Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi

Sayı : 4 Ekim 2003

BOLTZMANN DENKLEMİNİN ALTERNATİF ELDESİ VE ÇÖZÜMÜ

Kaan MANİSA*

Özet

Yüksek sıcaklık bölgesinde transport katsayılarını elde etmek için Boltzmann denklemi kullanılır ve sistem seyrek gaz gibi ele alınıp ortalama alan etkileri ve Pauli engellemesi ihmal edilir. Bu çalışmada seyrek gazların transport katsayıları hesaplanırken kullanılan Boltzmann denklemi'nin türetilişi sunulmuştur. Aynı zamanda seyrek gaz limitinde Boltzmann deklemi çözülmüştür.

1.Giriş

Mikroskopik kinetik teoriden başlayarak maddenin makroskobik özelliklerini açıklayan bütün makroskobik gözlenebilirler elde edilebilirler[1]. Başka bir deyişle nükleonlar, atomlar ve moleküller arasındaki etkileşmeleri açıklayan fizik kanunları kullanılarak maddenin gözlenen özellikleri elde edilebilir.

Transport teorisi, çok genel kinetik teori konusunun sınırlandırılmış bir alt konusudur. Parçacık yoğunluğu n(**r**,**v**,t) yada dağılım fonksiyonu f(**r**,**v**,t) için denklemlerin çıkartılması ve bu denklemler üzerinde çalışılması ile ilgili olan istatistik mekanik durumunu dikkate alarak bu iki teoriyi ayırt edebiliriz.

Bir seyrek gaz için kinetik denklemler yada transport denklemleri Boltzmann denklemiyle açıklanır. Hatta seyreltik sistemlerde transport denklemi Boltzmann denklemi olarak tanımlanır. Yoğun sistemler için elde edilmiş olan kinetik yada transport denklemlerinin matematiksel özellikleri, transport teorisinden bilinen özelliklere dikkate değer derecede benzerdir[2]. Bu çalışmada, bunu açık olarak göstermek için dengede olmayan istatistik mekaniğin (Nonequilibrium Statistical

Mechanics) çok genel persfektifinden yola çıkarak Boltzmann denklemi elde ediliyor ve seyreltik gaz limitinde çözülüyor.

2.BOLTZMANN DENKLEMİNİN ÇIKARILMASI

Bu bölümde f_j dağılım fonksiyonu için Boltzmann denklemini çıkaracağız. Eğer $f_j(\mathbf{r},\mathbf{v}_j,t)$ için bir ifade bulabilirsek, bir seyrek gazın dolayısıyla seyrek gaz limitinde nükleer maddenin transport özellikleri hesaplanabilir. Gerekli olan, f_j yada en azından f_j'yi bir çözüm gibi veren bir denklemdir. Bu denklemi çıkarırken gazların yeterince seyrek olduğunu ve sadece iki-cisim çarpışmalarını gözönüne alacağız. Yani üç-cisim ve daha yukarı dereceden olan çarpışmaları ihmal edeceğiz. Şimdi $(\mathbf{r},\mathbf{v}_j)$ noktası civarındaki j moleküllerini gözönüne alalım. Bu nokta civarındaki $d\mathbf{r}d\mathbf{v}_j$ faz uzayı hacim elemanında bulunan j moleküllerinin sayısı $f_j d\mathbf{r}d\mathbf{v}_j$ ifadesi ile verilir. Burada f_j, j moleküllerinin dağılım fonksiyonudur. Sistemi oluşturan parçacıklar arasında çarpışma yokken, t anında $(\mathbf{r},\mathbf{v}_j)$ noktasında bulunan moleküler sistemin hareket denklemine göre hareket ederler ve (t+dt) anında $[\mathbf{r}+\mathbf{v}_j dt,\mathbf{v}_j+(\mathbf{x}_j/m_j)dt]$ noktasına ulaşırlar. Burada $\mathbf{x}_j$ niceliği dış kuvvet, m_j ise bir j molekülünün kütlesidir. Harekete başlayan bütün noktalar, çarpışmalar sözkonusu olmadığı için faz uzayında aynnı noktaya geleceklerdir. Dolayısıyla,

$$f_j(\mathbf{r},\mathbf{v}_j,t)\, d\mathbf{r}d\mathbf{v}_j=f_j[\mathbf{r}+\mathbf{v}_j dt,\mathbf{v}_j+(x_j/m_j)dt,t+dt)\, d\mathbf{r}d\mathbf{v}_j \tag{1}$$

eşitliğini yazabiliriz. Ancak parçacıklar arasında çarpışmalar sözkonusu olduğundan, t anında $(\mathbf{r},\mathbf{v}_j)$ noktasında bulunan bütün j molekülleri, (t+dt) zamanı sonunda $[\mathbf{r}+\mathbf{v}_j dt,\mathbf{v}_j+(\mathbf{x}_j/m_j)dt]$ noktasına ulaşamazlar ve bazı moleküller çarpışmalar nedeniyle hareket yönlerini değiştirerek bu akıştan ayrılırlar, bazıları ise bu akışa katılırlar. t anında $(\mathbf{r},\mathbf{v}_j)$ noktasından harekete başlayan molekül gurubuna çarpışmalar yüzünden katılan j moleküllerinin sayısı $\Gamma_{ji}^{(+)} d\mathbf{r}d\mathbf{v}_j dt$ olsun. $[\mathbf{v}_j,\mathbf{v}_j+(\mathbf{x}_j/m_j)dt]$ ve $(\mathbf{r},\mathbf{r}+\mathbf{v}_j dt)$ uzay bölgesinde (t,t+dt) süresi içinde i molekülleri ile çarpışmaları yüzünden akıştan ayrılan j moleküllerinin sayısı $\Gamma_{ji}^{(-)} d\mathbf{r}d\mathbf{v}_j dt$ olsun. Bu durumda (1) denklemi

$$f_j[\mathbf{r}+\mathbf{v}_j dt,\mathbf{v}_j+(x_j/m_j)dt,t+dt)\, d\mathbf{r}d\mathbf{v}_j=f_j(\mathbf{r},\mathbf{v}_j,t)d\mathbf{r}d\mathbf{v}_j+\sum_i(\Gamma_{ji}^{(+)}-\Gamma_{ji}^{(-)}) \tag{2}$$

şeklinde yazılmalıdır. Bu denklem düzenlenerek,

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial t}\right)+\mathbf{v}_j\nabla_r f_j+\left(\frac{x_j}{m_j}\right)\nabla_{v_j} f_j=\sum_i(\Gamma_{ji}^{(+)}-\Gamma_{ji}^{(-)}) \tag{3}$$

denklemi elde edilir. Denklemin sol tarafı moleküllerin çarpışmasız hareketinden kaynaklanan f_j dağılım fonksiyonundaki zaman ve koordinata bağlı değişmeleri temsil eder ve akıntı olarak adlandırılır. Sağ taraf ise çarpışmalardan kaynaklanan f_j'deki değişmeyi belirler. (3) denkleminde $\Gamma_{ji}^{(+)}$ ve $\Gamma_{ji}^{(-)}$ çarpışma terimleri, i ve j moleküllerinin çarpışmalarından faydalanılarak,

$$\Gamma_{ji}^{(-)} = 2\pi \iint f_i f_j g_{ij} b db dv_i \tag{4}$$

$$\Gamma_{ji}^{(+)} = \iint f_i' f_j' g_{ij} b db dv_i \tag{5}$$

şeklinde elde edilir[3]. Bulduğumuz (4) ve (5) denklemlerini (3) denkleminde yerine yazarak Boltzmann denklemini elde etmiş oluruz:

$$\frac{\partial f_j}{\partial dt} + v_j \nabla_x f_j + \frac{1}{m_j} x_j \nabla_{v_j} f_j = 2\pi \sum_i \iint (f_i' f_j' - f_i f_j) g_{ij} b db dv_i \tag{6}$$

3.BOLTZMANN DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

İkinci bölümde Bulduğumuz Boltzmann denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f}{\partial r} + \vec{a}\frac{\partial f}{\partial v} = \int d\vec{v}_1 \int d\Omega g I(g,\theta)(f' f_1' - f f_1). \tag{7}$$

Bu denklemde çözüme gidilirken aşağıdaki kabullenmeler yapılmıştır:

i)Parçacıklar nokta parçacık olarak ele alınıp çarpışmalar arasındaki geçen sürenin çarpışma süresinden çok büyük olduğu gözönüne alınmıştır.

ii)Sadece iki-cisim çarpışmaları gözönüne alınmıştır.

iii)Boltzmann'ın moleküler kargaşa kabulü: iki parçacık çarpışırken her defasında birbiri ile bağlantısız olarak biraraya gelirler. Çarpışmadan sonra kuvvetli bir şekilde bağlantılıdırlar.

İlk olarak bir $\psi(\vec{v})$ niceliği için transport denklemini çıkaralım. n(**r**,t) parçacık sayısı yoğunluğu olmak üzere,

$$\psi(\vec{r},t) \equiv \frac{\int dv \psi f}{dvf} = \frac{1}{n}\int dv \psi f \tag{8}$$

tanımlamasını yapabiliriz. (7) denklemini ψ ile çarparak ve integral alarak,

$$\frac{\partial}{\partial t}(n\psi) + \frac{\partial}{\partial x_i}(n\overline{v_i \psi}) - n a_i \overline{\frac{\partial \psi}{\partial v_\alpha}}$$

$$= \frac{1}{4}\int d\vec{v} \int d\vec{v}_1 \int d\Omega g I(g,\theta)(\psi + \psi_1 - \psi' - \psi_1')(f' f_1' - f f_1) \tag{9}$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemde birkaç dönüşüm yaptıktan sonra aşağıdaki korunum kanunları elde ediliyor[4] :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0 \qquad r = (x_1, x_2, x_3) \tag{10}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_j u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \rho a_i - \sum_j \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} \qquad i = 1,2,3,\ldots \tag{11}$$

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{Q}{\rho}\right) + \sum_i u_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{Q}{\rho}\right)\right) + \sum_i \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = u - \sum_{ij} p_{ij} D_{ij} \tag{12}$$

Ortalama P_{ij} ve q_i değerlerini bulmak için f dağılım fonksiyonunun bilinmesi gerekmektedir. Çarpışmalar nedeniyle başlangıçtaki herhangi bir dağılım çok hızlı bir şekilde (ortalama serbest zaman $t_0 = \ell / (kT/m)^{1/2}$ mertebesinde bir zamanda) yerel Maxwell dağılımına erişecektir. Yani Boltzmann denkleminin yerel dengedeki çözümü Maxwell dağılım fonksiyonu olacaktır:

$$f^{(0)} = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m}{2kT}(\vec{v} - \vec{u})^2\right] \tag{13}$$

Burada n, **u**, ve T makroskobik değişkenler, **r** ve T'nin fonksiyonlarıdır. (14) denklemini kullanarak P_{ij} ve q_i değerleri için,

$$P_{ij} = \rho\overline{U_i U_j} = p\delta_{ij}, \qquad P = nkT$$

$$q_i = \frac{1}{2}\rho\overline{U_i U^2} = 0, \qquad Q = \frac{3}{2}P \tag{14}$$

ifadeleri elde edilir. Bu sonuçlara göre (12) eşitlikleri Euler hidrodinamik denklemlerine indirgenir.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho u) = 0$$

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \rho\vec{a} - grad p$$

$$\frac{D}{Dt}(\rho T^{-3/2}) = 0. \tag{15}$$

3.1. Boltzmann Denkleminin Chapman-Enskog Yaklaşımı ile Çözümü

Denge civarında Boltzmann denkleminin çözümü Chapman-Enskog yaklaşımı ile verilir. Dengeye doğru yaklaşım iki safhada oluşur. Dengeye doğru durulmanın bu iki safhası keskin bir şekilde ayrılmamıştır. Öyle ki; bir t_0 mertebesindeki bir zamandan sonra dağılım fonksiyonunun tam olarak (13) denklemindeki gibi olacağı beklenilmemelidir. Onun yerine aşağıda tanımlanan dağılım fonksiyonu denklem (7) denleminde yerine yazmak çok daha mantıklıdır[5].

$$f = f^{(0)}\left[1 + \phi(r, \vec{v}, t)\right] \tag{16}$$

Bu durumda Boltzmann denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + a_\alpha \frac{\partial}{\partial v_\alpha}\right) f^{(0)} = f^{(0)} = f^{(0)} C(\phi) \tag{17}$$

Burada,

$$C(\phi) = \int dv_1 f_1^{(0)} \int d\Omega g I(g,\theta)(\phi' + \phi_1' - \phi - \phi_1) \tag{18}$$

lineerleştirilmiş çarpışma operatörüdür. (17) denkleminin sol tarafının logaritmik türevi alınarak aşağıdaki denklemi elde edilir:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{f^{(0)}}\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + a_\alpha \frac{\partial}{\partial v_\alpha}\right) f^{(0)} \\ &= \frac{1}{nT^{-3/2}}\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)(nT^{-3/2}) + \frac{m}{2kT^2} U^2 \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha}\right) \\ &+ \frac{m}{kT}(v_\alpha - u_\alpha)\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + v_\beta \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}\right) - \frac{m}{kT} a_\alpha (v_\alpha - u_\alpha) \end{aligned} \tag{19}$$

(15) denkleminden de faydalanarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\frac{\partial}{\partial t}(nT^{-3/2}) = -u_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(nT^{-3/2})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -u_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3} T \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -u_\beta \frac{\partial u_i}{\partial x_\beta} + a_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{20}$$

(19) denkleminde (20) denkleminin değerlerini yerine yazarak ve basınç için,

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = kT \frac{\partial n}{\partial x_i} + kn \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(nT^{-3/2}) = T^{-3/2} \frac{\partial n}{\partial x_i} - \frac{3}{2} nT^{-5/2} \frac{\partial T}{\partial x_i} \tag{21}$$

ifadelerini ve $u_i = v_i - u_i$ bağıntısı kullanılarak,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + a_\alpha \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \right) f^{(0)} = f^{(0)} \left[\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} U_\alpha \left(\frac{m}{2kT} U^2 - \frac{5}{2} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{m}{kT} D_{\alpha\beta} \left(U_\alpha U_\beta - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} U^2 \right) \right] \tag{22}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde (18)'daki $C(\phi)$ lineerleştirme operatörünün öz fonksiyonlarıdır. Çünkü bu iki denklemin sol tarafları aynıdır. Bu nedenle $C(\phi)$'nin özfonksiyonları Sonine polinomları cinsinden aşağıdaki gibi yazılır[5].

$$\Psi_{rlm} = N_{rlm} S^{(r)}_{l+(1/2)}(u^2) u^l Y_{lm}(\theta, \phi) \tag{23}$$

$S_{l+(1/2)}$ Sonine polinomları, N_{rlm} de normalizasyon katsayılarıdır. $S_n^m(x)$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$S_n^m(x) = \sum_{p=0}^{m} (-x)^p \frac{(n+m)!}{p!(m-p)!(n+p)!}. \tag{24}$$

Maxwell modeline göre ϕ'nin çözümü Ψ_{11m} ve Ψ_{02m}'in lineer kombinezonudur. Buna göre ϕ için bir deneme fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilir:

$$\phi = \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x_\mu} U_\mu \left(\frac{m}{2kT} U^2 - \frac{5}{2} \right) \chi_1 + \frac{m}{kT} D_{\mu\gamma} \left(U_\mu U_\gamma - \frac{1}{3} \delta_{\mu\gamma} U^2 \right) \chi_2 \tag{25}$$

Burada χ_1 ve χ_2 sabitleri Maxwell modeline göre,

$$\chi_1 = \frac{\int d^3U \exp\left(-\frac{m}{2kT} U^2 \right) U_\mu U_\mu \left(\frac{m}{2kT} U^2 - \frac{5}{2} \right)^2}{\int d^3U \exp\left(-\frac{m}{2kT} U^2 \right) U_\mu \left(\frac{m}{2kT} U^2 - \frac{5}{2} \right)^2 C U_\mu \left(\frac{m}{2kT} U^2 - \frac{5}{2} \right)} \tag{26}$$

$$\chi_2 = \frac{\int d^3U \exp\left(-\frac{m}{2kT} U^2 \right) \left(U_\mu U_\gamma - \frac{1}{3} \delta_{\mu\gamma} U^2 \right) \left(U_\mu U_\gamma - \frac{1}{3} \delta_{\mu\gamma} U^2 \right)}{\int d^3U \exp\left(-\frac{m}{2kT} U^2 \right) \left(U_\mu U_\gamma - \frac{1}{3} \delta_{\mu\gamma} U^2 \right) C \left(U_\mu U_\gamma - \frac{1}{3} \delta_{\mu\gamma} U^2 \right)} \tag{27}$$

şeklinde belirlenir. χ_1 ve χ_2 'nin değerleri bulunup ϕ 'de yerine yazıldıktan sonra, ϕ 'nin çözümü neticesinde P_{ij} ve q_i nicelikleri için,

$$P_{ij} = p\delta_{ij} - 2\eta \left(D_{ij} - \frac{1}{3} D_{\alpha\alpha} \delta_{ij} \right) \tag{28}$$

$$q_i = \kappa \frac{\partial T}{\partial x_i} \tag{29}$$

ifadeleri elde ederiz. (28) denklemi momentum akısı, (29) denklemi de ısı akısıdır.

4.TARTIŞMA VE SONUÇ

Dengede olmayan bir sistemde dengeye doğru yaklaşma ve transport özellikler ile ilgili çalışmalar için uygun, en iyi bilinen mikroskobik teori Boltzmann denklemidir ve seyrek gazlar için geçerlidir[1]. Yüksek sıcaklıklarda nükleer madde seyrek gaz olarak gözönüne alınabilirken düşük sıcaklıklarda nükleon-nükleon çarpışmaları ortalama alan etkileri tarafından yönlendirilir. Bu durumda Boltzmann denklemi, Pauli dışarlama ilkesini hesaba katan ve Maxwell yerine Fermi dağılım fonksiyonuna rehberlik eden Landau kinetik denklemine dönüşür[6]. Bu çalışmada, elde edilen Boltzmann denklemi çözülerek momentum akısı ve ısı akısı denklemleri elde edilmiştir. Bu iki denklemden yola çıkarak nükleer maddenin transport katsayıları seyrek gaz limitinde elde edilebilir. Literatüre bakıldığında, momentum akısı ve ısı akısından yola çıkarak ve sert küre yaklaşımını kullanarak nükleer maddenin viskozluk ve ısı iletkenlik katsayıları için aşağıdaki ifadeler elde edilmiştir[1]:

$$\eta = \frac{5}{16\sigma_t}(\pi mkT)^{1/2}, \qquad \kappa = \frac{75}{64\sigma_t}\left(\frac{\pi k^3 T}{m}\right)^{1/2}. \tag{30}$$

Bu denklemler Boltzmann istatistik limitinde,

$$\eta = \frac{5}{16\sigma_t}(\pi mT)^{1/2}, \qquad \kappa = \frac{75}{64\sigma_t}\left(\frac{\pi T}{m}\right)^{1/2} \tag{31}$$

şeklinde verilir[7]. Ayrıca ortalama serbest yol yaklaşımı kullanılarak bu iki transport katsayısı için,

$$\eta = \left(\frac{1}{\sigma}\right)\left(\frac{1}{3}mT\right)^{1/2}, \qquad \kappa = \left(\frac{1}{2\sigma_t}\right)\left(\frac{3T}{m}\right)^{1/2} \tag{32}$$

ifadeleri yazılabilir[3].

5. KAYNAKÇA

[1] Malflıet, R., 1984, Transport properties of nuclear matter at high densities and high temperatures: Nucl. Phys., 621-635.

[2] Duderstadt, J.J., ve Martin. W.R., 1945, Transport Theory, 613 p

[3] McQuarrie, D.A., 1976, Statistical Mechanics: Harper and Row, 641 p.

[4] Resibois, P. Ve De Leener, M., 1977, Classical Kinetic Theory of Fluids: Wiley NY.

[5] Uhlenbeck, G.E., ve Ford, G.W., 1963, Lectures in statistical mechanics:American Mathematical Society, 77-117.

[6] Oğul, R. ve Özmen, A., 1991, Transport properties of nuclear matter at low temperatures : Doğa-Tr.J.of Phys., 43-50.

[7] Danıelewıcz, P., 1984, Transport properties of exited nuclear matter and shockwave profile: Phys. Lett., 168-175.

*Dumlupınar Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü, Kütahya
kmanisa@dumlupinar.edu.tr