Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi

Sayı : 4 Ekim 2003

36. DERECEDEN GRUPLARIN CAT^1 - GRUPLARININ GAP KULLANILARAK SIRALANMASI[1]

Murat ALP* & Alper ODABAŞ**

Özet

*Bu çalışmada , cat^1 grupları ve çaprazlanmış modülleri hesaplayabilmek için, grup teorisi programlama dili olan GAP [11] programı ile yazdığımız bir program paketini [2] sunduk. Bu programda çaprazlanmış modüller ve cat^1 – grupların morfizmlerinin yanı sıra bu morfizimlerin bileşkesini içeren fonksiyonlar yer almaktadır. Ayrıca paket içerisinde çaprazlanmış modüllerin derivation'u ve bir cat^1 – grup'un section'ınıda yerleştirmiş bulunmaktayız. Çaprazlanmış modüllerin kategorisi **XMod** ile cat^1 – grupların kategorisi **Cat^1** arasındaki eşdeğerlik bağıntısını gerçekleştirecek olan funktorlar da yer almaktadır. Ek olarak bu çalışma, dereceleri 36 olan grupların cat^1 – gruplarının izomorfizmlerin tablo halinde sıralanmasını içermektedir. Küçük dereceden grupların cat^1 – gruplarının izomorfizmleri [1] de verilmiştir. 41-47. dereceden grupların cat^1 – grup'larının izomorfizmleri de [3] de verilmiştir.*

Anahtar Kelimeler : *Çaprazlanmış modül, Derivation, Actor, Cat^1 – grup, GAP, Lue, Norrie*
Key Words *: Crossed Module, Derivation, Actor, Cat^1 – group, GAP, Lue, Norrie*
Math. Sub. Class. (A.M.S. 1993) : *13D99, 16A99, 17D99, 18D35*

---

* Doç. Dr. - Dumlupınar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
** Arş. Gör. - Dumlupınar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

1. GİRİŞ

Bu çalışmadaki esas amaç, grup teorisi programlama dili olan GAP[1] programı vasıtası ile yazılmış olan cat^1 – grupları ile çaprazlanmış modüller arasındaki eşdeğerlik bağıntısını içeren paket **XMOD**[2]'u tanımlamanın yanı sıra, bu program paketinin çalıştırılması sonucu elde etmiş olduğumuz sonuçları vermektir. yazılan paket program 1997 yılında GAP3 dilinde yazılmış olup, daha sonra GAP4 versiyonu da düzenlenmiştir. Elde edilen sonuçlar GAP4 versiyonu çalıştırılarak elde edilmiştir. Çaprazlanmış modül kavramı ilk olarak J. H. C. Whitehead tarafından [12]' da tanımlandı. Bu konu üzerinde çeşitli çalışmalar yapıldı. Bu çalışmaların hemen hemen hepsinde sol etki (action) kullanıldı. Fakat biz, bilgisayar programlarının çoğuna uygun olması nedeniyle sağ etkiyi kullanacağız. İkinci bölümde, çaprazlanmış modüller ve onların derivation'larının yanı sıra cat^1 – grupları ve onların sectionlarının temel özelliklerini anımsatacağız. Bölüm 3, bu alınılan konuların GAP programına aktarılmasını içermektedir. Ayrıca bu bilgisayar uygulamalarının ayrıntılı bir örneği de bu bölümde sunulmuştur. Bölüm 4' de, dereceleri 36 olan grupların cat^1 – gruplarının sıralanmasını içeren bir tablo yer almaktadır.

2. ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER VE CAT^1 - GRUPLAR

Bu bölümde birbirine eşit olan iki kategoriyi hatırlamaya çalışacağız ki bunlar, çaprazlanmış modüller kategorisi **XMod** ve onların morfizmleri; cat^1 – gruplar kategorisi **Cat^1** ve onların morfizmleri . Ayrıca, bu kategoriler arasındaki eşdeğerlik bağıntısını sergileyen functorları da tanımladık.

Aşağıdaki özellikleri sağlayan ve S üzerinde R ' nin bir etkisi ile birlikte bir grup homomorfizmi ∂ $\chi = (\partial : S \longrightarrow R)$ ' e çaprazlanmış modül denir. Burada ∂ genellikle boundary dönüşüm olarak tanımlanır.

$$\text{Cm1:} \quad \partial(s^r) = r^{-1}(\partial s)r$$

$$\text{Cm2:} \quad t^{\partial s} = s^{-1}ts.$$

her bir $s,t \in S$ ve $r \in R$,

Verilen iki çaprazlanmış modül $\chi = (\partial : S \longrightarrow R)$ ve $\chi' = (\partial : S' \longrightarrow R')$ arasındaki morfizm bir homomorfizm $\langle \sigma, \rho \rangle$ çiftidir ki, $\sigma : S \longrightarrow S'$ ve $\rho : R \longrightarrow R'$ homomorfizmleri

[1] www.gap.dcs.st-andrews.ac.uk/~gap/
[2] www-history.mcs.st-and.ac.uk/~gap/Share/xmod4.html

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\partial"'] & S' \arrow[d, "\partial'"] \\ R \arrow[r, "\rho"'] & R' \end{tikzcd}$$

$\partial'\sigma = \rho\partial$ ve $\sigma(s^r) = (\sigma s)^{(\rho r)}$ özelliklerini sağlar. $\chi = \chi'$ iken σ, ρ otomorfizm olup $\langle \sigma, \rho \rangle$ çifti χ in bir otomorfizmidir. Otomorfizmlerin grubu $\mathrm{Aut}(\chi)$ şeklinde gösterilir. Çaprazlanmış modül χ in Whitehead monoid'i olan $\mathrm{Der}(\chi)$, ilk olarak [13] de tanımlandı. Burada $\mathrm{Der}(\chi)$, aşağıdaki özellikleri sağlayan R den S 'e olan tüm monoid dönüşümlerdir.

Der 1: $\chi(qr) = (\chi q)^r (\chi r)$

Der 2: $(\chi_1 \circ \chi_2)(r) = (\chi_1{}^r)(\chi_2{}^r)(\chi_1 \partial \chi_2 r)$.

Tersi olan monoidler regular olarak isimlendirilir. $\mathrm{Der}(\chi)$ 'in grubuna Whitehead grup denir ve $W(\chi)$ şeklinde gösterilir. Küçük dereceden grupların whitehead grupları [4] de tanımlanmıştır. Bir çaprazlanmış modülün actor'u $(\Delta : W(\chi) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\chi))$ Norrie tarafından [10] de tanımlandı. Norrie Çaprazlanmış modülü olan cat[1] – gruplar Alp tarafından [5] de verildi. Daha sonra J. L. Loday [9] çaprazlanmış modül notasyonunu, bir grup G ile birlikte iki homomorfizm $t, h : G \longrightarrow G$ ve sahip oldukları aynı image R ile 1-cat grup olarak yeniden formüle etti. Bu çalışmada, grup G ile birlikte bir subgrup R ve iki örten fonksiyonu $t, h : G \longrightarrow R$ aynı zamanda bir embedding $e : R \longrightarrow G$ den oluşan ve aşağıdaki özellikleri sağlayan $C = (t, h : G \longrightarrow R)$ i cat[1] – grup olarak ifade edeceğiz.

Cat1: $te = he = \mathrm{id}_R$,

Cat2: $[\ker h, \ker t] = \{1_G\}$.

Genellikle t, h, C ' nin source ve target'ı olarak isimlendirilir, fakat yazılan GAP programında onları tail ve head olarak nitelemekteyiz, çünkü source bir fonksiyonun tanım cümlesi için kullanılmış GAP ifadesidir.

İki cat[1] – grup arasındaki morfizm ($C \longrightarrow C'$ bir homomorfizm (γ, ρ) çiftidir ki bunlar $(\gamma : G \longrightarrow G'$ ve $\rho : R \longrightarrow R')$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, shift right, "t"'] \arrow[d, shift left, "h"] & G' \arrow[d, shift right, "t'"'] \arrow[d, shift left, "h'"] \\ R \arrow[r, "\rho"'] & R' \end{tikzcd}$$

aşağıdaki özelliği sağlarlar.

$$h'\gamma = \rho h,\ t'\gamma = \rho t,\ e'\rho = \gamma e.$$

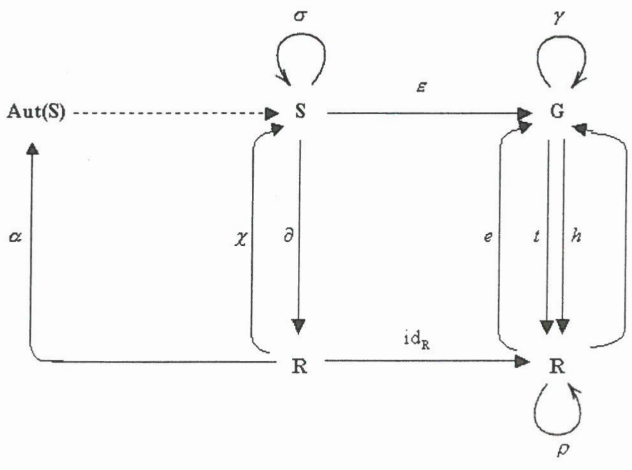
Çaprazlanmış modülün bir derivation'ı cat[1] – gruplarda bir section'a karşılık gelir. C nin bir section'u $\xi : R \longrightarrow G$ bir grup homomorfizmi olup aşağıdaki özellikleri sağlar.

Sect 1: $\quad t\xi = \mathrm{id}_R,$

Sect 2: $\quad h\xi \in \mathrm{End}(R),$

Sect 3: $\quad (\xi_1 \circ \xi_2)(r) = (\xi_2 r)(eh\xi_2 r)^{-1}(\xi_1 h\xi_2 r).$

Aşağıdaki şekil, çeşitli gruplar ve homomorfizmler arasındaki ilişkiyi gösterir.



3. GAP UYGULAMASI

Grup teorisi programı olan GAP kendisine özgü olan kayıt alanları ve output'u ile [11]'de düzenlendi. Biz çaprazlanmış modülleri, cat^1 – grupları , derivation'ları ve onların morfizmlerinin yanı sıra ilişkili oldukları konuları hesaplayabilmek için GAP programı dilinde yazılmış 350 tane fonksiyon içeren bir program paketi [2] geliştirdik.

Çaprazlanmış modül $\chi : (\partial : S \longrightarrow R)$ 'i aşağıdaki kayıt alanları ile GAP programına uygun olarak düzenledik.

X.source,	∂ ' nın source grubu S ,
X.boundary,	homomorfizm ∂ ,
X.range,	∂ ' nın range grubu R ,
X.aut,	S ' nin otomorfizmlerin grubu,
X.action,	bir homomorfizm $R \longrightarrow \mathrm{X.aut}$,
X.isXMod,	kontrol fonksiyonu, normal olarak **doğru**,
X.isDomain,	daima doğru,
X.operations,	**XModOps** işlemlerinin bir özel seti,
X.name,	S ve R 'nin isimlerinin birbirine bağlanması.

XModOps işlemi özel bir output formu ile birlikte derece; elemanların listesi; çekirdek gibi fonksiyonları içerir.

Çaprazlanmış modüllerin bir morfizmi $\mathrm{mor} = \langle \sigma, \rho \rangle : X \longrightarrow Y$ aşağıdaki kayıt alanlarından oluşur:

mor.source,	çaprazlanmış module **X**'in source grubu,
mor.range,	çaprazlanmış module **X**'in range grubu,
mor.sourceHom,	homomorfizm σ : **X.source** $\longrightarrow$ **Y.source**,
mor.rangeHom,	homomorfizm ρ : **X.range** $\longrightarrow$ **Y.range**,
mor.isXModMorphism,	kontrol fonksiyonu, normal olarak doğru,
mor.operations,	**XModMorphismOps** işlemlerinin özel bir seti,
mor.name,	**X** ve **Y**'nin isimlerinin birbirine bağlanması.

XModMorphismOps işlemi çekirdek; image; bileşke; ters morfizm; ve IsEpimorphism gibi bazı test fonksiyonlarını içerir. S 'nin elemanlarının bir listesi **S.elements** olsun. Derivation χ, χ 'nin imagelerinin **S.elements** deki yerlerinin bir listesi olarak algılanır. Örneğin, identity listedeki ilk eleman olduğu için $\chi : R \longrightarrow S$, $r \mapsto \mathrm{id}$ listede `[1,1,...,1]` şeklinde kaydedilir. GAP dilinde yazılmış olan **AllDerivations** fonksiyonu çaprazlanmış module χ 'e **.derivation** alanını ekler ki bu alan aşağıdaki kayıt alanlarından oluşur.

D.table,	imagelerin listelerinin listesi,
D.regular,	regular derivationların sayısı,
D.position,	belirli pozisyonların listesi,
D.regpos,	regular derivationların pozisyonu,
D.elsrc,	**X.source**'un elemanları,
D.elrng,	**X.range'**in elemanları,
D.xod,	çaprazlanmış modül **X**'e dönüş.

Derivasyonların bilgisayar uygulaması sonucunda elde edilen bazı önemli sonuçlar da [8] de verilmiştir. Program paketinde cat^1 – group C, aşağıdaki kayıt alanları ile tanımlandı:

C.source,	source grup **G**,
C.range,	range grup **R**,
C.tail,	tail homomorfizm **t**,
C.head,	head homomorphism **h,**
C.embedRagne,	**R**'nin **G** deki embedding **e,**
C.kernel,	**h**'in çekirdeğine izomorfik olan permutasyon grup,
C.embedKernel,	izomorfizm $\varepsilon : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{G}$,
C.boundary,	**h**' in çekirdeğe kısıtlanması ∂,
C.isDomain,	set **doğru**,
C.operations,	**Cat1GroupOps** işlemlerinin özel bir seti,
C.name,	source ve range isimlerinin birbirine bağlanması.
C.isCatGroup	kontrol fonksiyonu, normal olarak **doğru.**

Cat^1 – grupların bir morfizmi **mor,** çaprazlanmış modül morfizminin sahip olduğu kayıt alanlara sahiptir. Cat^1 – grupların GAP programına uygulanması sonucu elde edilen bazı özel sonuçlar da ALP tarafından [7] de verilmiştir. $\xi : R \longrightarrow G$ ye tanımlanan bir section aşağıdaki kayıt alanlarını içerirki bunlar :

xi.source,	**C** nin range grubu **R** ,
xi.range,	**C** nin source grubu **G**,
xi.generators,	**R** nin üreteç kümesi,
xi.genimages,	Üreteçlerden seçilen görüntüler,
xi.cat^1,	**Cat^1 - grup C**,
xi.operations,	Özel işlem seti,
xi.isSection,	Kontrol fonksiyonu normalde doğru,

biçimindedir. Yine sectionların bilgisayara uygulanma algoritmaları [6] da verilmiştir.

Örnek 3.1

Aşağıda, derecesi 24 olan grup d8c3 ün kendisinden kendisine tanımlanan çaprazlanmış modül ve bağlantılı olduğu işlemler yer almaktadır.

```
gap> X:=XModSelect(24,4,"conj");
Crossed module [d8c3->d8c3]
gap> XModPrint(X);

Crossed module [d8c3->d8c3] :-
: Source group d8c3 has generators:
  [ (1,2,3,4)(5,6,7), (2,4) ]
: Range group = d8c3 has generators:
  [ (1,2,3,4)(5,6,7), (2,4) ]
: Boundary homomorphism maps source generators to:
  [ (1,2,3,4)(5,6,7), (2,4) ]
: Action homomorphism maps range generators to
automorphisms:
  (1,2,3,4)(5,6,7) --> { source gens --> [ (1,2,3,4)
(5,6,7), (1,3)]}
  (2,4) --> { source gens --> [ (1,4,3,2)(5,6,7),
(2,4)]}
  These 2 automorphisms generate the group of
automorphisms.

gap> C:=Cat1XMod(X);
cat1-group [Perm(d8c3 |X d8c3) ==> d8c3]
gap> Cat1Print(C);

cat1-group [Perm(d8c3 |X d8c3) ==> d8c3] :-
: source group has generators:
  [(4,13)(5,14)(6,15)(7,22)(8,23)
(9,24)(25,26,27,28)(29,30,31), (7,22)(8,23)
(9,24)(10,19)(11,20)(12,21)(26,28),
(1,11,18,19,2,12,16,20,3,10,17,21)
(4,8,15,22,5,9,13,23,6,7,14,24), (1,4)(2,5)(3,6)(7,19)
(8,20)(9,21)(10,22)(11,23)(12,24)(13,16)(14,17)(15,18
) ]
:  range group has generators:
  [ (1,2,3,4)(5,6,7), (2,4) ]
: tail homomorphism maps source generators to:
  [ (1,2,3,4)(5,6,7), (2,4), (), ()]
: head homomorphism maps source generators to:
  [ (1,2,3,4)(5,6,7), (2,4), (1,2,3,4)
(5,6,7), (2,4) ]
: range embedding maps range generators to:
  [ (4,13)(5,14)(6,15)(7,22)(8,23)(9,24)
(25,26,27,28)(29,30,31), (7,22)(8,23)
(9,24)(10,19)(11,20)(12,21)(26,28) ]
```

```
: kernel has generators:
  [ (1,2,3,4)(5,6,7),(2,4) ]
: boundary homomorphism maps generators of kernel to:
  [ (1,2,3,4)(5,6,7),(2,4) ]
: kernel embedding maps generators of kernel to:
  [ (1,11,18,19,2,12,16,20,3,10,17,21)
(4,8,15,22,5,9,13,23,6,7,14,24),(1,4)(2,5)
(3,6)(7,19)(8,20)(9,21)(10,22)(11,23)(12,24)(13,16)
(14,17)(15,18) ]
: associated crossed module is Crossed module [d8c3-
>d8c3]

gap> AD:=AllDerivations(X);
AllDerivations record for crossed module [d8c3-
>d8c3],
: 108 derivations found but unsorted.
gap> RecFields(AD);
[ "areDerivations", "isReg", "isAll", "genimageList"
"operations", "xmod",
  "generators" ]
gap> WG:=WhiteheadPermGroup(X);
WG([d8c3->d8c3])
gap> RecFields(WG);
[ "isDomain", "isGroup", "identity", "generators",
"operations",
  "isPermGroup", "isFinite", "1", "2", "3",
"elements", "name" ]

gap> S:=AllSections(C);
AllSections record for cat1-group [Perm(d8c3 |X d8c3)
==> d8c3],
: 16 regular sections,  92 irregular ones found.
gap> RecFields(S);
[ "areSections", "regular", "isReg", "isAll",
"genimageList", "generators",
  "cat1", "operations" ]
gap> A:=Actor(X);
Crossed module Actor[d8c3->d8c3]
gap> XModPrint(A);

Crossed module Actor[d8c3->d8c3] :-
: Source group WG([d8c3->d8c3]) has generators:
[ (1,2,3,4)(5,6,7,8)(9,12,11,10)(13,16,15,14),
(1,5)(2,6)(3,7)(4,8)(9,13)(10,14)(11,15)(12,16),
(1,9)(2,10)(3,11)(4,12)(5,13)(6,14)(7,15)(8,16) ]
: Range group has parent (
PermAut(d8c3)xPermAut(d8c3) ) and has generators:
[ (3,4)(6,7)(11,12)(14,15),(2,8)(3,6)(4,7)
(10,16)(11,14)(12,15),( 1, 2)( 3, 6)( 4, 7)( 5, 8)
```

```
(9,10)(11,14)(12,15)(13,16) ]
: Boundary homomorphism maps source generators to:
  [(1,8,5,2)(9,16,13,10),(3,4)(6,7)(11,12)(14,15),
  (2,8)(3,6)(4,7)(10,16)(11,14)(12,15) ]
: Action homomorphism maps range generators to
automorphisms:
(3,4)(6,7)(11,12)(14,15) --> { source gens -->
[ (1,2,3,4)(5,6,7,8)(9,12,11,10)(13,16,15,14),
(1,5)(2,6)(3,7)(4,8)(9,13)(10,14)(11,15)(12,16),
(1,9)(2,10)(3,11)(4,12)(5,13)(6,14)(7,15)(8,16)] }
gap> N:=Norrie(X);
Crossed module Norrie[d8c3->d8c3]
gap> XModPrint(N);

Crossed module Norrie[d8c3->d8c3] :-
: Source group d8c3 has generators:
  [ (1,2,3,4)(5,6,7),(2,4)]
: Range group has parent (
PermAut(d8c3)xPermAut(d8c3) ) and has generators:
  [
(3,4)(6,7)(11,12)(14,15),(2,8)(3,6)(4,7)(10,16)(11,14
)
(12,15),(1,2)(3,6)(4,7)(5,8)(
9,10)(11,14)(12,15)(13,16) ]
: Boundary homomorphism maps source generators to:
  [ (1,5)(2,8)(9,13)(10,16),(2,8)(3,6)(4,7)
(10,16)(11,14)(12,15) ]
: Action homomorphism maps range generators to
automorphisms:
  (3,4)(6,7)(11,12)(14,15) --> { source gens -->
[ (1,2,3,4)(5,7,6),(2,4) ] }
  (2,8)(3,6)(4,7)(10,16)(11,14)(12,15) --> { source
gens -->
[ (1,4,3,2)(5,6,7),(2,4) ] }
  (1,2)(3,6)(4,7)(5,8)(9,10)(11,14)(12,15)
(13,16) --> { source gens --> [
(1,4,3,2)(5,6,7),(1,2)
(3,4) ] }
  These 3 automorphisms generate the group of
automorphisms.
```

4. SONUÇLAR

Aşağıdaki tablo, dereceleri 36 olan 14 tane grubun GAP programı sıralaması ile birlikte, her grup için tanımlanan homomorfizmlerin $(Homs : G \longrightarrow G)$ sayısını , bu homomorfizmlerdeki idempotentlerin

$(Homs: f^2 \longrightarrow f)$ sayısını içermektedir. Bu idempotentler program içerisindeki cat^1 – grupları oluşturmak için gerekli olan t(tail) ve h(head) homorfizmlerine denk gelmektedirler.
Böylece oluşan cat^1 – grupların (CGS) sayısını, bunlar içerisinde de birbirlerine izomorfik olmayan cat^1 – grupların (NICGS) sayısını ve bu cat^1 – grupların source grubunun (SGI) ismi ile birlikte range grubunun (RGI) isminin listelenmiş şekli de tabloda yer almaktadır.

GAP No.	Isim	Homs $G \longrightarrow G$	Homs $f^2 = f$	CGS	NI CGS	SGI	RGI
36/1	c6c6	1296	112	532	16	c6c6,tr,c6,c6	tr,c6c6,c6,c6
						c6,c6,c2,c2	c6,c6,c3c6,c3c6
						c3,c3,c2c6,c2c6	c2c6,c2c6,c3,c2c6
						c3c6,c3c6	c2,c2
						c2c2,c3c3	c3c3,c2c2
36/2	c18c2	144	16	28	8	c18c2,tr,c2,c2	tr,c18c2,c18,c18
						c18,c18,k4,c9	c2,c2,c9,k4
36/3	c12c3	324	28	76	8	c12c3,tr,c3,c3	tr,c12c3,c12,c12
						c3c3,c4,c12,c12	c4,c3c3,c3,c3
36/4	c36	36	4	4	4	c36,tr,c9,c4	tr,c36,c4,c9
36/5	c6s3	216	48	24	8	c6s3,c6,c2,c2c6	tr,c6,c3c6,c3
						k4,s3,d12,s3c3	c3c3,c6,c3,c2
36/6	c3c6.c2	72	12	8	4	c3c6.c2,c4	tr,c3c3
						c12,c6.c2	c3,c3
36/7	c4c3	513	48	20	4	a4c3,c3,c3c3,a4	tr,c2c6,k4,c3
36/8	$(c2^2c3).c2$	99	6	5	2	$(c2^2c3).c3,c9$	tr,k4
36/9	$c2c3^2:c2$	2992	159	354	8	$c2c3^2:c2,c2,k4$	tr,c3c6,c3c3,c6
						s3,d12	c6,c3
						$d12,c3^2:c2$	c3,c2
36/10	$(c3^2c2).c2$	1460	47	118	4	$(c3^2c2).c2,c4$	tr,c3c3
						c6.c2,c6.c2	c3,c3
36/11	d36	400	51	30	4	d36,c2,k4,d18	tr,c18,c9,c2
36/12	q36	164	11	10	2	q36,c4	tr,c9
36/13	$s3^2$	484	67	28	4	$s3^2,s3,k4,d12$	tr,s3,c3c3,c3
36/14	$c3^2:c4$	172	11	10	2	$c3^2:c4,c4$	tr,c3c3

Sonuç 4.1

Bu zamana kadar yapılan çalışmalar kullanılarak, cebirsel toplojide yer alan çaprazlanmış kare ve cat^n – grup konuları, rahatlıkla grup teorisi programı olan GAP'a aktarılabilir. Böylelikle, cat^n – grupların da belli dereceden gruplar için sıralanması işlemleri gerçekleştirilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Alp, M. And Wensley, C. D., '*Enumeration of Cat^1 – groups of low order*'. *International Journal of algebra and computation,* Vol. 10 (4) (2000) , 407-424.

[2] Alp , M. And Wensley, C. D , '*Crossed modules and Cat ^{1}- groups in GAP*', *GAP programı ortak paketi Bölüm 73*, (1997) 1397-1422.

[3] Alp , M. , '*Enumeration of Cat ^{1}- groups of order 41-47*', *Anadolu Üniversitesi Fen – Fakültesi Dergisi* Sayı 3 (1997), 79-80.

[4] Alp , M. , '*Enumeration of Whitehead groups of low order*', *Intenational Journal of Algebras and Computation* Vol. (12) 5 (2002) 645-658.

[5] Alp , M. , '*Actor and Whitehead numeration of Whitehead Cat ^{1}- groups*', *Hadronic Journal Supplement.* 16 (2001), 427-438.

[6] Alp , M. , '*Section in GAP*', *Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan* Vol. XVI (XXII), (2001), 18-26.

[7] Alp , M. , '*Special cases of Cat^1 – groups*', *Algebras, Groups and Geometries.* 17 (2000), 468-478.

[8] Alp, M. , '*Some results on Derivation Groups*', *Turkish Journal of Mathematics* , Vol. 24 (2) (2000) , 121-128.

[9] Loday, J. L., '*Spaces with finitely many non-trivial homotopy groups*', *J.App.Algebra*, 24 (1982) 179- 202.

[10] Norrıe, K.J., '*Actions and automorphisms of crossed modules*', *Bull. Soc. Math.* France, 118 (1990) 129-146.

[11] Schörnert, M. ET AL, GAP : '*Groups, Algorithms , and Programming*', *Lehrstuhl D für Mathematik, Rheinisch Westfälische Technische Hochschule*, Aachen , Germany , third edition , 1993

[12] Whıtehead, J. H. C., '*Combinatorial homotopy II*', Bull. A. M.S. , 65 (1949) 453-496.

[13] Whıtehead, J. H. C., '*On operators in relative homotopy group*', *Ann. Of Math.*, 49 (1948) 610-640.

E-Mail: malp@dumlupinar.edu.tr aodabas@dumlupinar.edu.tr