Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi
Sayı: 1 1999

FONKSİYONLARIN KONSTRUKTİV TEORİSİNİN DİREK PROBLEMLERİ ÜZERİNE

Ferhat NASİBOV* - Murat ALP*

1991. M.S.C.: 517.512:
Anahtar Kelimeler: *Konstruktiv, Approxime, Tam fonksiyon, Polinom, Norm.*

ÖZET

Bu makalede fonksiyonların Konstruktiv teorisinin direk problemleri ile ilgili birkaç genel teorem sunmanın yanı sıra, bu teoremler, yeteri derecede ispatlarındaki geçerlilik ve sonuçlarındaki kesinlik ile de farklılık göstermektedir. Bu veya diğer anlamlarda türeve sahip olan fonksiyonlar için, önceden verilmiş olan sonuçlar burada sunulmakta olan neticelerin özel durumları gibi çıkarılabilirler.

1. GİRİŞ

$L_p \equiv L_p(a,b)$ notasyonu ile $[a,b]$ kaoalı aralığında tanımlanmış olan ve

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, (p \geq 1) \qquad (1)$$

* Dumlupınar Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Kütahya-TÜRKİYE

koşulunu sağlayan f(t) fonksiyonlar uzayını, $L_p^* \equiv L_p(-\pi,\pi)$ (veya $L_p(0,2\pi)$) ile 2π-peryotlu ve L_p $(-\pi,\pi)$ uzayında bulunan fonksiyonlar uzayını, $L_p^R \equiv L_p(R) \equiv L_p(-\infty,\infty)$ ile de $R=(-\infty,\infty)$ reel ekseni üzerinde tanımlanan ve

$$\|f\|_{L_p} = \|f\|_p \equiv \{ \int_R |f(t)|^p dt \}^{\frac{1}{p}} < \infty, (p \geq 1) \tag{2}$$

koşulunu sağlayan f(t) fonksiyonlar uzayını gösterelim.

f(t) fonksiyonları $p=\infty$ olması durumunda sürekli kabul edilip ve normları $\max |f| = \|f\|_E$ şeklinde tanımlanır ve E olarak $C=C[a,b]$, $C^*=C^*[-\pi,\pi]$, $C_R=C(-\infty,\infty)$ uzaylarından birisi alınır. H_n notasyonu ile derecesi $\leq$ n olan

$$P_n(x)=a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

şeklindeki cebirsel polinomlar cümlesini ve T_n notasyonu ile de derecesi $\leq$ n olan

$$t_n(x)=a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$
$$= \sum_{-n}^{n} C_k e^{ikx}$$

şeklindeki trigonometrik polinomların uzaylarını göstermekteyiz. Bu tanımlardan da anlaşılacağı üzere;

$$H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n \subset \ldots, \text{ ve}$$

$$T_0 \subset T_1 \subset \ldots \subset T_n \subset \ldots$$

Son olarak, $w_{\sigma,p}$ ile de $\leq \sigma$ olan ve L_p^R uzayına ait olan fonksiyonlar uzayını işaret edelim.[1], [2], [9]

Bu uzaylarda fonksiyonların en iyi yaklaşım problemi çok fazla araştırılmasına rağmen bir çok zor problemler hala cevap bulamamıştır. Bu problemler sırasına ait olan bir problemde istenilen kadar genelleştirmeye sahip olmakla beraber elde edilmiş sonuçların net ve kesin olması problemidir. Bu makalede böyle nitelik problemi ile ilgili en iyi yaklaşma için ispatlanan sonuçların netlik problemleri incelenmektedir. Genellikle bizi ilgilendiren aşağıda sıralanan üç haldeki yaklaşımla ilgili direk problemlerdir.

1. Sonlu parçada tanımlanmış fonksiyonların $P_n(x) \in H_n$ cebirsel polinomlar yardımıyla en iyi yaklaşımı:

$$E_n(f)_p = \inf_{P_n \in H_n} \left\| f - P_n \right\|_p$$

$$= \inf_{P_n \in H_n} \{ \int_a^b \left| f(t) - P_n(t) \right|^p dt \}^{\frac{1}{p}}, p \geq 1$$

2. Peryodik fonksiyonların t_n (x)$\in T_n$ trigonometrik polinomlar yardımıyla en iyi yaklaşım:

$$E_n^*(f)_p = \inf_{t_n \in T_n} \left\| f - t_n \right\|_p$$

$$= \inf_{t_n \in T_n} \{ \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - t_n(x) \right|^p dx \}^{\frac{1}{p}}, p \geq 1;$$

3. R=$(-\infty,\infty)$ reel ekseni üzerinde tanımlanmış fonksiyonların $g_\sigma \in w_{\sigma,p}$ tam fonksiyonları yardımıyla en iyi yaklaşım:

$$A_\sigma(f)_p = \inf_{(g_\sigma)} \left\| f - g_\sigma \right\|_p$$

$$= \inf_{(g_\omega)} \{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) - g_\sigma(x) \right|^p dx \}^{\frac{1}{p}}, (p \geq 1, g_\sigma \in w_{\sigma,p}).$$

Her üç halde p=∞ olduğunda f(x) fonksiyonları sürekli kabul edilerek yaklaşım,

$$C[a,b], C^*[-\pi,\pi], C_R = C(-\infty,\infty)$$

metrik uzaylarında yapılır. Son zamanlarda yapılan araştırmalarımız yukarıda verilen durumların hepsi için aynı bir iddianın uygulanmasının mümkün olacağı sonucunu ortaya çıkarmıştır: Sadece iki fonksiyonun bükümü şeklinde gösterilen fonksiyonların en iyi yaklaşımı problemini araştırmaktır. Herhangi bir anlamda türevlenebilen fonksiyonlarda zaten büküm şeklinde gösterilmektedir [4], [5], [6].

2. PERYODİK FONKSİYONLARIN YAKLAŞIMI

Öncelikle periyotlu fonksiyonların yaklaşım problemlerini inceleyelim.

Teorem 2.1 2π periyotlu $\phi(t) \in L_p^*$ ve $K(t) \in L_q^*$ $(p,q \geq 1)$ fonksiyonları verildiğinde

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\phi(t)K(x-t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}(\phi * K)(t)$$

$$=\frac{1}{\pi}(K * \phi)(t) \qquad (3)$$

fonksiyonu için,

$$\left\|f(t)-U_n(f;t)\right\|_q \le \frac{1}{\pi}E_n^*(\phi)_p E_n^*(K)_q \qquad (4)$$

şartını sağlayabilen $\{U_n(f;x)\}$ trigonometrik polinomlar dizisi mevcuttur. Burada $\frac{1}{\tau}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1\ge 0; p,q\ge 1.$

Not 2.2 Görüldüğü gibi her bir $K(t)$ çekirdeği muhtelif $\phi(t)\in L_p$ fonksiyonuna göre bir $H^*=H^*(K)=\{f\}$

Fonksiyonlar sınıfını tanımlar . Zaten Teorem 2.1,her bir H^* sınıfının approksime hatasını değerle4ndirmeye imkan veriyor. Bu nedenle Teorem 2.1'den bir çok belli (aynı zamanda belli olmayan)sonuçlar özel hal olarak çıkarılabilir.

Sonuç 2.3 (1)'de gösterilen $\phi(t)\in L_p^*, K(t)\in L_q^*(p.q\ge 1)$ ise

$$E_n^*(f)_\tau \le \frac{C(m)}{\pi}\omega_m^*(\phi;\frac{\pi}{n})_p E_n^*(K)_q \qquad \textbf{(5)}$$

eşitsizliği doğrudur, burada C(m) m ile bağlı herhangi bir sabittir.

$\frac{1}{\tau}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1\ge 0$ ve

$$\omega_n^*(\phi;\delta)=\sup_{|t|\le\delta}\left\|\sum_{j=0}^{m}(-1)^j c_m^j\phi(x+jt)\right\|_p \qquad (6)$$

$\phi(t)\in L_p^*$ fonksiyonunun m mertebeden süreklilik modülüdür.

Sonuç 2.4 (1)'de gösterilen $\phi(t) \in L_p^*$, $K(t) \in L_1^*$ olursa,

$$E_n^*(f)_p \leq \|f - U_n\|_p \leq \frac{1}{\pi} E_n^*(\phi)_p E_n^*(K)_1 \qquad (7)$$

$$E_n^*(f)_p \leq \frac{C(m)}{\pi} w_m^*(\phi ; \frac{\pi}{n})_p E_n^*(K)_1 \qquad (8)$$

eşitsizlikleri doğrudur.

Sonuç 2.5 $f(t) \in L_p^*$ fonksiyonu $\tau \geq 0$ keyfi reel sayı olmak üzere τ inci mertebeden türeve sahip ve $f^{(\tau)}(t) \in L_p^*$ ise bu durumda,

$$\mathrm{E}_n^*(f)_p = o\{\frac{1}{n^\tau} w_m^*(f^{(\tau)}; \frac{\pi}{n})_p\} \qquad (9)$$

bağlantısı sağlanıyor.

Gerçekten de Teorem 2.1 de

$$K(t) = D_{\tau.\delta}(t)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} j^{-\tau} \cos(jt - \frac{\delta\pi}{2}) \in L_1^*$$

dersek bu durumda (1) formülü Weyl-Nikolski anlamında τ >0 mertebe türevi tanımlar ve $E_n^*(D_{\tau.\delta})_1 = O(\frac{1}{n^\tau})$ olduğu için Sonuç 2.4 den (9) eşitsizliği elde edilmiş olur ki bu da 1958 yılında A. F. Timan tarafından ispatlanmış [2] teoremidir. Sonuç 2.5 te $\tau \in N$ doğal sayı olarak alınırsa bu durumda D. Jackson teoremi ve onun muhtelif genelleşmesi elde edilmiş olur.

Not 2.6 Teorem 2.1 $L_p^* (1 \leq p \leq \infty)$ uzayını tamamen kapsamaktadır. Nitekim Zigmund-Salem-Rudin-Koern teoremine göre $L_p^* = L_p^* * L_1^*$ tır. [7].

Sonuç 2.7 Teorem 2.1 genellikle net olarak bir daha kesinleştirilemez. Weyl-Nikolski anlamında $f^{(s)}(x)$ türevi olan ve

vrai max $|f^{(s)}(x)| \leq 1$,(s>0)

koşulunu sağlayan 2π peryotlu f fonksiyonlar sınıfı M_s olursa, bu durumda,

$$E_n^*(M_s) = \sup_{f \in M_s} E_n^*(f)_c$$

$$= \frac{4}{\pi} \frac{\sin \frac{\pi s}{2}}{n^s} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^{s+1}}, (0 < s \leq 1) \quad (10)$$

$$E_n^*(M_s) = \frac{4}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} D_s(t) sign \sin(nt-\gamma) dt \right| = \frac{4}{\pi} E_n^*(D_s)_1$$

$$= \frac{4}{\pi n^s} \left| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin[(2m+1)\gamma - \frac{s\pi}{2}]}{(2m+1)^{s+1}} \right|, (s \geq 1) \quad (11)$$

formülleri doğrudur. Burada, $\gamma, \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos[(2m+1)\gamma - \frac{s\pi}{2}]}{(2m+1)^{s+1}} = 0$ denklemi-

nin köküdür. $(0 \leq \gamma < \pi)$.

İspat: $f^{(s)}(x)$ türevinin olması demek

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_s(x-t)\phi(t)dt, \phi(t) = f^{(s)}(t+\pi) \quad (12)$$

gösterimi doğrudur ve

$$D_s(t) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{\cos(mt - \frac{s\pi}{2})}{m^s}$$
$$= -D_{s,s}(t+\pi)$$

Bernoulli fonksiyonudur. Eğer Teorem 2.1 de $K(t) = D_s(t), q = 1$

dersek bu durumda $\tau = p = \infty$ olur ve Teorem 2.1 den

$$f \in C^*, \phi(t) = f^{(s)}(t+\pi) \in C^*, K(t) = D_s(t) \in L_1$$

koşulları ile tanımlanan M_s sınıfı için

$$E_n^*(f)_c \leq \frac{1}{\pi} E_n^*(D_s)_1 \, E_n^*(\phi)_c \leq \frac{1}{\pi} E_n^*(D_s)_1 \tag{13}$$

Öte yandan V. K. Dzyadık göstermiştir ki M_s sınıfı için $0<s\leq 1$ olduğunda

$$\begin{aligned} E_n^*(M_s)_c &= \sup_{f\in M_s} E_n^*(f)_c \\ &= \frac{4}{\pi} E_n^*(D_s)_1 \\ &= \frac{4}{\pi}\frac{\sin\frac{\pi s}{2}}{n^s}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^{s+1}} \end{aligned} \tag{14}$$

ve $s \geq 1$ olduğunda

$$\begin{aligned} E_n^*(M_s)_c &= \frac{4}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} D_s(t) sign \sin(nt-\gamma)dt\right| \\ &= \frac{4}{\pi} E_n^*(D_s)_1 \\ &= \frac{4}{\pi n^s}\left|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin[(2m+1)\gamma - \frac{s\pi}{2}]}{(2m+1)^{s+1}}\right| \end{aligned} \tag{15}$$

formülleri doğrudur. Burada γ sayısı $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos[(2m+1)\gamma - \frac{s\pi}{2}]}{(2m+1)^{s+1}} = 0$ denkleminin köküdür. $(0\leq \gamma < \pi)$.

Bu ise

1. V. K. Dzyadık Teoremi [8] nin bizim vermekte olduğumuz Teorem 2.1 in bir özel hali olmasıdır.

2. (13) eşitsizliği ve bu eşitsizlik ile beraber de (4) eşitsizliği daha kesinleştirilemez.

Bu ise sonuçta s=1 alınmakla (14) ve (15) eşitsizliklerinden sıra ile

$$E_n^*(M_1)_c = \frac{4}{\pi}\frac{\sin\frac{\pi}{x}}{n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}$$

$$= \frac{4}{\pi}\frac{1}{n}\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi}{2n};$$

$$E_n^*(M_1)_c = \frac{4}{\pi n}\left|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin[(2m+1)\gamma - \frac{pi}{2}}{(2m+1)^2}\right|$$

$$= \frac{4}{\pi n}\left|\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)\gamma}{(2m+1)^2}\right|$$

elde edilir, buradan ise görülür ki s=1 hali için γ=0 olmalıdır ve γ=0 için de

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos[(2m+1)\gamma - \frac{\pi}{2}]}{(2m+1)^2} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin(2m+1)\gamma}{(2m+1)^2} = 0$$

olur. Böylece aşağıdaki formül elde edilmiş olur.

$$E_n^*(M_1)_c = \frac{\pi}{2n} \tag{16}$$

Sonuç 2.8 $L_{2,s}$ Weyl-Nikolski anlamında $f^{(s)}(x)(s>0)$ türevi olan ve $f^{(s)}(x) \in L_2$ koşulunu sağlayan 2π peryotlu $f(x)$ fonksiyonlar sınıfı olursa, bu durumda $\forall f \in L_{2,s}$ için aşağıdaki eşitsizlikler kesin olarak doğrudur.

$$E_n^*(f)_2 \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}E_n^*(D_s)_1\, w_1(f^{(s)};\frac{\pi}{n})_2; \tag{17}$$

$$E_n^*(f)_2 \le \frac{1}{2\pi}E_n^*(D_s)_1\, w_2(f^{(s)};\frac{\pi}{n})_2; \tag{18}$$

Bunlardan başka:

$$\sup_{(f)} \frac{E_n^*(f)_2}{w_1(f^{(s)};\frac{\pi}{2})_2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} E_n^*(D_s)_1 \tag{19}$$

$$\sup_{(f)} \frac{E_n^*(f)_2}{w_2(f^{(s)};\frac{\pi}{2})_2} = \frac{1}{2\pi} E_n^*(D_s)_1 \tag{20}$$

burada sup $L_{2,s}^{'} \equiv \{f \in L_{2,s} : f^{(s)} \neq const\}$ sınıfı üzere alınıyor.

Not 2.9 Periyodik fonksiyonlar için en iyi yaklaşım olan $E_n^*(f)_p$ için bir kaç kesin neticeler mevcuttur. Bu sonuçları Teorem 2.1 ile karşılaştırarak istenilen sınıflar için kesin neticeler elde edilebilir.

3. CEBİRSEL POLİNOMLARLA YAKLAŞIM

Bu bölümde peryodik olmayan fonksiyonların cebirsel polinomlarla sonlu parçada en iyi yaklaşım problemleri incelenmektedir.

Teorem 3.1

$\phi(t) \in L_p \equiv L_p[-1,1], K(t) \in L\ L_q(p,q \geq 1), \frac{1}{\tau} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geq 0$

ve

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \phi(t) K(\frac{x-t}{2}) dt \tag{21}$$

olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

$$E_n(f)_\tau \leq 2\|\phi\|_p E_n(K)_q \tag{22}$$

$$E_n(f) \leq C E_n(K)_q \overline{w_2}(\phi;\frac{1}{n})_p \tag{23}$$

Burada $\varpi_2, (a^{'},b^{'}) \subset (-1,1)$ olmak üzere $L_p(a^{'},b^{'})$ normunda yapılır.

Bu teoremde de $K(t)$ fonksiyonunu seçmekle $\{f\} \equiv H(K) \equiv H$ fonksiyon sınıflarını almış oluruz ki; Teorem 3.1' de bu bahsedilen sınıfların her biri için önemli sonuçlar verir. Burada örnek olarak beş tane sonucu vermek yeterli olacaktır.

Sonuç 3.2 $s>2$ olmak üzere $\forall a,b \in R(a^2+b^2>0)$ için

$$K(x)=V_s(x)$$

$$=\left[a(x-c)+b|x-c|\right]|x-c|^s$$

olsun. Bu durumda ,

$$f(x)=\int_{-1}^{1}\phi(t)K(\frac{x-t}{2})dt=\int_{-1}^{1}\phi(t)V_s(\frac{x-t}{2})dt \qquad (24)$$

fonksiyonu için

$$E_n(f)\leq\frac{M(s,a,b)}{n^{s+2}}\|\phi\|_p \qquad (25)$$

koşulu sağlanır. Burada $\phi\in L_p(p\geq 1), M(s,a,b)$ ise s,a,b' ye bağlı olan sabitdir.

Sonuç 3.3 $f(t)$ fonksiyonu Riemann-Liouville anlamında $f^{(s)}(t)\equiv\phi(t)\in L_p(p\geq 1 ve s>0$ keyfi reel sayı) türeevine sahipse bu durumda ;

$$E_n(f)_p\leq\frac{M(s)}{n^s}\|\phi\|_p, \|\phi\|_p=\|\phi\|_{L_p(-1,1)}$$

$$E_n(f)_p\leq\frac{M_1(s)_1}{n^s}\varpi_2(\phi;\frac{1}{n})_p$$

$$\equiv\frac{M_1(s)}{n^s}w\ \omega_2(\phi;\frac{1}{n})L_p(a,b') \qquad (26)$$

eşitsizlikleri doğrudur ve burada $E_n,\varpi_2 L_p(a',b')$ normu üzerinde yapılır.

$$\frac{1}{n}=\delta\leq\frac{\delta_0}{2},$$

$$\delta_0 = \min(1-b^{'}, a^{'}-(-1)), (a^{'}, b^{'}) \subset (-1,1),$$

$$\varpi_2(\phi;\delta)_p = \sup_{|t|\le\delta} \|\phi(x-t) - 2\phi(x) + \phi(x+t)\|_{L_p(a^{'},b^{'})}$$

Sonuç 3.4 $s > -1, p \ge 1, \phi(t) \in L_p(-1,1)$ olmak üzere

$$f(x) = \frac{1}{2^{s+1}} \int_{-1}^{1} [1-(x-t)]^s \phi(t)dt$$

biçiminde olan her bir *f(x)* fonksiyonu için

$$E_n(f) \le \frac{\|\phi\|_p}{2^{s+1}} E_n((1-x)^s)_1$$

doğrudur. Burada , [9]

$$E_n\left[(1-x)^s\right] \approx \frac{2|\sin \pi s|}{\pi} \frac{\Gamma(2s+2)}{2^{s-1} n^{2s+2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{2s+3}}$$

Sonuç 3.5 Her bir

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \ln\left[\frac{1-(x-t)}{2}\right] \phi(t)dt, \phi(t) \in L_p(p \ge 1)$$

şeklinde olan fonksiyon için

$$E_n(f) \le \frac{\|\phi\|_p}{2} E_n\left[\ln(1-x)\right]_1 \sim \frac{2\|\phi\|_p}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3}$$

bağıntısı doğrudur. [9]

Sonuç 3.6 a>1 ve $\phi(t) \in L_p(p \ge 1)$ olmak üzere , her bir

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \ln\left[\frac{a-(x-t)}{2}\right] \phi(t)dt, (a > 1)$$

fonksiyonu için

$$E_n(f) \leq C\frac{\sqrt{a^2-1}}{n}(a-\sqrt{a^2-1})^{n+2}\|\phi\|_p$$

eşitsizliği doğrudur. Burada c sabiti , ln(a-x) fonksiyonunun L_1 uzayında en iyi yaklaşımı ile tanımlanan sabittir.

Not 3.7 Bu sonuçlarda sağ tarafta $\|\phi\|_p$ yerine $\omega_2(\phi;\frac{1}{n})$ ifadesi de yazılabilir. Bunun için (22) eşitsizliği yerine (23) eşitsizliğini de kullanmak gerekir.

4. R ÜZERİNDE TAM FONKSİYONLAR İLE YAKLAŞIM

R ekseni ekseni üzerinde tanımlanmış fonksiyonların tam fonksiyonlarla *R* üzerinde en iyi yaklaşımına bakalım. $L_p(R)$ uzayına dahil olan $\leq \sigma$ dereceli tam fonksiyonlar sınıfı $\omega_{\sigma,p}$ simgesi ile gösterilmişti [2],[3],[6].

Teorem 4.1

$$\phi(t) \in L_p(R), K(t) \in L_q(R)(p,q \geq 1), \frac{1}{\tau} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geq 0$$

ve

$$f(x) = (\phi * K)(x)$$

$$\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)K(x-t)dt$$

$$= (K * \phi)(x) \qquad (27)$$

olsun. Öyle bir $G_0(t) \in \omega_{\sigma,\tau}$ fonksiyonu mevcuttur ki

$$A_\sigma(f)_\tau \leq \|f - G_\sigma\|_\tau$$

$$\leq A_\sigma(\phi)_p A_\sigma(K)_q \qquad (28)$$

eşitsizliği sağlanır. Özel halde

$$A_\sigma(f)_p \leq A_\sigma(\phi)_p A_\sigma(K)_1 \qquad (29)$$

İspat : $K_0(t) \in \omega_{\sigma,q}$ ve $\phi_0(t) \in \omega_{\sigma,p}$ olmak üzere

$$A_\sigma(K)_q = \|K - K_\sigma\|_q, A_\sigma(\phi)_p$$

$$\|\phi - \phi_\sigma\|_p$$

koşullarını sağlayan tam fonksiyon olsunlar.

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} [K(x-t) - K_\sigma(x-t)][\phi(t) - \phi_\sigma(t)]dt \quad (30)$$

ifadesine bakalım. Bu ifade aşağıdaki gibi açılırsa,

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)\phi(t)dt - \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)\phi_\sigma(t)dt$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} K_\sigma(x-t)\phi(t)dt - \int_{-\infty}^{\infty} K_\sigma(x-t)\phi_\sigma(t)dt$$

$$= f(x) - U(x);$$

$$U(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)\phi_\sigma(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} K_\sigma(x-t)\phi(t)dt$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} K_\sigma(x-t)\Phi_\sigma(t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} K(t)\phi_\sigma(x-t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} K_\sigma(x-t)\phi(t)dt$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} K_\sigma(x-t)\Phi_\sigma(t)dt$$

$U(x)$ ifadesine dahil olan integrallerin her biri $\omega_{\sigma.\tau}$ sınıfına dahil olan $\leq \sigma$ dereceli tam fonksiyondur. Gerçekten de birinci integrale bakılırsa:

$$U_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t)\phi_\sigma(x-t)dt$$

$K(t) \in L_q, \phi_\sigma \in L_p$ olduğunda $U_1(x) \in L_\tau, \frac{1}{\tau} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geq 0$. Öte yandan Taylor formülünde

$$\phi_\sigma(x-t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \phi_\sigma^{(m)}(-t)$$

olduğunda

$$\begin{aligned}|U_1(x)| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} K(t)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}\phi_\sigma^{(m)}(-t)dt\right| \\ &\le \int_{-\infty}^{\infty}|K(t)|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{|x|^m}{m!}\left|\phi_\sigma^{(m)}(-t)\right|dt \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{|x|^m}{m!}\int_{-\infty}^{\infty}|K(t)|\left|\phi_\sigma^{(m)}(-t)\right|dt\end{aligned}$$

Burada integral altında olan ifade pozitif terimli seri olmakla birlikte onun kısmi toplamlar dizisi artan bir dizi oluşturduğundan integral ile toplamın yerini değiştirmek mümkündür. Ek olarak S.N.Bernşteyn'in tam fonksiyonlar için

$$\left\|\phi_\sigma^{(m)}(t)\right\|_p \le \sigma^m \left\|\phi_\sigma\right\|_p$$

eşitsizliği esas alınarak

$$\begin{aligned}|U_1(x)| &\le \sum_{m=0}^{\infty}\frac{|x|^m}{m!}\|K\|_q\left\|\phi_\sigma^{(m)}\right\|_p \\ &\le \|K\|_q\|\phi_\sigma\|_p\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\sigma|x|)^m}{m!} \\ |U_1(x)| &\le \|K\|_q\|\phi_\sigma\|_p e^{\sigma|x|} \qquad (31)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ki bu da $U_1(x)$ in $\omega_{\sigma,\tau}$ sınıfından olduğunu ispatlamış olur.

Böylece $U(x)$ 'i içeren kalan iki integralin de $\omega_{\sigma,\tau}$ sınıfına ait olmaları kanıtlanmış olur. Böylece,

$$U(x) \equiv G_\sigma(x) \in \omega_{\sigma,\tau}.$$

Şimdi A ifadesini

$$f(x) - G_\sigma(x) = \int_{-\infty}^{\infty}[K(x-t) - K_\sigma(x-t)][\phi(t) - \phi_\sigma(t)]dt \qquad (32)$$

şeklinde yazarak Yung eşitsizliğinin kullanılması ile de

$$\|f(x)-G_\sigma(x)\|_\tau \le \|K(t)-K_\sigma(t)\|_q \|\phi(t)-\phi_\sigma(t)\|_p \quad (33)$$

eşitsizliğini elde etmiş oluruz. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.2 Teorem 4.1' in şartları doğrultusunda,

$$A_\sigma(f)_\tau \le C(m,r)A_\sigma(K)_q\,\omega_m(\phi;\frac{\pi}{\sigma})_p \quad (34)$$

Teorem 4.3 $\tau\in N$ olmak üzere $f^{(\tau)}(x)$ türevi varsa ve $f^{(\tau)}(x)\in L_p(R)$ ise aşağıdaki eşitsizlik gerçeklenir.

$$A_\sigma(f)_p \le \frac{C(m,r)}{\sigma^\tau}\omega_m(f^{(\tau)};\frac{\pi}{\sigma})_p,\, p\ge 1 \quad (35)$$

REFERENCES

1. **R.P.Boas, Entire functions**, New York 1954.
2. **A.F.Timan, Theory of approzimation of functions of a real variable,** Internat Series of Monographs in pure and Appl. Math. Vol. 34, Nev York, 1963.
3. **I.I.Ibrahimov and F.H(G).Nasibov, Estimation of the best approzimation of a summable function on the real azis by entire functions of finite degree,** Am. Math. Soc. Vol. 11 (1970),No:5, 1332-1336.
4. **F. H(G). Nasibov, SSCB Yüksek okulların Haberleri,** 1969 No 3(82), Kazan, RF.
5. **F.H(G). Nasibov, SSCB Bilimler Akademisi Raporları,** 1989 No 3, C.309, Moskova.
6. **F. H(G). Nasibov, Azarbaycan Bilinmler Akademisi Raporları**, 1986 N4, C.42, Bakü.
7. **R. Edvards, Çağdaş anlanda Fourier Serileri,** C.1, 1985. Moskova.
8. **V. K. Dzyadık, SSCB Bilimler Akademisi Haberleri**, Mat. Böl., 23, 1965.
9. **N. I. Ahiyever, Lecture on the approzimation theory**, Moskova 1965.