapsamında uyulması gerektiği belirtilen tüm kurallara uyulmuştur. Yönergenin ikinci bölümü olan "Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiğine Aykırı Eylemler" başlığı altında belirtilen eylemlerden hiçbiri gerçekleştirilmemiştir.

ARAŞTIRMACILARIN KATKI ORANI

1. yazarın araştırmaya katkı oranı %50, 2. yazarın araştırmaya katkı oranı %50'dir. Araştırmacılar şu aşamalarda araştırmaya katkı sunmuşlardır:

Yazar 1: Verilerin toplanması ve analizi, raporlaştırma.

Yazar 2: Yöntemin belirlenmesi, danışmanlık, geçerlik ve güvenirlik çalışmaları.

ÇATIŞMA BEYANI

Çıkar çatışması teşkil edebilecek durumlar yoktur.