



DÖRT DAİRESEL BOŞLUKLA ZAYIFLATILMIŞ SİLİNDİRİK ÇUBUĞUN BURULMASI

Elçin AĞACANOV* - Murat Fazıl AKKOÇ**

ÖZET

Bu çalışmada matematiksel modeli yapılmış bir burulma problemi araştırılmıştır. Bu problem bir holomorfik fonksiyon kullanılarak çözülmüştür. Bu fonksiyon belli sınır şartlarını sağlıyor.

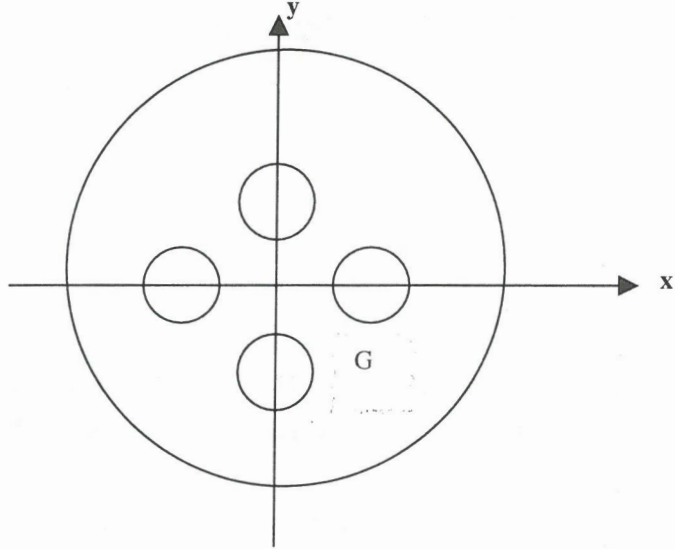
İki örnek incelenmiş ve teğetsel gerilme eğrileri çizilmiştir.

1.GİRİŞ

Kütle kuvvetlerinin etkisine maruz kalmıyan ve yanal yüzeyinde de dış kuvvetler bulunmayan silindirik çubuğun burulması problemini alalım. Çubuk, kendi eksenine paralel eksenli dairesel boşlukla zayıflatılmıştır. Çubuğun eksenine dik kesiti dıştan c_0 eğrisi, içten c_1, c_2, c_3, c_4 , eğrileriyle sınırlıdır. c_0 eğrisi merkezi orijinde yarıçapı R_0 olan bir çember biçiminde olsun. c_1, c_2, c_3, c_4 , eğrileri ise çember biçiminde olup sırasıyla merkezleri z_1, z_2, z_3, z_4 , noktalarında yarıçapları ise R_1, R_2, R_3, R_4 , olsun.

* D.P.Ü. Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

** D.P.Ü. Altıntaş M.Y.O.



Şekil 1.

c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 , eğrilerinin sınırladığı bölge G olsun. Çubuk momenti bu çubuğun eksenini doğrultusunda olan, M şiddetinde bir kuvvet çifti ile burulmuştur.

2. BURULMA PROBLEMİNİN MATEMATİKSEL KONUMU

Burulma problemi integral denklemler metodu [Rubençık, 1980], varyasyon metodu [Gonçaryuk, 1987], kompleks değişkenler teorisinin uygulandığı metot [Muskhelishvili, 1968], yardımıyla çözülebilir. Sonuncu metot [Amanzade, 1976], kitabında geniş olarak incelenmiştir. [Elçin, 1998]'nin makalesinde de bir uygulaması ele alınmıştır.

Bu çalışmada ele alınan burulma problemi Muskhelishvili tarafından geliştirilmiş olan metotla çözülmektedir. Şimdi de problemin çözümüne geçelim.

Bu burulma probleminin çözümü,

$$\varphi(t) + \overline{\varphi(\bar{t})} = t \cdot \bar{t} + k_j \quad (c_j \text{ üzerinde}) \quad (1)$$

sınır şartını sağlayacak şekilde G bölgesinde holomorfik olan $\varphi(z)$ fonksiyonun bulunması problemine dönüşüyor. Burada $j=0,1,2,3,4$ dir. Burulma probleminde bilinmeyen gerilme bileşenlerinin X_z ve Y_z teğetsel gerilmeler olduğu bilinmektedir.

k_0, k_1, k_2, k_3, k_4 'lar henüz bilinmeyen sabitlerdir. Fakat bu sabitlerden birisi keyfi seçilebilir.

Bu teğetsel gerilmeler ve henüz bilinmeyen holomorfik $\varphi(z)$ fonksiyonu arasında,

$$X_z - iY_z = i\mu \frac{M}{D} \left[\varphi(z) - \bar{z} \right] \quad (2)$$

bağıntısının varlığı bilinmektedir, [Muskhelishvili, 1968]. Burada μ kayma modülü, D ise burulma rijidliğidir. Burulma rijidliği,

$$D = \mu \left\{ I_0 - \frac{i}{4} \sum_{j=0}^4 \int_{c_j} \left[\varphi(t) - \bar{\varphi}(t) \right] d \left(t \bar{t} \right) \right\} \quad (3)$$

formülü ile bulunabilir, [Muskhelishvili, 1968]. Burada, I_0 eylemsizlik momentidir. İntegrallleme ise bütün, c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 çemberleri üzerine yapılmaktadır. Bu takdirde, eğrilerin pozitif yönü olarak öyle yön de, kabul ediliyor ki bu yön, hareket zamanı, G bölgesi her zaman eğrinin sağ tarafında olsun. Eylemsizlik momenti,

$$I_0 = \int_G \left(t \bar{t} \right) d\omega \quad (4)$$

formülü ile bulunuyor, [Muskhelishvili, 1968]. Burada $d\omega$ alan elemanıdır. Teğetsel gerilme şiddeti τ_z ,

$$\tau_z = \sqrt{X_z^2 + Y_z^2} \quad (5)$$

formülü ile bulunur, [Muskhelishvili, 1968].

3. $\varphi(z)$ HOLOMORFİK FONKSİYONUN BULUNMASI

Şimdide (1) sınır şartlarını sağlayan holomorfik $\varphi(z)$ fonksiyonunun bulunması problemine bakalım, L_0 egrisi üzerinde her $t \in L_0$ için $t \bar{t} = R_0^2$ olduğundan dolayı da $k_0 = -R_0^2$ kabul edelim. Bu takdirde (1) sınır şartlarını,

$$\varphi(t) + \bar{\varphi}(t) = 0 \quad t \in L_0 \quad (6)$$

$$\varphi(t) + \bar{\varphi}(t) = t \bar{t} + k_j \quad (j=1,2,3,4) \quad (7)$$

şeklinde yazabiliriz. (2)' den görüldüğü gibi gerçel gerilme dağılımına k_1, k_2, k_3, k_4 , sabitlerinin etkisi yoktur. Fakat dönme sırasında ortaya çıkan yer değiştirmenin

tek değerli bir fonksiyon olması açısından bu sabitler keyfi olmamaktadır. $j=1,2,3,4$, olmak üzere c_j üzerinde \bar{t} 'nin ifadesi,

$$\bar{t} = R_j^2 + z_j \bar{z}_j + R_j \left[z_j \frac{t - z_j}{R_j} + z_j \frac{R_j}{t - z_j} \right] \quad (8)$$

olacaktır. Böylece (7) sınır şartı,

$$\varphi(t) + \bar{\varphi}(t) = R_j^2 + z_j \bar{z}_j + R_j \left[z_j \frac{t - z_j}{R_j} + z_j \frac{R_j}{t - z_j} \right] + k_j \quad (7')$$

şeklinde yazılabilecektir. Burada, $t \in c_j$ dir. (6) ve (7) sınır şartlarını sağlayan $\varphi(z)$ fonksiyonu,

$$\begin{aligned} \varphi(z) = & \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{z}{R_0} \right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_{1k} \left(\frac{R_1}{z - z_1} \right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k} \left(\frac{R_2}{z - z_2} \right)^k + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} b_{3k} \left(\frac{R_3}{z - z_3} \right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_{4k} \left(\frac{R_4}{z - z_4} \right)^k \end{aligned} \quad (9)$$

şeklinde bulalım. (9)' un sağ tarafındaki , 1. seri c_0 eğrisinin içersinde, 2. seri c_1 eğrisinin dışında, 3. seri c_2 eğrisinin dışında, 4. seri c_3 eğrisinin dışında, 5. seri yine c_4 eğrisinin dışında holomorf olacaklardır.

$a_k, b_{1k}, b_{2k}, b_{3k}, b_{4k}$ bilinmeyen katsayıları genelde karmaşık sayılardır.

$\varphi(z)$ fonksiyonunun c_0, c_1, c_2, c_3 , ve c_4 , eğrileri üzerindeki değerini bulup (6) ve (7') sınır şartlarında yerine yazarak uygun kuvvet terimlerine göre kıyaslama yaparsak c_0 eğrisindeki sınır şartlarına göre,

$$\bar{a}_v + \sum_{j=1}^4 B_{jv} = 0 \quad v = (1,2,3,\dots) \quad (10)$$

$$\bar{a}_0 + a_0 = 0 \quad (10')$$

ve $i=1,2,3,4$ olmak üzere c_i eğrisi üzerindeki sınır şartlarına göre,

$$A_{iv} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 B_{ijv}^* + \bar{b}_{iv} = R_i \bar{z}_{iv} \varepsilon(v) \quad (v=1,2,3,\dots) \quad (11)$$

$$A_{i0} + \sum_{j=1}^4 B_{ij0}^* + \bar{A}_{i0} + \sum_{j=1}^4 \bar{B}_{ij0} = k_i + R_i^2 + z_i \bar{z}_i \quad (i \neq j) \quad (11')$$

denklemlerini elde ederiz. Burada aşağıdaki notasyonlar kullanılmıştır.

$$A_{iv} = \sum_{k=v}^{\infty} \left(\frac{R_i}{R_0} \right)^k C_k^v \left(\frac{z_i}{R_i} \right)^{k-v} a_k \quad (12)$$

$$\bar{A}_{iv} = \sum_{k=v}^{\infty} \left(\frac{R_i}{R_0} \right)^k C_k^v \left(\frac{\bar{z}_i}{R_i} \right)^{k-v} \bar{a}_k \quad (13)$$

$$B_{ijv}^* = \sum_{k=1}^{\infty} b_{jk} C_{-k}^v \left(\frac{R_j}{R_i} \right)^k \left(\frac{R_i}{z_i - z_j} \right)^{k+v} \quad (i \neq j) \quad (14)$$

$$\bar{B}_{ijv}^* = \sum_{k=1}^{\infty} b_{jk} C_{-k}^v \left(\frac{R_j}{R_i} \right)^k \left(\frac{R_i}{\bar{z}_i - \bar{z}_j} \right)^{k+v} \quad (i \neq j) \quad (15)$$

$$\varepsilon(v) = \begin{cases} 1, & \text{eğer, } v = 1 \text{ ise} \\ 0, & \text{eğer, } v \neq 1 \text{ ise} \end{cases} \quad (16)$$

Elastisite teorisinin esas probleminin çözümünün varlığı ve tekliği hakkında ki teoreme göre (10) ve (11) şeklinde 5 tane sonsuz denklemler sisteminin çözümü mevcuttur, tektir ve sınırlıdır, [Muskhelishvili,1968]. Her bir sonsuz denklemler sisteminden sonlu sayıda denklemler sistemi ayırarak (10) ve (11)' in tahmini çözümü bulunabilir. Ele alınacak denklem sayısı gereken hassasiyete bağlı olarak tespit edilebilir.

4. ÖRNEKLER

Bakılan problemin sayısal çözümünü bulmak için iki örneğe bakılmıştır.

$$a) \quad z_1 = 0,5R_0, \quad z_2 = 0,5iR_0, \quad z_3 = 0,5R_0, \quad z_4 = -0,5iR_0$$

$$R_1 = R_3 = 0,2R_0, \quad R_2 = R_4 = 0,1R_0$$

$$b) \quad z_1 = 0,5R_0, \quad z_2 = 0,5iR_0, \quad z_3 = -0,5R_0$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 0,1R_0$$

Bu problemlere karşılık gelen çözümler 5.bölümde **Tablo-1** ve **Tablo-2'** de verilmiştir. Teğetsel gerilme bileşenlerinin dağılımı 6.bölüm Şekil 2. ve Şekil 3.' de verilmiştir. Bu bileşenlerin simetrik özelliğe sahip olmasından dolayı Şekil 2. ve Şekil 3.'deki eğrinin koordinat sisteminin 3. Bölgesinde kalan kısmı çizilmemiştir.

5. TABLOLAR

Tablo -1-

t	$X_z / \left(\frac{\mu.M.R_0}{D} \right)$	$y_z / \left(\frac{\mu.M.R_0}{D} \right)$	$T_z / \left(\frac{\mu.M.R_0}{D} \right)$
R_0	0	1,12920	1,12920
$R_{0\exp}(\pi.i/12)$	-0,27807	1,03685	1,07349
$R_{0\exp}(\pi.i/6)$	-0,49571	0,85963	0,99232
$R_{0\exp}(\pi.i/4)$	-0,67783	0,67698	0,958
$R_{0\exp}(\pi.i/3)$	-0,82598	0,47748	0,95406
$R_{0\exp}(5\pi.i/12)$	-0,93484	0,25013	0,96772
$i.R_0$	-0,97997	0	0,97997
$R_{0\exp}(7\pi.i/12)$	-0,93484	0,25005	0,96771
$R_{0\exp}(2\pi.i/3)$	0,82598	-0,47748	0,95406
$R_{0\exp}(3\pi.i/4)$	-0,67782	-0,6769	0,95793
$R_{0\exp}(5\pi.i/6)$	-0,49571	-0,8596	0,99226
$R_{0\exp}(11\pi.i/12)$	-0,27808	-1,0382	1,07346
$-R_0$	0	-1,1920	1,12920
$R_{0\exp}(13\pi.i/12)$	0,27800	-1,3685	1,07347

$R_0 \exp(7\pi.i/6)$	0,49571	-185956	0,99226
$R_0 \exp(5\pi.i/4)$	0,67775	-0,67689	0,95788
$R_0 \exp(4\pi.i/3)$	0,82592	0,47748	0,95401
$R_0 \exp(17\pi.i/12)$	0,93481	-0,25005	0,96768
$-i.R_0$	0,97997	0	0,97997
$R_0 \exp(19\pi.i/12)$	0,93481	0,25013	0,96770
$R_0 \exp(5\pi.i/3)$	0,82592	0,47748	0,95401
$R_0 \exp(7\pi.i/4)$	0,67775	0,67698	0,95794
$R_0 \exp(11\pi.i/6)$	0,49571	0,85963	0,99232
$R_0 \exp$ $(23\pi.i/12)$	0,27799	1,03688	1,07350
$\frac{1}{2}(z_1 + R_1 + R_0)$	0	1,03916	1,03916
$z_1 + R_1$	0	1,21488	1,21488
$z_1 - R_1$	0	0,71828	0,71828
$\frac{1}{2}(z_1 - R_1)$	0	0,24665	0,24665
$-\frac{1}{2}(z_1 - R_1)$	0	-0,24665	0,24665
$-(z_1 - R_1)$	0	-0,71828	0,71828
$-(z_1 - R_1)$	0	-1,21488	1,21488
$-(z_1 + R_1 + R_0)$	0	-1,03916	1,03916
$\frac{1}{2}(z_2 + iR_2 + R_0 i)$	-0,79058	0	0,79058
$z_2 + R_2 i$	-0,94195	0	0,91495
$z_2 - R_2 i$	-0,68691	0	0,68691
$\frac{1}{2}(z_2 - R_2 i)$	-0,1407	0	0,14075
0	0	0	0

$\frac{1}{2} (z_2 - R_2 i)$	0,14075	0	0,14075
$-(z_2 - i R_2)$	0,68691	0	0,68961
$-(z_2 + i R_2)$	0,74195	0	0,94195
$\frac{1}{2} (z_2 + R_2 i + R_0 i)$	0,79058	0	0,79058

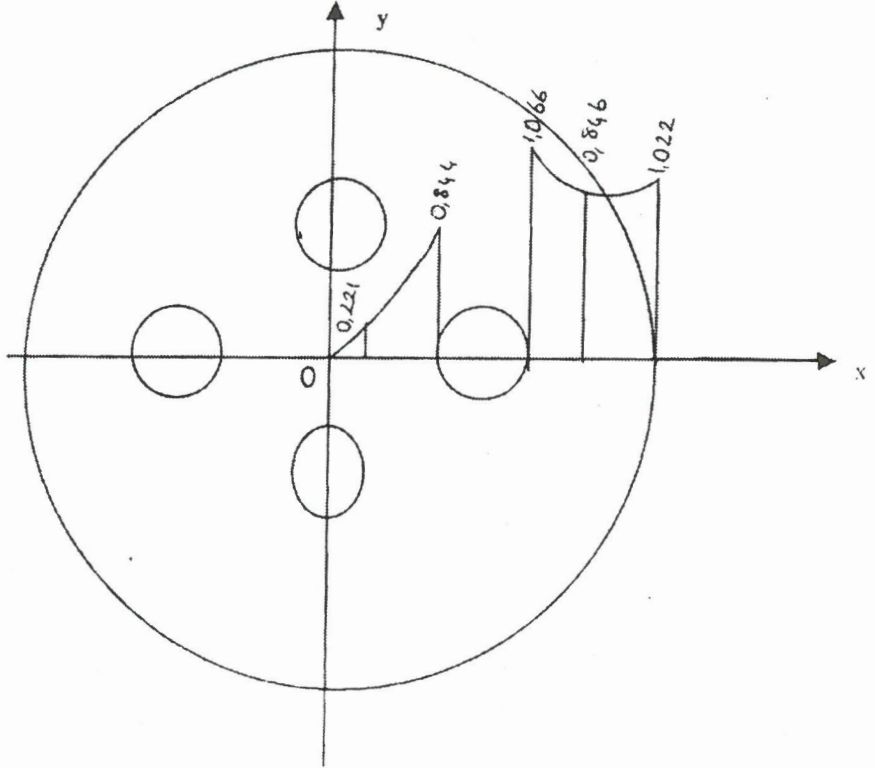
Tablo-2-

t	$X_z / \left(\frac{\mu.M.R_0}{D} \right)$	$y_z / \left(\frac{\mu.M.R_0}{D} \right)$	$T_z / \left(\frac{\mu.M.R_0}{D} \right)$
R_0	0	1,02169	1,02169
$R_0 \exp(\pi.i/6)$	-0,49467	0,85675	0,9893
$R_0 \exp(\pi.i/3)$	-0,85675	0,49467	0,9893
$i.R_0$	-1,02169	0	1,02169
$0,9R_0$	0	0,92740	0,92740
$0,8R_0$	0	0,84594	0,84594
$0,7R_0$	0	0,80790	0,80790
$0,6R_0$	0	1,06556	1,06556
$0,4R_0$	0	0,84410	0,84410
$0,3R_0$	0	0,38675	0,38675
$0,2R_0$	0	0,22055	0,22055
$0,1R_0$	0	0,10245	0,10245
0	0	0	0
$z_1 + R_1 \exp(\pi.i/6)$	-0,46612	0,80747	0,932
$z_1 + R_1 \exp(\pi.i/3)$	-0,49539	0,286	0,572
$z_1 + i.R_1$	-0,089	0	0,089
$z_1 + R_1 \exp(2\pi.i/3)$	0,3315	0,18138	0,383
$z_1 + R_1 \exp(5\pi.i/6)$	0,36069	0,62454	0,721

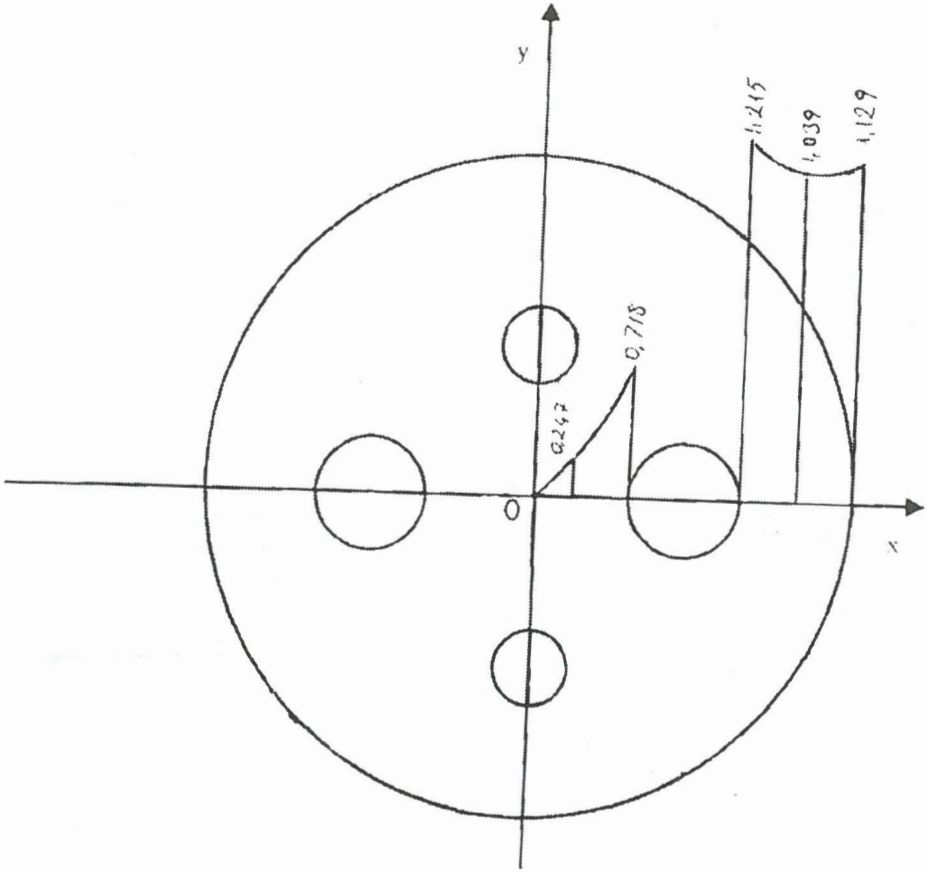
6. TEĞETSEL GERİLME BİLEŞENLERİNİN DAĞILIM EĞRİLERİ

Teğetsel eğrilerin dağılım eğrilerini göstermek için esas bileşen olan Y_z bileşeninin

$\left(\frac{\mu.M.R_0}{D}\right)$ ifadesi ile çarpımı y -ekseninde gösterilmiştir. Örnek a)' ya karşılık gelen sonuçlar Şekil 2.'de, Örnek b)' ye karşılık gelen sonuçlarda Şekil 3.' de verilmiştir.



Şekil 2.



Sekil 3.

YARARLANILAN KAYNAKLAR

- Amanzade, Y.A., Elastisite Teorisi, Nauka Yayınevi 1976, 227p.
- Elçin, A., Elşat, H., **Kompleks Değişkenler Teorisi İle Bir Burulma Probleminin Çözümü.**, II. Kızılırmak Uluslararası Fen Bilimleri Kongresi, 1998, 20-22 Mayıs, 292-298p.
- Gonçaryuk, İ.V., Gorbi, M.İ., **Prizmatik Çubuğun Burulması Probleminin Bublon-Galerkin ve Steepest Descent Metodlarıyla Çözümlerinin Hassasiyetinin ve Uygulanabilirliğinin Mukayeseli Analizi Şekil Değiştiren Sert Cisim Mekaniği**, Charkhlov, 1987 47-53p
- Muskhelishvili, N.İ., **Matematik Esneklik Teorisinin Bazı Temel Problemleri**. Moskova, 1968.
- Rubençik, V.Y., Supin, V.V., **Bir Bağlantılı ve Çok Bağlantılı Dik Enine Kesite Sahip Kirişlerin Burulması Probleminin İntegral Denklemler Metoduyla Çözümü Üzerine Teorik ve Uygulamalı Mekanik** 1980, N 7, 72-74p