NEWTON METODUNUN YAKINSAKLIĞI PROBLEMİ ÜZERİNE
(On the confergengy of Newton Method)

Binali MUSAYEV[*] *,Nizami MUSTAFAYEV*[*] *, Ahmet BOZ*[*]

ÖZET
Bu çalışmada X ve Y Banach uzayları ve F : X⟶Y lineer olmayan bir operatör olmak üzere F(x) = 0 şeklindeki denklemlerin tahmini çözümlerinin bulunması için uygulanan bir Newton iterasyon yönteminin yakınsaklığı ve başlangıç yaklaşımların iyi seçilebilmesi problemleri incelenmektedir

SUMMARY
In this study the problem of carefully selecting initial condition and convergence of the Newton Method was examined for the possible solution of *F(x) = 0 with the X and Y Banach spaces and F : X⟶Y nonlinear operator.*

Anahtar Kelimeler: Yakınsaklık, Freshe Türevi,Yuvar, Freholm integrali.
Key Words: Approximation,Freshe Differantion,Disc,Fredholm Integral

GİRİŞ.
[1]

X ve Y Banach uzayları , L(X,Y) , (L(X) = L(X,X)) X 'den Y ' ye sınırlı lineer operatörler uzayı ve A ∈ L(X,Y) için

$$\|A\| = Sup\{\|Ax\| : \|x\| \leq 1 \}$$

olsun. X'de açık bir E ⊂ X kümesinde tanımlı lineer olmayan bir F : X⟶Y operatörü verilsin. Eğer

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|F(x_0 + h) - F(x_0) - Ah\|}{\|h\|} = 0$$

olacak şekilde bir A ∈ L(X,Y) operatörü mevcut ise F operatörü $x_0 \in$ E noktasında Freshe türevlenebilirdir (türevlenebilirdir) denir. Bu durumda A operatörüne F operatörünün x_0 noktasında Freshe türevi ($\Im$ – türevi) denir ve A = F$'(x_0)$ şeklinde gösterilir. F : X⟶Y operatörünün E ⊂ X kümesinin her noktasında $\Im$ – türevlenebilir olması halinde F operatörü E üzerinde $\Im$ – türevlenebilirdir denir.

X ve Y Banach uzayları , F : X⟶Y lineer olmayan bir operatör olmak üzere

$$F(x) = 0 \qquad (1)$$

şeklinde bir denklemin , eğer varsa, $x^* \in$ X gerçek çözümünün bulunması istenir.

F operatörü r > 0 yarıçaplı $S_r(x_0) = \{ x \in X : \|x - x_0\| < r \}$ yuvarında $\Im$ – türevlenebilir bir operatör olsun. $x_0 \in$ X elemanı (1) denkleminin istenen $x^* \in S_r(x_0)$ gerçek çözümü için başlangıç yaklaşım olmak üzere ardışık yaklaşımları

$$x_n = x_{n-1} - [F'(x_{n-1})]^{-1} F(x_n) \qquad n = 1,2,3.... \qquad (2)$$

şeklindeki bir bağıntı yardımıyla tanımlayalım. Belirtelim ki (2) bağıntısı her n = 1,2... için, eğer varsa, $[F'(x_{n-1})]^{-1} : Y \to X$ ters operatörünün bulunması durumunda gerçeklenebilir. Uygulamalarda bu ters operatörlerin bulunmasındaki zorluklar nedeniyle bir tek x_0 noktasında $[F'(x_0)]^{-1} : Y \to X$ ters operatörünün varlığı durumunda (2) dizisi yerine

$$x_n = x_{n-1} - [F'(x_0)]^{-1} F(x_{n-1}) \qquad n = 1,2,3.... \qquad (3)$$

bağıntısı yardımıyla tanımlanan (x_n) dizisi tercih edilir.

---

[1] [*] Dumlupınar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi , Matematik Bölümü , KÜTAHYA

Kaynaklarda (2) iterasyon yöntemine esas , (3) yöntemine ise değiştirilmiş Newton Metodu (Newton İterasyon Yöntemi) adı verilir. Lineer olmayan fonksiyonel (cebirsel, diferansiyel , integral v.b.) denklemlerin çözümlerinin bulunmasında sık sık kullanılan (2) ve (3) Newton iterasyon yöntemlerinin incelenmesi adı altında oldukça fazla sayıda çalışma vardır. Özellikle Kantoroviç L.V. [1] ,Kantoroviç L.V. ve Akilov G.P.[2] , Mysovskih İ.P. [3] , Vertgeim B.A. [4] , Anselone P.(ed.) [5] , Moore R.H. [6] , Krasnoselski M.A.ve b.[7] ,Rall L. [8] , Ortega J. ve Rheinboldt W.[9] bunlardan birkaçı olarak verilebilir.

Şimdi (2) ve (3) Newton iterasyon yöntemlerinin yakınsaklığı ile ilgili pratikte en uygun varyantlardan olan şu belli sonuçları ifade edelim.

Teorem 1. X ve Y Banach uzayları olmak üzere $F : X \to Y$ operatörü aşağıdaki koşulları sağlasın :

1. $r > 0$ ve $x_0 \in X$ olmak üzere F operatörü $S_r(x_0) \subset X$ yuvarında $\mathfrak{I}$ – türevlenebilirdir.
2. $F'(x)$ türevi $S_r(x_0)$ yuvarında l katsayısı ile Lipshitz koşulunu sağlar , yani her $x, y \in S_r(x_0)$ için
$$\|F'(x) - F'(y)\| \le l\|x - y\| \qquad (4)$$
dir.
3. $F'(x) : S_r(x_0) \to Y$ operatörünün sürekli $[F'(x)]^{-1}$ tersi var ve her $x \in S_r(x_0)$ için
$$\|[F'(x)]^{-1}\| \le m$$
olacak şekilde bir $m > 0$ sayısı mevcuttur.
4. $\|F(x_0)\| \le \eta$.

Bu durumda eğer
$$q = \frac{1}{2} m^2 l \eta < 1 \quad \text{ve}$$
$$r' = m\eta \sum_{k=0}^{\infty} q^{2^k - 1} < r$$
ise (1) denkleminin (2) Newton iterasyon prosesinin yaklaştığı bir $x^* \in \overline{S_{r'}(x_0)} = \{x \in X : \|x - x_0\| \le r'\}$ çözümü vardır ve terimleri (2) bağıntısı ile tanımlanan (x_n) dizisinin x^* 'a yaklaşma hızı
$$\|x_n - x^*\| \le \frac{q^{2^n - 1}}{1 - q^{2^n}} m\eta$$
eşitsizliği yardımıyla verilir.

Teorem 2. X Banach uzayı $F : X \to X$ operatörü $S_r(x_0) \subset X$ yuvarında $\mathfrak{I}$ – türevlenebilir ve $F'(x) \in L(X)$ operatörü her $x, y \in S_r(x_0)$ için (4) eşitsizliğini sağlasın. Eğer ilave olarak $F'(x_0) \in L(X)$ operatörünün $[F'(x_0)]^{-1}$ tersi mevcut ve
$$\|[F'(x_0)]^{-1}\| \le m \ , \ \|[F'(x_0)]^{-1} F(x_0)\| \le \eta$$
olacak şekilde $m > 0$, $\eta > 0$ sayıları varsa $2ml\eta < 1$ ve $r_0 = \left(1 - \sqrt{1 - 2ml\eta}\right)\big/ ml \le r$ durumunda (1) denkleminin bir tek $x^* \in \overline{S_{r_0}(x_0)}$ çözümü vardır ve terimleri (3) bağıntısı yardımıyla tanımlanan Newton iterasyon prosesi x^* çözümüne

$$\left\|x_n - x^*\right\| \le \frac{(1-\sqrt{1-2ml\eta})^n}{\sqrt{1-2ml\eta}} m\eta$$

hızla yaklaşır.

Bu teoremlerin ispatları için [2] , [7] ,[10] ve [11] kitapları referans olarak verilebilir.

Belirtelim ki Teorem 1 ve Teorem 2 ' nin koşullarından görüldüğü gibi (2) ve (3) iterasyon proseslerinin yakınsaklığı $x_0 \in X$ başlangıç yaklaşımının (1) denkleminin x^* çözümüne yeteri kadar yakın olduğu durumda gerçeklenebilir. Bu nedenle söz konusu özelliğe sahip başlangıç yaklaşımların iyi seçilmesi önem taşımaktadır.

İleride $F(x)$ operatörünün $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$ şeklinde gösterilebildiği varsayılır. Eğer $F_1(x)$ operatörünün $F_1'(x)$ $\Im$ – türevinin $[F_1'(x)]^{-1}$ tersi varsa ve kolayca bulunabiliyorsa ,$F_2(x)$ operatörü de norma göre yeteri kadar küçük bir operatör ise

$$F_1(x) + F_2(x) = 0 \tag{5}$$

denkleminin tahmini çözümünün bulunması için terimleri

$$x_n = x_{n-1} - [F_1'(x_{n-1})]^{-1}(F_1(x_{n-1}) + F_2(x_{n-1})) \quad n = 1,2,3.... \tag{6}$$

veya

$$x_n = x_{n-1} - [F_1'(x_0)]^{-1}(F_1(x_{n-1}) + F_2(x_{n-1})) \quad n = 1,2,3.... \tag{7}$$

şeklinde tanımlanan iterasyon proseslerinden birisinin kullanılması faydalı olur.

(6) ve (7) iterasyon proseslerinin yakınsaklığı benzer şekilde incelenebilir. Örneğin (7) iterasyon prosesinin yakınsaklığı ile ilgili şu teoremi ifade ve ispat edelim.

Teorem 3. X bir Banach uzayı $F_1 : X \to X$ operatörü $S_r(x_0) \subset X$ yuvarında $\Im$ – türevlenebilir ve her $x, y \in S_r(x_0)$ için

$$\left\|F_1'(x) - F_1'(y)\right\| \le l_1 \left\|x - y\right\| \tag{8}$$

olacak şekilde $l_1 > 0$ sayısı , $F_1'(x_0) \in L(X)$ operatörünün $[F_1'(x_0)]^{-1}$ tersi mevcut ve

$$\left\|[F_1'(x_0)]^{-1}\right\| \le m_1 \ , \ \left\|[F_1'(x_0)]^{-1} F_1(x_0)\right\| \le \eta_1 \tag{9}$$

olacak şekilde $m_1 > 0$, $\eta_1 > 0$ sayıları varolsun. $F_2 : X \to X$ operatörü için her $x \in S_r(x_0)$ için

$$\left\|[F_1'(x_0)]^{-1} F_2(x)\right\| \le \eta_2 \tag{10}$$

ve her $x, y \in S_r(x_0)$ için

$$\left\|F_2(x) - F_2(y)\right\| \le l_2 \left\|x - y\right\| \tag{11}$$

olacak şekilde $\eta_2, l_2 > 0$ sayıları varolsun.

Eğer $m_1^2 l_2^2 < 1 - 2m_1 l_1(\eta_1 + \eta_2)$ ve $\delta_0 = \dfrac{1-\sqrt{1-2m_1 l_1(\eta_1+\eta_2)}}{m_1 l_1} \le r$ ise (5) denkleminin tek bir $x^* \in \overline{S_{\delta_0}(x_0)}$ çözümü vardır ve terimleri (7) bağıntısı ile tanımlanan (x_n) dizisi x^* çözümüne $q_1 = 1 - \sqrt{1-2m_1 l_1(\eta_1+\eta_2)} + m_1 l_2$ olmak üzere

$$\left\|x_n - x^*\right\| \le \frac{q_1^n}{1-q_1}(\eta_1 + \eta_2) \ , \ n = 1,2,3.... \tag{12}$$

hızla yaklaşır.

İspat: $\phi_1(x) = x - [F_1'(x_0)]^{-1}F_1(x)$

$$\phi_2(x) = -[F_1'(x_0)]^{-1}F_2(x)$$

ve $\phi(x) = \phi_1(x) + \phi_2(x)$, $x \in S_r(x_0)$ olmak üzere (5) denklemi

$$x = \phi(x) \tag{13}$$

şeklinde yazılabilir. $\phi(x): X \to X$ operatörünün Banach Sabit Nokta Prensibinin koşullarını sağladığını görelim.

Her $x \in \overline{S_{\delta_0}(x_0)}$ için

$$\phi(x) - x_0 = [F_1'(x_0)]^{-1}[F_1'(x_0)(x - x_0) - F_1(x) + F_1(x_0)] - [F_1'(x_0)]^{-1}F_1(x_0) - [F_1'(x_0)]^{-1}F_2(x)$$

eşitliği doğru olduğundan (8) , (9) ve (10) koşulları kullanılarak

$$\|\phi(x) - x_0\| \le \frac{1}{2}m_1 l_1 \delta_0^{\,2} + \eta_1 + \eta_2$$

elde edilir. $\delta_0 > 0$ sayısı

$$\frac{1}{2}m_1 l_1 \delta^2 - \delta + \eta_1 + \eta_2 = 0$$

denkleminin küçük kökü olduğundan son eşitsizliğin sağ yanı δ_0 'a eşit olur. Böylece her $x \in \overline{S_{\delta_0}(x_0)}$ için $\|\phi(x) - x_0\| \le \delta_0$ ve dolayısıyla $\phi(\overline{S_{\delta_0}(x_0)}) \subset \overline{S_{\delta_0}(x_0)}$ olur.

Şimdi $\phi(x)$ operatörünün $S_{\delta_0}(x_0)$ yuvarında bir daralma operatörü olduğunu gösterelim. Her $x, y \in S_{\delta_0}(x_0)$ için

$$\phi(x) - \phi(y) = x - y - [F_1'(x_0)]^{-1}[F_1(x) - F_1(y)] - [F_1'(x_0)]^{-1}[F_2(x) - F_2(y)]$$

olduğundan (8) , (9) ve (11) koşullarından

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| \le (m_1 l_1 \delta_0 + m_1 l_2)\|x - y\|$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla , $m_1^{\,2} l_2^{\,2} < 1 - 2m_1 l_1(\eta_1 + \eta_2)$ durumunda $m_1 l_1 \delta_0 + m_1 l_2 < 1$ olduğundan $\phi(x)$ operatörü $S_{\delta_0}(x_0)$ yuvarında q_1 katsayısıyla Lipshitz koşulunu sağlar. 1-q_1 = $\sqrt{1 - 2m_1 l_1(\eta_1 + \eta_2)} - m_1 l_2$ ve $\|\phi(x_0) - x_0\| \le (1 - q_1)\delta_0$ olduğundan Banach Sabit Nokta Prensibi dolayısıyla (13) denkleminin ve dolayısıyla (5) denkleminin bir tek $x^* \in \overline{S_{\delta_0}(x_0)}$ çözümü vardır ve (7) bağıntısı yardımıyla tanımlanan (x_n) dizisi x^* çözümüne (12) hızla yaklaşır.

NOT : $F_1(x) = 0$ denkleminin eğer varsa bir $x_0^{\,*}$ çözümü veya bu çözüme norma göre yakın olan herhangi bir eleman (7) iterasyon prosesindeki x_0 başlangıç yaklaşımı olarak kabul edilebilir.

İleride Teorem 3 'ün bazı uygulamalarını vereceğiz.

$$x(t) = \int_a^b f(t, s, x(s))ds \quad , \; a \le t \le b \tag{14}$$

lineer olmayan Fredholm integral denklemi verilmiş olsun. Burada f (t,s,x) , r >0 olmak üzere

$$G = \{(t,s,x) \in R^3 : \; a \le t, \; s \le b, \; -r \le x \le r \}$$

üzerinde sürekli bilinen ve $x(t)$ ise bilinmeyen bir fonksiyondur. H(t,s,x) , G üzerinde sürekli ve x değişkenine göre 1. mertebeden sürekli kısmi türeve sahip olan bir fonksiyon ve

Q(t,s,x) = f (t,s,x) - H(t,s,x) ,

$$F_1(x)(t) = x(t) - \int_a^b H(t, s, x(s))ds \; ,$$

$$F_2(x)(t) = -\int_a^b Q(t,s,x(s))ds$$

olmak üzere (14) denklemi (5) lineer olmayan operatörlü denklem şeklinde yazılabilir. Bu durumda (7) iterasyon bağıntısı şu şekilde yapılır. [a,b] üzerinde sürekli $x_0(t)$ fonksiyonu herhangi başlangıç yaklaşım olmak üzere gelecek $x_n(t)$, n=1,2,3... yaklaşımlar

$h(t) = x_n(t) - x_{n-1}(t)$ bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere

$$F_1'(x_0)h = -F_1(x_{n-1}) - F_2(x_{n-1}) \tag{15}$$

denkleminden bulunur.

C[a,b] , [a,b] üzerinde sürekli , reel değerli fonksiyonlardan oluşan bir vektör uzayı $\|.\|_\infty$: C[a,b] $\to [0,\infty)$, $\|x\|_\infty = \max\{|x(t)| : t \in [a,b]\}$ tanımıyla bir Banach uzayı olmak üzere X =(C[a,b]: $\|.\|_\infty$) olsun. H(t,s,x) fonksiyonu üzerine olan hipotez gereğince $F_1 : X \to X$ operatörünün $x_0(t) \in$ C[a,b] noktasındaki $\Im$ – türevi

$$F_1'(x_0)h = h(t) - \int_a^b H_x(t,s,x_0(s))h(s)ds$$

olduğundan (15) denklemi çekirdeği $\Re(t,s) = H_x(t,s,x_0(s))$ olan

$$h(t) - \int_a^b \Re(t,s)h(s)ds = g_{n-1}(t)$$

lineer integral denklem şeklinde yazılabilir. Burada

$$h(t) = x_n(t) - x_{n-1}(t)$$

ve

$$g_{n-1}(t) = -x_{n-1}(t) + \int_a^b H(t,s,x_{n-1}(s))ds + \int_a^b Q(t,s,x_{n-1}(s))ds$$

dir. Teorem 3 kullanılarak şu teorem ispatlanabilir.

<u>Teorem 4:</u> $x_0(t) \in$ C[a,b] başlangıç yaklaşımı ve H(t,s,x) , Q(t,s,x) fonksiyonları için aşağıdaki koşullar sağlansın.

1. H(t,s,x) ve H_x (t,s,x) fonksiyonları G üzerinde sürekli ve her (t,s)$\in [a,b]^2$ ve her $x_1, x_2 \in [-r,r]$ için

$$|H_x(t,s,x_1) - H_x(t,s,x_2)| \le l_0 |x_1 - x_2| \;;$$

2. $\Re(t,s)$ fonksiyonu K(t,s) = H_x (t,s,x_0(s)) çekirdeğinin rezolvantası (çözücü çekirdeği) olmak üzere

$$\max\{ \int_a^b |\Re(t,s)| ds : t \in [a,b]\} \le m_0 \;;$$

3. $\|F_1(x_0)\|_\infty \le P_0$;

4. $\max\{ \int_a^b |Q(t,s,x)| ds : |x - x_0(t)| \le r \;, t \in [a,b]\} \le \eta_0$;

5. Herhangi (t,s) $\in [a,b]^2$ ve $x_1, x_2 \in [-r,r]$ için

$$|Q(t,s,x_1) - Q(t,s,x_2)| \le L_0 |x_1 - x_2| \;;$$

6. $q_0 = 1 - 2(1+m_0)^2(b-a)l_0(P_0 + \eta_0) > (m_0 L_0)^2$

olacak şekilde m_0, l_0, P_0, η_0 ve L_0 sayıları mevcut olsun.

Bu durumda

$$(1+m_0)(b-a)l_0\delta_0 = 1-\sqrt{1-q_0} < r(1+m_0)(b-a)l_0$$

ise (14) denkleminin bir tek $x^* \in \overline{S_{\delta_0}(x_0)} = \{x \in C[a,b] : \|x-x_0\|_\infty \le r\}$ çözümü vardır ve bu çözüm terimleri

$$x_n(t) = \int_a^b H(t,s,x_{n-1}(s))ds + \int_a^b Q(t,s,x_{n-1}(s))ds +$$
$$\int_a^b \Re(t,s)[-x_{n-1}(s) + \int_a^b H(s,\xi,x_{n-1}(\xi))d\xi + \int_a^b Q(s,\xi,x_{n-1}(\xi))d\xi]ds \qquad (16)$$

n = 1,2,3... biçiminde tanımlanan ($x_n(t)$) fonksiyon dizisinin limiti gibi bulunabilir ve

$$q_2 = 1-\sqrt{1-q_0} + (1+m_0)(b-a)L_0$$

olmak üzere

$$\|x_n - x^*\| \le \frac{q_2^{\ n}}{1-q_2}(1+m_0)(P_0+\eta_0)$$

eşitsizliği doğrudur.

Gerçekten Teorem 3' ün koşulları gereğince her $x, y \in S_r(x_0)$ için

$$\|F_1'(x) - F_1'(y)\|_\infty \le (b-a)l_0\|x-y\|_\infty \quad \text{ve}$$

$$\|[F_1'(x_0)]^{-1}\|_\infty \le 1+m_0 \quad , \quad \|[F_1'(x_0)]^{-1}F_1(x_0)\|_\infty = (1+m_0)P_0$$

olur. Üstelik her $x \in S_r(x_0)$ için

$$\|[F_1'(x_0)]^{-1}F_2(x)\|_\infty \le (1+m_0)\eta_0$$

ve her $x, y \in S_r(x_0)$ için

$$\|F_2(x) - F_2(y)\|_\infty \le (b-a)L_0\|x-y\|_\infty$$

ifadeleri doğru olduğundan Teorem 3'deki l_1, m_1, η_1, η_2 ve l_2 sayıları olarak sırasıyla $(b-a)l_0$, $(1+m_0), (1+m_0)\,P_0$, $(1+m_0)\eta_0$ ve $(b-a)L_0$ sayıları alındığında Teorem 3' ün koşullarının sağlandığı ve dolayısıyla Teorem 4 'ün doğruluğu görülür.

Eğer Teorem 4 'de adı geçen H(t,s,x) fonksiyonu f(t,s,x) fonksiyonuna norma göre yeteri kadar yakın bir fonksiyon ise

$$x(t) = \int_a^b H(t,s,x(s))ds$$

denkleminin çözümü (14) denklemi için bir başlangıç yaklaşım olarak kabul edilebilir. [2] Örneğin H(t,s,x) fonksiyonu olarak f(t,s,x) fonksiyonunun herhangi bir tam ortonormal $(\varphi_k(s))_{k=1}^{\infty}$ fonksiyonlar sistemine göre

$$\mathrm{f(t,s,x)} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t,x)\ \varphi_k(s)$$

Fourier serisinin m. kısmi toplamı ,yani

$$\mathrm{H(t,s,x)} = \sum_{k=1}^{m} f_k(t,x)\ \varphi_k(s)$$

fonksiyonu seçilebilir. O zaman (15) denklemi dejenere çekirdekli lineer integral denklem olduğundan bu denklemin $\Re(t,s)$ rezolvantası kolayca bulunabilir.

Örnek: Lineer olmayan

$$\varphi(t) = \int_0^1 e^{st} e^{-[\varphi(s)]^2} ds + \sqrt{t} - \frac{1}{t-1}(e^{t-1} - 1) \qquad (17)$$

integral denklemini [6] Teorem 4 esasında inceleyelim.

$\varphi(t) = \sqrt{t}$ fonksiyonu (17) denkleminin bir çözümü olduğundan $x_*(t) = 0$ fonksiyonu

$$x(t) = \int_0^1 e^{s(t-1)}[e^{-2\sqrt{s}\ x(s) - x^2(s)} - 1]ds\ , \qquad (18)$$

denkleminin bir çözümü olduğu açıktır.

$$\mathrm{H(s,x)} = e^{-2\sqrt{s}\ \mathrm{x} - x^2} - 1$$

$$\mathrm{Q(t,s,x)} = (1 - e^{s(t-1)})(e^{-2\sqrt{s}\ \mathrm{x} - x^2} - 1) \quad \text{ve}$$

$$\mathrm{F}_1(x)(t) = x(t) - \int_0^1 H(s, x(s))ds\ ,$$

$$\mathrm{F}_2(x)(t) = \int_0^1 Q(t,s,x(s))ds$$

olmak üzere (18) denklemi $\mathrm{F}_1(x) + \mathrm{F}_2(x) = 0$ operatörlü denklem şeklinde yazılabilir.

H(s,x) ve Q(t,s,x) fonksiyonları için Teorem 4'ün koşullarının sağlandığını görelim. $r \in (0,1)$ olmak üzere $x_0 \in \overline{S_{r/2}(\theta)} = \{ x \in C[0,1] : \|x\|_\infty \le r/2 \}$ ve

$$\mathrm{G} = \{(\mathrm{t,s,x}) \in R^3\ : 0 \le t,s \le 1,\ \ x_0(s) - r/2 \le x \le x_0(s) + r/2 \}$$

olsun. H(s,x) ve $\mathrm{H}_x(\mathrm{s,x}) = -2\ (\sqrt{s} + x)\ e^{-2\sqrt{s}x - x^2}$ fonksiyonlarının G üzerinde sürekli oldukları açıktır. Her $s \in [0,1]$ ve her $x_1, x_2 \in [x_0(s) - r/2\ , x_0(s) + r/2]$ için

$$|H_x(s,x_1) - H_x(s,x_2)| \le 2(1 + 2(1+r)^2)|x_1 - x_2|$$

eşitsizliğinin doğruluğu kolayca gösterilebilir.

$x_0(s) \in \overline{S_{r/2}(\theta)}$ herhangi başlangıç yaklaşım olmak üzere

$\mathrm{K(s)} = \mathrm{H}_x(\mathrm{s}, x_0(s)) = -2\ (\sqrt{s} + x_0(s))\ e^{-2\sqrt{s}\ x_0(s) - x_0^2(s)}$ çekirdeğinin $\Re(s)$ rezolvantasını bulalım.

Bu nedenle $F_1 : X \to X \quad (X = (C[0,1] : \|\cdot\|_\infty))$ operatörünün $x_0 \in \mathrm{C}[0,1]$ noktasındaki

$$F_1'(x_0)h(t) = h(t) + 2\int_0^1 (\sqrt{s} + x_0(s))e^{-2\sqrt{s}\ x_0(s) - x_0^2(s)} h(s)ds$$

$\mathfrak{I}$- türevinin $[F_1'(x_0)]^{-1}$ tersinin bulunması veya bir başka deyişle $q(t) \in \mathrm{C}[0,1]$ herhangi bir fonksiyon olmak üzere

$$h(t) + 2\int_0^1 (\sqrt{s} + x_0(s))e^{-2\sqrt{s}\ x_0(s) - x_0^2(s)} h(s)ds = q(t) \qquad (19)$$

lineer integral denkleminin çözümünün bulunması gerekir. (19) denkleminin çözümü

$$c = 2\int_0^1 (\sqrt{s} + x_0(s)) e^{-2\sqrt{s}\; x_0(s) - x_0^2(s)} h(s)ds \tag{20}$$

olmak üzere $h(t) = q(t) - c$ şeklinde olduğu açıktır. $h(t)$ 'nin bu ifadesini (20) denkleminde yerine koyarsak $x_0(t)$ başlangıç yaklaşımı için

$$\mathrm{T}(x_0) = 1 + 2\int_0^1 (\sqrt{s} + x_0(s)) e^{-2\sqrt{s}\; x_0(s) - x_0^2(s)} ds \neq 0 \tag{21}$$

koşulu sağlandığında

$$c = \frac{2}{\mathrm{T}(x_0)} \int_0^1 (\sqrt{s} + x_0(s)) e^{-2\sqrt{s}\; x_0(s) - x_0^2(s)} q(s)ds$$

olduğu elde edilir. Böylece (19) denkleminin çözümü

$$\Re(s) = -\frac{2}{\mathrm{T}(x_0)} (\sqrt{s} + x_0(s)) e^{-2\sqrt{s}\; x_0(s) - x_0^2(s)}$$

olmak üzere

$$h(t) = [F_1'(x_0)]^{-1} q(t) = q(t) + \int_0^1 \Re(s) q(s)ds$$

olduğu görülür.

Herhangi $(t,s) \in [0,1]^2$, $x_1, x_2 \in [x_0(s) - r/2 \,, x_0(s) + r/2]$ için

$$|Q(t,s,x_1) - Q(t,s,x_2)| \leq 2(l-1)(1+r)|x_1 - x_2|$$

eşitsizliğinin doğruluğu kolayca gösterilebilir.

$$\overline{m_0} = \frac{2}{|T(x_0)|} \int_0^1 \left|\sqrt{s} + x_0(s)\right| e^{-2\sqrt{s}\; x_0(s) - x_0^2(s)} ds \ ,$$

$$\overline{P_0} = \max\left\{ \left| x_0(t) - \int_0^1 (e^{-2\sqrt{s}\; x_0(s) - x_0^2(s)} - 1)ds \right| : t \in [0,1] \right\} \ ,$$

$$\overline{\eta_0} = \max\left\{ \int_0^1 \left|1 - e^{s(t-1)}\right| \left| e^{-2\sqrt{s}\; x_0(s) - x_0^2(s)} - 1 \right| ds \ : t \in [0,1] \right\}$$

olsun. Bu durunda Teorem 4' deki m_0, l_0, P_0, η_0 ve L_0 sayıları olarak sırasıyla $\overline{m_0}, \overline{l_0}, \overline{P_0}, \overline{\eta_0}$ ve $\overline{L_0} = 2(\iota - 1)(r+1)$ sayıları alındığında $x_0 \in \overline{S_{r/2}}(\theta)$ başlangıç yaklaşımı için (21) koşulu ve

$$\overline{q_0} = 1 - 2[(1 + \overline{m_0})\overline{l_0}]^2 (\overline{P_0} + \overline{\eta_0}) > (\overline{m_0}\ \overline{L_0})^2$$

$$(1 + \overline{m_0})\overline{l_0}\delta_0 = 1 - \sqrt{1 - \overline{q_0}} < r \ (1 + \overline{m_0})\,\overline{l_0}/2$$

eşitsizlikleri sağlandığında (18) denkleminin bir tek $x^*(t) = 0$ çözümü vardır ve bu çözüm terimleri

$$x_n(t) = -\int_0^1 e^{s(t-1)} (1 - e^{-2\sqrt{s}\; x_{n-1}(s) - x_{n-1}^2(s)})ds$$

$$- \int_0^1 \Re(s)[x_{n-1}(s) + \int_0^1 e^{\xi(s-1)} (1 - e^{-2\sqrt{\xi}\; x_{n-1}(\xi) - x_{n-1}^2(\xi)}) d\xi]ds \tag{22}$$

n = 1,2,3,.... biçiminde tanımlanan ($x_n(t)$) dizisinin limiti gibi bulunabilir ve ($x_n(t)$) dizisinin $x^*(t)=0$ çözümüne $q_3 = 1-\sqrt{1-\overline{q_0}} + (1+\overline{m_0})\overline{L_0}$ olmak üzere

$$\|x_n\|_\infty \le \frac{q_3^n}{1-q_3}(1+\overline{m_0})(\overline{P_0}+\overline{\eta_0}) \qquad n = 1,2,3....$$

hızla yaklaşır.

NOT : (22) bağıntısında $x_0(t)$ başlangıç yaklaşımı olarak (18) denkleminin $x_*(t)=0$ çözümü alındığında her n = 1,2,3.... için $x_n(t)=0$ elde edilir.

YARARLANILAN KAYNAKLAR

1. ANSELONE , P.(Ed.) **Nonlinear İntegral Equations** , University of Wisconsin Press, Madison 1964
2. HUTSON ,V., PYM,J. , **Applications of Functional Analisis and Operatör Theory** , Academic Press , New York 1980
3. KANTOROVİÇ,L.V. ,(Funksiyonelnıy Analiz i Prikladnaya Matematika) , **"Fonksiyonel Analiz ve Uygulamalı Matematik"** , Uspehi . Mat.Nauk. ,(N.S) 3 , 1948
4. KANTOROVİÇ,L.V. ,AKİLOV ,G.P. (Funksiyonelnıy Analiz) , **" Fonksiyonel Analiz"** , Nauka ,Moskova , 1984
5. KRASNOSELSKİY ,M.A. ve b. (Pribijonnoye Reşeniye Operatornıh Uravneniy), **"Operatörlü Denklemlerin Tahmini Çözümü"** , Nauka . Moskova 1969
6. MOORE ,R.H. ,Newton Method and Variatious , **"Nonlinear İntegral Equations"** University of Wisconsin Press, Madison 1964
7. MYSOVSKİH , İ.P. ,**On convergence of Newton's Method** , Trudy Mat. İnst.Steklov. 28, 1949
8. ORTEGA , J.,RHEİNBOLDT, W. **İterative Solition of Nonlinear Equations in Several Variables** , Academic Press , New York 1970
9. RALL ,L.B.,(Ed.) , **Nonlinear Functional Analisis and Applicatious** , Academic Press , New York 1971
10. TRENOGİN , V.A. ,(Funksiyonalnıy Analiz) , **" Fonksiyonel Analiz"** , Nauka ,Moskova , 1980
11. VERTGEİM , B.A. , **On conditions of applicability of Newton's Method** , Dokl.Akad.Nauk. SSSR. 110 ,N05 ,1956