Çankaya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi,
Journal of Arts and Sciences Sayı: 3 / Mayıs 2005

Bulanık ve Yaklaşımlı Kümeler

Hacı AKTAŞ[*] - *Naim ÇAĞMAN*[*]

Özet

Bu çalışmada, klasik mantığın tanımlayamadığı belirsiz kavramların matematiksel olarak ifade edilebilmesine olanak sağlayan Zadeh'in bulanık kümeler (fuzzy sets) teorisi ve Pawlak'ın yaklaşımlı kümeler (rough sets) teorisi üzerinde durulmuştur. Bu iki teoriyle ilgili temel kavramlar verildikten sonra aralarındaki bazı önemli ilişkiler incelenmiştir. Daha sonra bulanık normal altgrupların direkt çarpımına göre bulanık kümelerin üst yaklaşımı tanımlanarak bazı özellikleri verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bulanık küme, bulanık altgrup , yaklaşımlı küme, alt ve üst yaklaşım.

Fuzzy and Rough Sets

Abstract

In this study, fuzzy set theory proposed by Zadeh and rough set theory proposed by Pawlak are introduced. These set theories deal with several fundamentally different type of uncertainty which can not be properly characterized and investigated mathematically by the classical logic. After given the fundamental concept of these two theories we investigate some important relationships between them. We then define the upper approximations of fuzzy sets with respect to a direct product of fuzzy normal subgroups and studied their properties.

Keywords: Fuzzy set, fuzzy subgroup, rough set, lower and upper approximation.

1. Giriş

Bu yüzyılda matematik ve bilimde görülen çeşitli paradigma değişiklikleri arasında belirsizlik belki de en dikkat çekici olanıdır. Belirsizliği istenilmeyen bir durum olarak gören ve mümkün bütün durumlarda kaçınılması gerektiğinde inanan geleneksel anlayıştan, belirsizlikle uğraşan ve bilimde bundan kaçınılmasının mümkün olmadığını iddia eden alternatif bakış açısına doğru dereceli bir geçiş ortaya konulmaktadır. Belirsizlik problemleri için

[*] Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 60100 Tokat.
E-mail: haktas@gop.edu.tr, ncagman@gop.edu.tr

matematikçiler, mantıkçılar ve filozoflar uzun bir süredir uğraşmaktadırlar. Son zamanlarda bu tür problemler bilgisayar ve yapay zeka ile ilgilenen bilim adamları için çok önemli olmuştur. Klasik mantığın tanımlayamadığı belirsiz kavramların matematiksel olarak ifade edilebilmesinin öneminden dolayı araştırmacılar her geçen gün yeni teoriler sunmaktadır. Bilinen en önemliler teorilerden bazıları; olasılık, istatistik, bulanık kümeler (fuzzy sets) [19], yaklaşımlı kümeler (rough sets) [16,18] ve esnek kümeler (soft sets) [13,14]. Belirsizliği tanımlama ve modellemenin önemini ünlü fizikçi Einstein şu şekilde ifade etmiştir: "Matematiğin kavramları kesin oldukları sürece gerçeği yansıtmazlar, gerçeği yansıttıkları sürece de kesin değillerdir".

1930'larda ünlü filozof Max Black tarafından belirsizliği açıklayıcı öncü kavramlar geliştirilmiş olsa bile, bugün 1965'te Zadeh tarafından yayınlanan makale [19] modern anlamda belirsizlik kavramının değerlendirilmesinde önemli bir nokta olarak kabul edilir. Zadeh, bu makale de, kesin olmayan sınırlara sahip nesnelerin oluşturduğu bulanık küme teorisini ortaya koymuştur.

Bulanık cebir üzerine çalışan otoriteler bulanık kümelerle klasik cebirsel yapıları çalışmak yerine yeni cebirsel çalışmaların yapılması gerektiğini önermektedirler [3]. Bu bağlamda klasik ve bulanık cebirsel yapılar üzerinde yaklaşımlı kümeleri çalışmak ve yeni cebirsel yapılar önermek anlamlı olacaktır. Örneğin, Kuroki [10] bir yarı grup üzerinde yaklaşımlı kümeleri çalışarak, yaklaşımlı yarı grup ve yaklaşımlı ideal gibi yeni cebirsel yapılar önermiştir. Banikowaski [1], Iwinski [5] ve Pomykala [17] gibi bazı araştırmacılar da yaklaşımlı kümelerin cebirsel özelliklerini çalışmışlardır. Bismas ve Nanda[2] yaklaşımlı alt grup kavramını tanıtmışlardır. Kuroki ve Wang [11] normal alt gruplara göre alt ve üst yaklaşımların bazı özelliklerini çalışmışlardır. Ayrıca Kuroki ve Mordeson [12] yaklaşımlı küme ve yaklaşımlı grup yapılarını tanımlayarak bazı özelliklerini vermişlerdir. Jiashang ve arkadaşları [6] bir grup üzerinde T-bulanık normal alt grubuna göre T-yaklaşımlı bulanık alt grup kavramını tanıtmışlar ve bazı önemli sonuçlar vermişlerdir.

Bu çalışmada, klasik mantığın tanımlayamadığı belirsiz kavramların matematiksel olarak ifade edilebilmesine olanak sağlayan Zadeh'in bulanık kümeler teorisi ve Pawlak'ın yaklaşımlı kümeler teorisi üzerinde duracağız. Belirirsizlikler dünyasında önemli yeri olan bu iki teoriyle ilgili temel kavramları verildikten sonra aralarındaki bazı önemli ilişkileri inceleyeceğiz. Daha sonra bulanık normal altgrupların direkt çarpımına göre bulanık kümelerin üst yaklaşımı tanımlayarak bazı özelliklerini vereceğiz.

2. Bulanık Kümeler

Bu bölümde, belirsizliğin ölçülmesin de güçlü ve anlamlı araçlar sunmasının yanı sıra, doğal dildeki belirsiz ve bulanık kavramları temsil etmemize ve onları matematiksel olarak ifade etmemize yarayan bulanık kümeleri tanıtacağız. Bu bölümle ilgili temel tanımlar ve daha geniş bilgi için [4,7,8,20] kaynakları önerilir.

Tanım 1. *U* boş olmayan bir küme olsun. *U*'daki bir bulanık A kümesi

$$\forall x \in U \text{ için } \mu_A : U \rightarrow I = [0,1]$$

fonksiyonu ile verilir. μ_A'ya bulanık kümeye karşılık gelen üyelik fonksiyonu denir. Bulanık *A* kümesi ise *U* deki her elemanın üyelik derecesiyle birlikte oluşturduğu kümedir. x'in *A* ya ait olma veya üyelik derecesi μ_A(x) olur. Her üyelik fonksiyonu bir klasik evrensel kümenin elemanlarını [0,1] aralığındaki bir sayıya karşılık getiren bir fonksiyondur. Bu şekilde tanımlanan bulanık kümelerin kümes I^U ile gösterilir. Burada eğer *U* evrensel kümesi yerine reel sayıları seçersek, elde edilen yeni bulanık kümeye bulanık sayı (fuzzy number) denir.

Bir bulanık küme, çalışma yapılan alana ait her bir bireye matematiksel olarak kümedeki üyelik derecesini temsil eden bir değer atayarak tanımlanır. Bu değer, elemanın bulanık küme tarafından ifade edilen kavrama uygunluk derecesini ifade eder. Bundan dolayı elemanların kümeye ait olması farklılaşır. Üyelik dereceleri 0 ile 1 arasındaki reel sayılarla temsil edilirler. Tam üye olma ve üye olmama durumu bulanık kümesinde sırasıyla 1 ve 0 değerleriyle karşılanır. Bundan dolayı da klasik küme kavramı bulanık küme kavramının bu iki değere kısıtlanmış özel bir şekli olarak görülebilir.

Üyelik fonksiyonları bir çok farklı şekillerde olabilir. Özel bir şeklin uygun olup olmayacağını tespit etmek çalışılan uygulama alanı tarafından elde edilen verilerle belirlenir. Fakat, birçok uygulama bu tür şekil değişikliklerine karşı çok fazla duyarlılık göstermezler. Hesaplama açısından getirdiği kolaylıklar göz önüne alınarak istenilen şekilde üyelik fonksiyonunun seçilmesi, bulanık küme teorisinin esnekliğini yansıtmasında öne çıkan bir durumdur. Çoğu durumda, üçgen ve yamuk üyelik fonksiyonları işimizi görecek niteliklere sahiptir. Bulanık kümeler üzerine kurulan matematiksel yapı, klasik matematikten daha fazla açıklayıcı bir güce sahip olmasına rağmen kullanılabilirliği uygulama alanlarında karşımıza çıkan kavramlar için uygun üyelik fonksiyonlarının inşa edilmesine bağlıdır.

Bulanık küme teorisi aşağıda sırasıyla verdiğimiz bulanık kümelerin tümleyeni, bileşimi ve kesişiminin terimlerine dayanarak formüle edilir.

$$\mu_{U-A}(x) = 1 - \mu_A(x) \ , \ x \in U$$

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \ , \ x \in U$$

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \ , \ x \in U$$

Tanım 2. *X* bir küme olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $R{:}X \ x \ X \rightarrow [0,1]$ dönüşümüne bir benzerlik bağıntısı denir.

(i) Yansıyan:	$\forall x \in X$	için	$R(x, x) = 1$
(ii) Simetri:	$\forall x, y \in X$	için	$R(x, y) = R(y, x)$
(iii) Geçişme:	$\forall x, y, z \in X$	için	$R(x, z) \geq \min\{R(x, y), R(y, z)\}$

(X, R) ikilisine ise **bulanık yaklaşım uzayı** denir.

Tanım 3. G bir grup olsun. Aşağıdaki şartlar sağlayan $\mu : G \to [0,1]$ dönüşümüne bir **bulanık altgrup** denir.

(i) $\forall x, y \in G$ için $\mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$

(ii) $\forall x, y \in G$ için $\mu(x) = \mu(x^{-1})$

e, G grubunun elemanı olmak üzere (i) de $y = x^{-1}$ alınırsa her $x \in G$ için $\mu(e) \geq \mu(x)$ elde edilir. Dolayısıyla $\mu(e) = 1$ kabul edilebilir.

Tanım 4. μ bir G grubunun bulanık altgrubu olsun. Eğer $\forall x, y \in G$ için $\mu(xy) = \mu(yx)$ ise μ ye **bulanık normal altgrub** denir.

Tanım 5. G bir grup, A ve B, G'nin iki bulanık altgrubu olsun.

$$A \circ B(x) = \bigvee_{y \in G} (A(xy^{-1}) \wedge B(y)), \quad x \in G$$

kümesine A ve B nin **çarpımı** denir.

3. Yaklaşımlı Kümeler

Bu bölümde belirsizlik için yeni bir matematiksel malzeme olan yaklaşımlı küme teorisini tanıtacağız. Yaklaşımlı küme teorisi, klasik küme teorisinin bir genişlemesidir. Bu kümede bir evrensel kümenin bir alt kümesi, alt ve üst yaklaşımları olarak adlandırılan sıralı ikili kümeleri ile tanımlanır. Pawlak'ın yaklaşımlı kümelerinde temel araç bir denklik bağıntısıdır. Alt ve üst yaklaşımlar denklik sınıfları ile inşa edilir. Verilen bir kümenin alt yaklaşımlı, kümenin alt kümeleri olan bütün denklik sınıflarının birleşimidir.

Pawlak [16] tarafından ortaya konan yaklaşımlı küme teorisine bütün dünyada bilim adamları tarafından büyük bir ilgi gösterilmiştir. Yeni cebirsel yapılar tanımlanarak yaklaşımlı küme teorisi geliştirilmiştir. Örneğin; bunlardan bazıları [1,6,9,10,17].

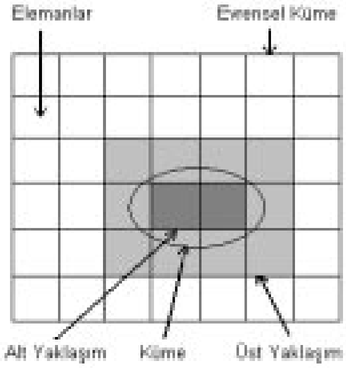
U objelerin bir kümesi ve X de U nun bir alt kümesi olsun. X kümesini U üzerinde tanımlanan bir R bağıntısına göre karakterize edelim. $R(x)$ bir x elemanının denklik sınıfını göstermek üzere yaklaşımların ve sınır bölgesinin tanımları aşağıdaki gibi verilebilir.

X için R **-alt yaklaşımı :** $R_*(x) = \bigcup_{x \in U} \{R(x) : R(x) \subseteq X\}$

X için R **-üst yaklaşımı:** $R^*(x) = \bigcup_{x \in U} \{R(x) : R(x) \cap X \neq \Phi\}$

X için R **-sınır bölgesi :** $RN_R(x) = R^*(x) - R_*(x)$

şeklinde tanımlanırlar. Buna göre bir kümenin alt yaklaşımı tamamen küme tarafından kapsanan denklik sınıflarından, bir kümenin üst yaklaşımı ise kümeyle arakesitleri boştan farklı olan denklik sınıflarının birleşiminden ve kümenin sınır bölgesi de üst ve alt yaklaşımların arasındaki farktan oluşmaktadır. Bunlar Şekil 1'de açık bir şekilde görülmektedir.



Şekil 1

Bu bilgiler doğrultusunda klasik küme, bulanık küme ve yaklaşımlı küme tanımlarını karşılaştırırsak, klasik küme bir gösterim ve sezgisel veya aksiyomlarla tanımlanır. Bulanık kümeleri, ileri düzeyde matematik yapılar, sayılar ve fonksiyonlar içeren, üyelik fonksiyonlarıyla tanımlanır. Yaklaşımlı kümeler ise yaklaşımlarla tanımlanır. Görüldüğü gibi yaklaşımlı küme teorisi bulanık küme teorisinde olduğu gibi klasik küme teorisine bir alternatifi değil aksine onun bir parçasıdır.

Bir kümenin yaklaşımları aşağıdaki özellikleri sağlar:

1. $R_*(X) \subseteq X \subseteq R^*(X)$

2. $R_*(\Phi) = R^*(\Phi) = \Phi,\ \ R_*(U) = R^*(U) = U$

3. $R^*(X \cup Y) = R^*(X) \cup R^*(Y)$

4. $R_*(X \cap Y) = R_*(X) \cap R_*(Y)$

5. $R_*(X \cup Y) \supseteq R_*(X) \cup R_*(Y)$

6. $R^*(X \cap Y) \subseteq R^*(X) \cap R^*(Y)$

7. $X \subseteq Y \to R_*(X) \subseteq R_*(Y),\ R^*(X) \subseteq R^*(Y)$

8. $R_*(-X) = -R^*(X)$,

9. $R^*(-X) = -R_*(X)$,

10. $R_*R_*(X) = R^*R_*(X) = R_*(X)$

11. $R^*R^*(X) = R_*R^*(X) = R^*(X)$

Örnek 6: $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$ objelerin kümesi, $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ değişkenlerin kümesi ve $V_1 = \{1,2,3\}$, $V_2 = \{1,2\}$, $V_3 = \{1,2,3,4\}$ kümeleri de her bir değişkenin aldığı değerlerin kümesini göstersin. Yukarda verilen 10 obje için elde edilen üç sonucu bir matris formunda aşağıdaki gibi verelim. Ayrıca bu sistem için f_a fonksiyonu tablodaki gibi verilir.

U	a_1	a_2	a_3
x_1	2	1	3
x_2	3	2	1
x_3	2	1	3
x_4	2	2	3
x_5	1	1	4
x_6	1	1	2
x_7	3	2	1
x_8	1	1	4
x_9	2	1	3
x_{10}	3	2	1

Tablo 1.

Tablo 1' e göre $f_{a1}(x) = V_1$, $f_{a2}(x) = V_2$ ve $f_{a3}(x) = V_3$ olarak elde edilir. $R(x)$, x_i elemanının denklik sınıfını göstermek üzere $R(x_i)=\{x_j : x_j, x_i$ ile aynı ölçüme sahip, $1\le i,j\le 10\}$ şeklinde tanımlansın. Buna göre

$$R(x_1) = R(x_3) = R(x_9) = \{x_1, x_3, x_9\}$$

$$R(x_2) = R(x_7) = R(x_{10}) = \{x_2, x_7, x_{10}\}$$

$$R(x_4) = \{x_4\}$$

$$R(x_5) = R(x_8) = \{x_5, x_8\}$$

$$R(x_6) = \{x_6\}$$

şeklinde hesaplanır. Bu denklik sınıflarından yararlanarak U nun $X = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_9\}$ alt kümesi için alt yaklaşımı, üst yaklaşımı ve alt kümesinin sınırını bulalım.

$$R_*(X) = \{x_1, x_3, x_4, x_9\}$$

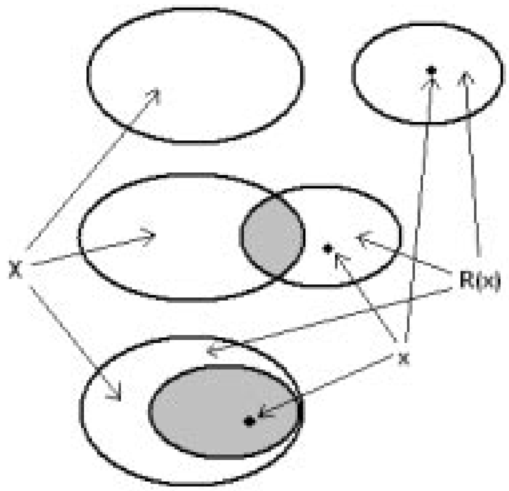
$$R^*(X) = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_8, x_9\}$$

$$RN_R(X) = R^*(X) - R_*(X) = \{x_5, x_8\}.$$

Yaklaşımlı kümeler yaklaşımlar yerine yaklaşımlı üyelik fonksiyonu $\mu_X^R : U \rightarrow [0,1]$ alınarak da tanımlanabilir. $|X|$, X in eleman sayısını göstermek üzere yaklaşımlı üyelik fonksiyonu

$$\mu_X^R(x) = \frac{|X \cap R(x)|}{|R(x)|}$$

şeklinde tanımlıdır. Yaklaşımlı üyelik fonksiyonu *x*'in *X*'e ait olmasının şartlı ihtimalini ve *R* tarafından *x* hakkında verilen bilgi göz önünde tutularak *x*'in *X*'e ait olma derecesini açıklar. Bu Şekil 2'de açık bir biçimde gösterilmiştir.



Şekil 2:

Burada

$X \cap R(x) = \Phi$ olması halinde $\mu_X^R(x) = 0$

$X \cap R(x) \neq \Phi$ olması halinde $0 < \mu_X^R(x) < 1$

$R(x) \subseteq X$ olması halinde $\mu_X^R(x) = 1$

olur. Yaklaşımlı üyelik fonksiyonu, yaklaşımları ve bir kümenin sınır bölgesini tanımlamak için

$$R_*(X) = \{x \in U : \mu_X^R(x) = 1\},$$

$$R^*(X) = \{x \in U : \mu_X^R(x) > 0\},$$

$$RN_R(X) = \{x \in U : 0 < \mu_X^R(x) < 1\}$$

şeklinde kullanılır. Örnek 6 nın verileri kullanılarak X in her bir elemanının üyelik değerleri hesaplanabilir.

$$\mu_X^R(x_1) = \mu_X^R(x_3) = \mu_X^R(x_9) = 1$$

$$\mu_X^R(x_2) = \mu_X^R(x_7) = \mu_X^R(x_{10}) = 0$$

$$\mu_X^R(x_4) = 1$$

$$\mu_X^R(x_5) = \mu_X^R(x_8) = \frac{1}{2}$$

$$\mu_X^R(x_6) = 0$$

Buna göre üyelik fonksiyonu yardımıyla da

$$R_*(X) = \{x_1, x_3, x_4, x_9\}$$

$$R^*(X) = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_8, x_9\}$$

$$RN_R(X) = \{x_5, x_8\}$$

olduğu görülür.

Üyelik fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlar:

1. $\mu_X^R(x) = 1 \Leftrightarrow x \in R_*(X)$
2. $\mu_X^R(x) = 0 \Leftrightarrow x \in U - R^*(X)$
3. $0 < \mu_X^R(x) < 1 \Leftrightarrow x \in RN_R(X)$
4. $\mu_{U-X}^R(x) = 1 - \mu_X^R(x), \qquad x \in U$
5. $\mu_{X \cup Y}^R(x) \geq \max\{\mu_X^R(x), \mu_Y^R(x)\}, \quad x \in U$
6. $\mu_{X \cap Y}^R(x) \leq \min\{\mu_X^R(x), \mu_Y^R(x)\}, \quad x \in U$

Yukarda ki özelliklerden yaklaşımlı üyelik ile bulanık üyeliğin birbirinden farklı oldukları görülür. Yaklaşımlı kümelerde, bulanık kümelerde olduğu gibi birleşim ve kesişim kümelerinin üyelikleri hesaplanamaz. Görünürde yaklaşımlı üyelik bulanık üyeliğin daha genel bir halidir. Bulanık üyelik fonksiyonunun aksine, yaklaşımlı üyelik fonksiyonunda bir ihtimal vardır.

Yaklaşımlı kümeler için aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 7: U evrensel küme ve R, U üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. (U, R) ikilisine **yaklaşımlı uzay** ve $R(X) = (R_*(X), R_*(X))$ ikilisine de (U,R) ikilisinin **yaklaşımlı kümesi** denir.

Tanım 8. *U* boştan farklı sonlu bir küme olarak verilsin. *R*, *U* üzerinde bir bulanık bağıntı ve *A*, *U* nun bir bulanık alt kümesi olsun.

$$R^*(A)(x) = \bigvee_{u\in U} \big(R(u,x) \wedge A(u)\big), \quad x \in U$$

$$R_*(A)(x) = \bigwedge_{u\in U} ((1-R(u,x)) \vee A(u)), \quad x \in U$$

ile tanımlanan bulanık kümelerine sırasıyla *A* nın **alt ve üst yaklaşımı** denir. $(R_*(A), R^*(A))$ ikilisine de *U* üzerinde bir bulanık yaklaşımlı küme denir.

Tanım 9. $\overline{F}$, I^U dan I^U ya tanımlı bir operatör olsun. Eğer $\overline{F}$ aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\overline{F}$ operatörüne *U* üzerinde bir **bulanık min-üst yaklaşımlı** operatör denir. Her $\mu \in I^U$, $(\forall j \in J,\ \mu_j \in I^U)$, $x, y \in U$ ve her $\alpha \in I$ için

(i) $\overline{F}\mu \geq \mu$,

(ii) $\overline{F}\,\overline{F}\mu = \overline{F}\mu$,

(iii) $\overline{F}(\bigvee_{j\in J} \mu_j) = \bigvee_j \overline{F}\mu_j$,

(iv) $\overline{F}(1_x)(y) = \overline{F}(1_y)(x)$,

(v) $\overline{F}(\alpha \wedge \mu) = \alpha \wedge \overline{F}\mu$

Bu şekilde tanımlı tüm operatörlerin kümesi F^* ile gösterilir.

4. Bulanık Kümelerin Alt ve Üst Yaklaşımları

Bu bölümde, bulanık normal alt grupların çarpımına göre bulanık kümelerinin üst yaklaşımları tanımlanacak ve bazı özellikleri verilecektir.

G bir grup, *A* ve *B* de *G* nin iki bulanık normal alt grubu olsun. *G* üzerinde bir $R_{A\times B}$ bulanık bağıntısını

$$R_{A\times B}(x,y) = (A\times B)(xy^{-1}, yx^{-1})$$

şeklinde tanımlayalım. Buna göre aşağıdaki önermeler geçerlidir.

Önerme 10. *G* üzerinde $R_{A\times B}(x,y) = (A\times B)(xy^{-1}, yx^{-1})$ eşitliği ile tanımlanan $_{A\times B}$ bulanık bağıntısı bir benzerlik bağıntısıdır.

İspat. İspat için Tanım 2 nin şartlarının sağlandığını gösterelim.

(i) Her $x \in G$ için $R_{A\times B}(x,x) = (A\times B)(xx^{-1}, xx^{-1}) = A\times B(e,e) = A(e) \wedge B(e) = 1$ olduğundan $R_{A\times B}$ yansıyandır.

(ii) A ve B nin bulanık normal oldukları da kullanılarak , her $x, y \in G$ için

$$R_{A\times B}(x,y) = A\times B(xy^{-1}, yx^{-1}) = A(xy^{-1}) \wedge B(yx^{-1}) = A(yx^{-1}) \wedge B(xy^{-1})$$

$$= A\times B(yx^{-1}, xy^{-1}) = R_{A\times B}(y,x)$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan $R_{A\times B}$ bağıntısı simetriktir.

(iii) Yine A ve B nin bulanık normal oldukları kullanılarak her $x,y,z \in G$ için

$$R_{A\times B}(z,y) = A\times B(zy^{-1}, yz^{-1})$$

$$A(zy^{-1}) \wedge B(yz^{-1}) = A(zx^{-1}xy^{-1}) \wedge B(yx^{-1}xz^{-1})$$

$$\geq A(zx^{-1}) \wedge A(xy^{-1}) \wedge B(yx^{-1}) \wedge B(xz^{-1})$$

$$= A\times B(zx^{-1}, xz^{-1}) \wedge A\times B(xy^{-1}, yx^{-1})$$

$$= R_{A\times B}(x,z) \wedge R_{A\times B}(x,y)$$

eşitliklerinden $R_{A\times B}$ nin geçişmeli olduğu görülür. $R_{A\times B}$ bağıntısı Tanım 2 nin şartlarını sağladığından G üzerinde bir benzerlik bağıntısıdır.

Yukarda ki önermede tanımlanan $R_{A\times B}$ benzerlik bağıntısına göre I^G üzerinde $\overline{F}_{R_{A\times B}}$, üst yaklaşım operatörünü tanımlayabılırız.

Önerme 11. I^G (I^G den I^G ye) üzerinde her $\mu \in I^G$; her $x \in G$ için

$$F_{R_{A\times B}}\mu(x) = \sup_{u\in G}(R_{A\times B}(u,x) \wedge \mu(u))$$

ile $F_{R_{A\times B}}$, operatörü tanımlansın. $F_{R_{A\times B}}$, bir üst yaklaşımlı operatörüdür.

İspat. Her $j \in J$, $x, y \in G$ ve $\alpha \in I$ için $\mu \in I^G$, $\mu_j \in I^G$ olsun. Tanım 9 un şartlarının sağlandığını gösterelim.

(i) $\overline{F}_{R_{A\times B}}\mu(x) \geq R_{A\times B}(x,x) \wedge \mu(x) = \mu(x)$ dir. Yani $\overline{F}_{R_{A\times B}}\mu \geq \mu$.

(ii) $$\overline{F}_{R_{A\times B}}\overline{F}_{R_{A\times B}}\mu(x) = \sup_{u\in G}(R_{A\times B}(u,x) \wedge \overline{F}_{R_{A\times B}}\mu(u)$$

$$= \sup_{u\in G}(R_{A\times B}(u,x) \wedge \sup_{v\in G}(R_{A\times B}(v,u) \wedge \mu(v)))$$

$$= \bigvee_{u\in G}\bigvee_{v\in G}(R_{A\times B}(u,x) \wedge R_{A\times B}(v,u) \wedge \mu(v))$$

$$\leq \bigvee_{v\in G}(R_{A\times B}(x,v) \wedge \mu(v)) = \overline{F}_{R_{A\times B}}\mu(x)$$

(iii) $\overline{F}_{R_{A\times B}}(\underset{j\in J}{\vee}\mu_j)(x) = \underset{u\in G}{\vee}(R_{A\times B}(u,x) \wedge \underset{j\in J}{\vee}\mu_j(u))$

$$= \underset{u\in G}{\vee}\ \underset{j\in J}{\vee}(R_{A\times B}(u,x) \wedge \mu_j(u))$$

$$= \underset{j}{\vee}\underset{u}{\vee}(R_{A\times B}(u,x) \wedge \mu_j(u))$$

$$= \underset{j}{\vee}\overline{F}_{R_{A\times B}}\mu_j(x).$$

Yani $\overline{F}_{R_{A\times B}}(\underset{j\in J}{\vee}\mu_j) = \underset{j}{\vee}\overline{F}_{R_{A\times B}}\mu_j$.

(iv) $\overline{F}_{R_{A\times B}}(1_x)(y) = \sup_{u\in G}(R_{A\times B}(u,x) \wedge 1_x(u))$

$$= R_{A\times B}(x,y)$$

$R_{A\times B}$ nin simetrikliğinden $\overline{F}_{R_{A\times B}}(1_x)(y) = \overline{F}_{R_{A\times B}}(1_y)(x)$ eşitliği elde edilir.

(v) $\overline{F}_{R_{A\times B}}(\alpha \wedge \mu)(x) = \underset{u}{\vee}(R_{A\times B}(u,x) \wedge (\alpha \wedge \mu(u)))$

$$= \alpha \wedge (\underset{u}{\vee}(R_{A\times B}(u,x) \wedge \mu(u)))$$

$$= \alpha \wedge \overline{F}_{R_{A\times B}}\mu(x)$$

O halde $\overline{F}_{R_{A\times B}}$, I^G üzerinde bir bulanık min-üst yaklaşımlı operatörüdür.

Önerme 12. *A* ve *B* bir *G* grubunun iki bulanık normal altgrubu ve $\mu \in I^G$ olsun. Bu takdirde $\overline{F}_{R_{A\times B}}\mu = \overline{F}_{R_A}\mu \wedge \overline{F}_{R_B}\mu$ eşitliği sağlanır.

İspat Her $x \in G$ için

$$\overline{F}_{R_{A\times B}}\mu(x) = \sup_{u\in G}(R_{A\times B}(u,x) \wedge \mu(u))$$

$$= \sup_{u\in G}((A\times B)(ux^{-1}, xu^{-1}) \wedge \mu(u))$$

$$= \sup_{u\in G}(A(ux^{-1}) \wedge B(xu^{-1}) \wedge \mu(u))$$

$$= \sup_{u\in G}((A(ux^{-1}) \wedge \mu(u)) \wedge (B(xu^{-1}) \wedge \mu(u)))$$

$$= \sup_{u \in G} (A(ux^{-1}) \wedge \mu(u)) \wedge \sup_{u \in G} (B(xu^{-1}) \wedge \mu(u))$$

$$= \sup_{u \in G} (R_A(u,x), \mu(u)) \wedge \sup_{u \in G} (R_B(u,x) \wedge \mu(u))$$

$$= \overline{F}_{R_A} \mu(x) \wedge \overline{F}_{R_B} \mu(x)$$

eşitliklerinden istenen elde edilir.

Önerme 13. *A* ve*B* bir grubunun iki bulanık normal altgrubu ve $\mu, \nu \in I^G$ olsun. Bu takdirde $\overline{F}_{R_{A\times B}} \mu \circ \overline{F}_{R_{A\times B}} \nu = \overline{F}_{R_A} (\mu \circ \nu) \wedge \overline{F}_{R_B} (\mu \circ \nu)$ eşitliği sağlanır.

İspat *A* ve *B* normal olduğundan ve $A \times B \circ \mu = \mu \circ A \times B$ ve $A \times B \circ A \times B = A \times B$ eşitlikleri yazılabilir. Buna göre

$$\begin{aligned} \overline{F}_{R_{A\times B}} \mu \circ \overline{F}_{R_{A\times B}} \nu &= \overline{F}_{R_A} \mu \times \overline{F}_{R_B} \mu \circ \overline{F}_{R_B} \nu \times \overline{F}_{R_B} \nu \\ &= (A \circ \mu) \times (B \circ \mu) \circ (A \circ \nu) \times (B \circ \nu) \\ &= (A \times B) \circ \mu \circ (A \times B) \circ \nu \\ &= (A \times B) \circ (\mu \circ \nu) = \overline{F}_{R_{A\times B}} (\mu \circ \nu) \\ &= \overline{F}_{R_A} (\mu \circ \nu) \times \overline{F}_{R_B} (\mu \circ \nu) \end{aligned}$$

eşitliklerinden istenen elde edilir.

5. Sonuç

Bulanık kümeler ve yaklaşımlı kümeler, sosyal bilimlerden fen bilimlerine kadar bütün bilim dallarında yoğun olarak uygulama alanı bulmaktadır. Bu nedenle bu konuların tanıtılması ve üzerinde çalışmalar yapılması önemlidir. Bu çalışmada öncelikle bulanık kümeler ve yaklaşımlı kümeler kavramları ve bunların özellikleri üzerinde çalışılmıştır. Bulanık normal alt grupların direkt çarpımına göre bulanık üst yaklaşımı tanımlanmış ve bazı özellikleri verilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Bonikowaski, Z., **Algebraic structures of rough sets, Rough sets, Fuzzy sets and Knowledge Discovery**, Springer-Verlag, Berlin(1995)

[2] Bismas B., Nanda S., **Rough groups and rough subgroups**, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 42(1994) 251-254.

[3] Dubois, D. and Prade H., **Editorial**, Fuzzy Sets and Syst. 122 (2001) 1-3.

[4] Dubois, D. and Prade, H., **Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications**, Academic Press, New York. (1980).

[5] Iwinski, T., **Algebraic approach to rough sets**, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 35 (1987) 673-683.

[6] Jiashang, J., Congxin, W. and Degang, C., **The product structure of fuzzy rough sets on a group and the rough T- fuzzy group**, Information Science,(Baskıda)(2004)

[7] Kaufmann, A. and Gupta, M.M., **Introduction to Fuzzy Arithmetic Theory and Applications**, Van Nostrand Rienhold, New York(1991).

[8] Klir, J. G, and Folger, T. A., **Fuzzy Sets, And Information**, New Jersey(1988).

[9] Kumar, R., **Fuzzy Algebra I**, University of Delhi, Publ. Division(1993).

[10] Kuroki, N., **Rough ideals in semigroups**, Inform. Sci. 100 (1997) 139-163.

[11] Kuroki, N., Nang P. P., **The lower and upper approximations in fuzzy group**, Inform. Sci., 90(1996) 203-220.

[12] Kuroki, N., Mordeson J. N., **Structure of rough sets and rough groups**, J. Fuzzy Math., 5(1) (1997) 183-191.

[13] Maji P.K., Biswas R. and Roy A.R., **Soft set theory**, Computers and Mathematics with Applications 45(2003) 555-562.

[14] Molodtsov, D., **Soft set theory-first results**, Computers Malath. Applic. 37 (1999) 19-31.

[15] Morsi, N.N. and Yakout, M.M., **Axiomatics for fuzzy rough sets**, Fuzzy Sets and Systems, 100, 327-342(1998).

[16] Pawlak, Z., **Rough sets**, Int. J. of Information and Computer Sciences, 11, 5, 341-356 (1982).

[17] Pomykala, J. and Pomykala, J.A., **The stone algebra of rough sets**, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 36 (1988) 495-508.

[18] Wakczak B., Massart D. L., **Rough set theory**, Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems, 47(1999) 1-16.

[19] Zadeh, L., **Fuzzy sets**, Information and Control, 8, 338-353(1965).

[20] Zimmermann, H.J., **Fuzzy Set Theory and Its Applications**, Kluwer (1991).