Uşak Üniversitesi Fen ve Doğa Bilimleri Dergisi
Usak University Journal of Science and Natural Sciences

http://dergipark.gov.tr/usufedbid
https://doi.org/10.47137/usufedbid.1624019

Derleme Makalesi (Review Article)

Gerçek Hayatta İntegral ve Uygulamaları

Elçin Çelik

Matematik Bölümü, Fen Fakültesi, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, 35430, İzmir, Türkiye.

Geliş: 21 Ocak 2025 *Revizyon: 27 Mart 2025* *Kabul: 28 Mart 2025*
Received: 21 January 2025 *Revised: 27 March 2025* *Accepted: 28 March 2025*

Özet

Bu çalışmanın amacı; matematik disiplininde önemli bir yere sahip olan integral kavramının, günlük hayatta hangi alanlarda kullanıldığını ve bu kullanımların bireylere ve topluma sağladığı kolaylıkları ayrıntılı bir şekilde açıklamaktır. Bu amaçla, öncelikle integral kavramının tarihsel süreçteki ortaya çıkışı ve gelişimi ele alınmış, ardından bu kavramın farklı disiplinlerdeki pratik uygulamaları incelenmiştir. Bu çalışma, integralin yalnızca teorik bir matematiksel araç olmanın ötesinde mühendislik, fizik, ekonomi ve diğer alanlardaki somut katkılarını da ortaya koyarak, matematiğin hayatımızdaki işlevselliğine dikkat çekmeyi hedeflemektedir.

Anahtar Kelimeler: *İntegral, gerçek hayat problemleri, Riemann toplamı.*

Integral and its Applications in Real Life

Abstract

The purpose of this study is to explain in detail the areas in which the concept of integral, which has an important place in the discipline of mathematics, is used in daily life and the conveniences these uses provide to individuals and society. For this purpose, firstly the emergence and development of the concept of integral in the historical process is discussed, then the practical applications of this concept in different disciplines are examined. This study aims to draw attention to the functionality of mathematics in our lives by revealing the concrete contributions of integral in engineering, physics, economics and other fields beyond being just a theoretical mathematical tool.

Keywords: *Integral, real life problems, Riemann sum.*

1. Giriş

İntegral kavramının kökeni oldukça eski tarihlere uzanır. Aslında ilk dönemlerde bu terim kullanılmasa da yapılan çalışmalar, bugünkü anlamına karşılık gelen fikirleri içermektedir [1]. Modern matematikte limit, türev ve integral olarak tanımlanan kavramlar tarihin ilk zamanlarında sonsuz küçükler hesabı olarak karşımıza çıkmaktadır

E-mail: elcincelik@iyte.edu.tr (ORCID ID: 0000-0003-4145-6074)

[2]. Gerçek yaşamda süreklilik gösteren olayları incelemeyi kolaylaştıran sonsuz küçükler hesabı, modern matematikte kalkülüs, literatürümüzde ise analiz adıyla anılmaktadır. Sonsuz küçükler hesabında çalışmalar yapan ilk matematikçi Elealı Zenon (M.Ö. 450)'dur. Zenon, M.Ö 5. yüzyılda yaşamış eski Yunanlı bir filozoftur ve günümüze ulaşmış dört adet paradoksu bulunmaktadır [1]. Zenon'un paradoksları sayesinde matematiğe limit ve sonsuzluk kavramları girmiştir.

Sonsuzluk kavramı, eski çağlardaki matematikçilerin önemini fark ettikleri ancak bilgiye dönüştürmekte zorlandıkları bir konuydu. 17. ve 18. yüzyılda fiziksel bazı olguların açıklanabilmesi için ortaya atılan sonsuz küçükler hesabı (infinitesimal) bu yönde atılmış olan büyük bir adımdır. İntegral kavramının ortaya çıkışında etkili olan bir diğer isim Leukippus (M.Ö. 440)'tur. Zenon'un öğrencisi olan Leukippus atomların bölünemez, sonsuz sayıda var olduklarını, sonsuz genişlikteki boş uzayda durmaksızın hareket ettiklerini ifade etmiştir [3]. Leukippus'un öğrencisi olan Democritus ise uzunlukların sonlu değil, sonsuz sayıda parçaya bölünebileceği fikrini ortaya atmıştır. İntegral kavramının ortaya çıkışında etkili olan bir diğer kişi Antiphon (M.Ö. 430)'dur. Antiphon, geleneksel şekiller yoluyla kolaylıkla tanımlanamayan bir şeklin alanını ya da hacmini bulma yolu olan tükenme yöntemi (exhaustion method) sayesinde, çember ile bu çemberin içine çizilebilen düzgün çokgen arasındaki alanı hesaplamıştır. Bunu hesaplarken bizim kullandığımız integral hesabını kullanmış fakat sadece integral ve limit kavramlarını kullanmamıştır. Benzer şekilde Bryson (M.Ö. 450), Eudemus (M.Ö. 335), Knidoslu Eudoxun (M.Ö. 370), Democritus (M.Ö. 400), Hippocrates (M.Ö. 460)'da bu yöntem ile kürenin hacmi ve yüzölçümünü hesaplama gibi bazı sayısal hesaplamalarda bulunmuşlardır [1]. İntegral ve limit kavramlarını tanımlamadan, integral hesabının temel ilkelerini en iyi kullanan matematikçilerden biri Archimedes (M.Ö. 225)'tir. Archimedes kürenin yüzey alanını, küre kapağının yüzey alanını, dönel bir hiperboloid kesmesinin hacmini, spheroit kesmesinin hacmini, bir yay tarafından çevrelenen alanı ve parabol kesmesinin alanını integral yöntemeleri kullanarak hesaplamıştır. Ayrıca, Archimedes, bir dairenin içine ve dışına düzgün 96 kenarlı çokgenler çizerek, bu çokgenlerin alanlarını hesaplamış ve π sayısının $3\frac{10}{71}$ ile $3\frac{10}{70}$ arasında bir değer taşıdığını belirlemiştir [4].

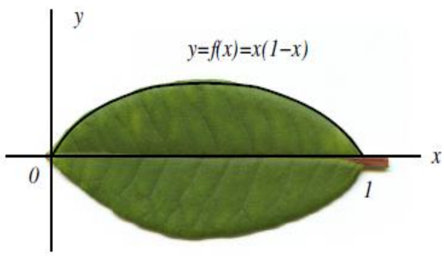
Sonsuz küçükler hesabında ikinci önemli adımı, geometrik çalışmalarıyla 1360 yılında Nicole Oresme atmıştır. Oresme, bir cismin yüzeyini enlem ve boylamlarla dikdörtgenimsi bölgelere ayırarak alan hesaplamanın mümkün olduğunu göstermiştir. Ortaçağ matematikçilerinden Simon Stevin (1546-1620) ise bazı geometrik şekillerin ağırlık merkezini belirlemek için sonsuz küçükler hesabına daha modern bir yaklaşımla katkıda bulunmuştur. Stevin'in ardından sonra Roma'da 1606 yılında Luca Valerio de 'Quadrature Parabolae' isimli kitabını yayınlamıştır. Bu eserde, alan hesaplarında Antik Yunan yöntemleri temel alınmış ve sonsuz küçükler hesabına yavaş yavaş giriş yapılmıştır. Bu konuda önemli bir katkı sunan diğer bir isim ünlü astronom Johannes Kepler'dir (1609). Gezegenlerle ilgili alan yasasını formüle eden Kepler, sonsuz küçükler hesabına oldukça yaklaşmıştır. Keplerden sonra integral kavramına en çok yaklaşanlardan biri de Cavalieri 'dir (1598-1647). Cavalieri, Aristoteles'in (M.Ö. 384-322) bölünemezler üzerine yazdığı eserdeki yöntemi geliştirerek hesaplarını ilerletmiştir. İntegral konusunda en büyük buluşlar ise Sir İsaac Newton'a (1642-1727) aittir. Newton, 1665 yılında başladığı çalışmalarını 1687 yılında yayımladığı *Principia* adlı eserinde sunarak integral hesaplamada çığır açmıştır. Gottfried Leibniz (1646-1716)'de Newton ile aynı çalışmaları yapmış fakat çalışmalarını habersiz olarak yürütmüş ve Newton'dan önce yayınlamıştır. Bu ise birçok tartışmayı beraberinde getirmiştir. Newton, fiziksel bir yaklaşımla; Leibniz ise geometrik bir yöntemle integral kavramını açıklamış ve bu iki bilim insanının katkılarıyla integral hesabı Avrupa'da hızlı bir şekilde gelişim göstermiştir. De L'Hopital (1661-1704) ve Bernoulli ailesi, integral konusunda önemli çalışmalara imza atmış; ancak karmaşık fonksiyonlar için integral kavramını derinleştiren ve taşıyan isim Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) olmuştur. Avrupa'da sonsuz küçükler hesabı hızla ilerlerken, doğuda da 18. yüzyılda integraller üzerine önemli çalışmalar yapılmıştır. Örneğin Mochinaga ve Ohashi 1687 yılında dairenin alanını integral yöntemi ile hesaplamışlardır. Temelleri bu şekilde atılan integral hesabı, sonraki yüzyıllarda büyük adımlarla ilerlemiş ve çok sayıda matematikçi bu alana katkı sağlamıştır.

2. İntegral Hesabına Neden İhtiyaç Duyuldu?

İntegral hesabı ilk olarak, tüccarların, toprak sahiplerinin ve sıradan insanların günlük olarak karşılaştıkları çok pratik sorunları çözmek için ortaya çıkmıştır. Örneğin düzensiz bir şekle sahip olan yani basit bir geometrik şekle sahip olmayan toprak parçası için ne kadar ödeme yapılmalı, alan hesabı nasıl yapılmalı ya da çeşitli şekillere sahip olan fıçılar için bir fıçı zeytinyağı satın alırken aslında ne kadar zeytinyağı satın alınmaktaydı? Bu tür soruların çoğunda, bir alanı veya hacmi doğru şekilde ölçme ihtiyacı, mevcut geometri bilgilerinin çok ötesine geçmektedir [5] ve bu soruların cevaplanabilmesi için integral hesabına ihtiyaç duyulmaktadır.

3. İntegral Nedir?

İntegral kelimesi dilimize Fransızca intègral kelimesinden geçmiştir. Bu kelimenin Türkçe karşılığı 'tümlev' olup, bu kavram anlam açısından bakıldığında tümleme, bütünleştirme gibi ifadelerle ilişkilidir. Matematiksel açıdan bakıldığında ise integral, bir büyüklüğü, alanı hesaplanabilen küçük parçalara bölünmesi ve daha sonra oluşan her parçanın toplanması ile elde edilen hesaplama şeklidir [6]. İntegral hesabı basit bir toplama işlemi gibi görünse de bilimde çığır açmış bir matematiksel hesaplama yöntemidir. Bu yöntemi doğadan bir örnekle açıklamak için aşağıdaki Resim 3.1. ile gösterilen yaprağın yüzey alanı ele alınırsa;

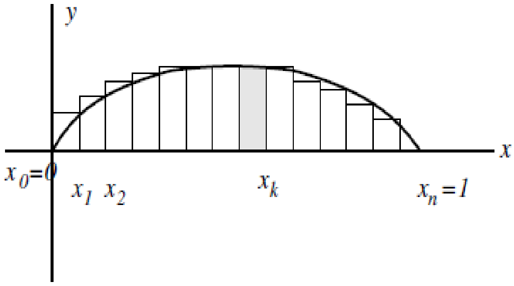


Resim 3.1. Yaprağın yüzey alanını

Burada $0 \leq x \leq 1$ olmak üzere;

$$f(x) = x(1 - x)$$

şeklinde basit bir parabol yaprağın üst kenarına uygun bir yaklaşım sağlar. Bu eğri ile x ekseni arasında kalan alan, yaprağın alanının yarısıdır. Bu yaprağın x ekseni üzerinde kalan kısmı Şekil 3.1. ile gösterildiği gibi N tane dikdörtgensel bölgeye ayrıldığında;



Şekil 3.1. N tane dikdörtgensel bölgeye ayrılmış yaprağın yüzey alanı

k'ıncı dikdörtgensel bölgenin alanı

$$a_k = \text{taban } x \text{ yükseklik} = \Delta x\, f(x_k) = \left(\frac{1}{N}\right)\left(\frac{k}{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)\right)$$

şeklinde yazılabilir ve ayrıca tüm dikdörtgenlerin alanları toplamı

$$\sum_{k=1}^{N} a_k = \sum_{k=1}^{N} \Delta x\, f(x_k) = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{N}\right)\left(\frac{k}{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)\right)$$

şeklinde yazılabilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{k=1}^{N} a_k = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k}{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)\right) = \left(\frac{1}{N^2}\right)\sum_{k=1}^{N} k - \left(\frac{1}{N^3}\right)\sum_{k=1}^{N} k^2$$

$$= \left(\frac{1}{N^2}\right)\left(\frac{N(N+1)}{2}\right) - \left(\frac{1}{N^3}\right)\left(\frac{(2N+1)N(N+1)}{6}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{(N+1)}{N}\right) - \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{(2N+1)(N+1)}{N^2}\right) \tag{3.1}$$

elde edilir. Burada gerçek alanın hesaplanabilmesi için sonsuz tane N bölmeye ayrılması gerekir. Bu yüzden (3.1) ifadesinin $N \to \infty$ limiti alınmalıdır.

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{(N+1)}{N}\right) - \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{(2N+1)(N+1)}{N^2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}2 = \frac{1}{6}$$

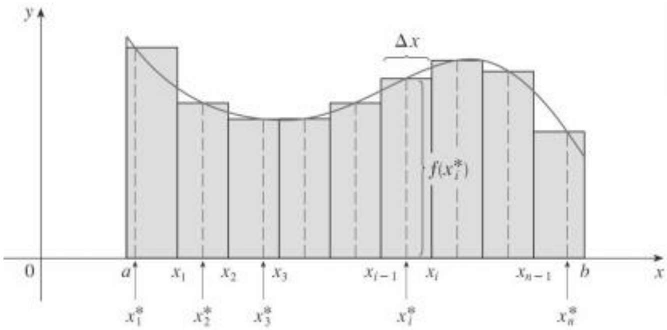
Böylece tüm yaprağın alanı bu alanın 2 katı yani

$$\frac{1}{6}2 = \frac{1}{3}$$

şeklinde bulunur [5].

Limiti alınan fonksiyonlar pozitif ve negatif olma durumu gibi birçok durumda karşımıza çıkabilir. Bu tip limitler için özel bir ad kullanılmaktadır. 'Sonlu Yaklaşımların Limitleri Teorisi' olarak adlandırılan bu yaklaşım matematikçi Bernhard Riemann tarafından ortaya konulmuştur [6].

Tanım 3.1. (Riemann Toplamı)



Şekil 3.2. f fonksiyonu için Riemann toplam grafiği

Bir $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı Şekil 3.2.'de gösterildiği gibi keyfi bir f fonksiyonu için

$$R(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f(x^*)\Delta x_k$$

toplamına f fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık gelen Riemann toplamı denir [7]. Bu tanıma göre

$$\int_0^2 x^2\, dx$$

integrali Riemann toplamı yardımıyla aşağıdaki gibi hesaplanabilir [8].
Burada $a = 0$, $b = 2$ olmak üzere

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$$

olarak bulunur. Aralıklar

$$x_i = x_0 + i\Delta x = 0 + i\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2i}{n}$$

şeklinde yazılır. Öyleyse

$$f(x_i) = x_i^2 = \left(\frac{2i}{n}\right)^2 = \frac{4i^2}{n^2}$$

elde edilir. Riemann toplamı

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4i^2}{n^2}\right)\frac{2}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{8i^2}{n^3}=\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{8}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$
$$=\frac{8}{n^3}\left(\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right)$$
$$=\frac{16n^3+24n^2+n}{6n^3}=\frac{8}{3}+\frac{4}{n}+\frac{1}{6n^2}$$

elde edilir. Burada $n \to \infty$ için limit

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{3}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6n^2}\right)=\frac{8}{3}+0+0=\frac{8}{3}$$

Burada oluşturulan alt aralıklar bu aralıklardaki x^* noktaları nasıl seçilirse seçilsin, alt aralıkların sayısı sonsuza ve genişlikleri sıfıra yaklaşırken elde edilen sonuç bir sayıya yakınsayacaktır. Bu durumda, limit işlemi $[a,b]$ aralığında tanımlı belirli integral ifadesine götürecektir.

Tanım 3.2. (Belirli İntegral)

$f(x)$, $[a,b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olmak üzere bu fonksiyonun belirli integrali, limitin var olması şartıyla,

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x$$

şeklinde verilir. Eğer limit var ise $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında integrallenebilir denir [8].

Integral sembolü, 'toplam' anlamına gelen 'sum' kelimesinin baş harfi olan S harfinin stilize edilmiş şeklidir. Burada aslında yükseklikleri $f(x)$, genişlikleri dx (sıfırdan büyük ama sonsuz küçük) olan temsili dikdörtgenlerin alanları toplanmaktadır [6].

Tanım 3.3 (Üst Darboux İntegrali ve Alt Darboux İntegrali)

f, $[a,b]$ üzerinde tanımlı ve sınırlı bir fonksiyon olsun.

$$\int_a^{\bar{b}} f(x)dx=\inf_{s\geq f}\left\{\int_a^b s(x)dx:\quad s\in M[a,b]\right\}$$
$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx=\inf_{t\leq f}\left\{\int_a^b t(x)dx:\quad t\in M[a,b]\right\}$$

sayılarına sırası ile, Üst Darboux İntegrali ve Alt Darboux İntegrali denir [7].

Tanım 3.4 (Riemann Anlamında İntegrallenebilme)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı olsun. Eğer

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = I$$

ise f fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında Riemann anlamında integrallenebilirdir denir ve fonksiyonun bu integrali

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ile gösterilir [7].

Belirli integral sadece pozitif değerler almaz bunun yanında negatif ve sıfır değerleri de alabilir. Bu yüzden belirli integral hesabı bize her zaman alanı vermemektedir. f fonksiyonu sadece pozitif olduğu durumlarda belirli integral ile grafiğin altında kalan alan değerleri birbirine eşit olabilmektedir. Fonksiyonun değeri negatif olduğu durumda ise x-ekseni altında kalan bölgenin değerinin mutlak değeri diğer alanların değerlerine ilave edildiği zaman grafik ile sınırlandırılan bölgenin alanı bulunabilir [6].

Teorem 3.1 (Analizin Temel Teoremi)

f, $[a,b]$ aralığında tanımlı ve Riemann anlamında integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer her $x\in(a,b)$ için

$$F'(x)=f(x)$$

olacak biçimde sürekli bir $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu varsa

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

dır [7]. Örnek 3.1. Analizin Temel Teoremi yardımıyla hesaplanırsa, ilk olarak $f(x)=x^2$ kuralına sahip bir f fonksiyonunun ters türevini bulmamız gereklidir. Yani öyle bir fonksiyon bulmalıyız ki türevini aldığımızda bize $f(x)=x^2$ fonksiyonunu vermelidir. Bu şartı sağlayan fonksiyonlardan biri $F(x)=\frac{x^3}{3}+3$'dür. Bu teorem $[0,2]$ kapalı aralığında tanımlı $f(x)=x^2$ eğrisi altında kalan alanın $F(2)-F(0)$ değerine eşit olduğunu söylemektedir. Buradan;

$$F(2)-F(0)=\left(\frac{2^3}{3}+3\right)-\left(\frac{0^3}{3}+3\right)=\frac{8}{3}+3-0-3=\frac{8}{3}$$

elde edilir. Bu bulduğumuz değer Örnek 3.1'de Riemann toplamı ile elde edilen değere eşittir. Buradan da anlaşılıyor ki ters türev kavramıyla çok hızlı bir şekilde istenilen bölgenin alanı hesaplanabilmektedir [6].

Tanım 3.5. (Belirsiz İntegral)

Türevi $f(x)$ veya diferansiyeli $f(x)dx$ olan $F(x)$ ifadesine $f(x)$ fonksiyonunun belirsiz integrali denir ve

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

şeklinde gösterilir. Buna göre;

$$F(x) = \int f(x)\,dx \Leftrightarrow \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

olacaktır. Diğer taraftan bir sabitin türevi sıfır olduğundan

$$\frac{d}{dx}[F(x) + c] = f(x)$$

yazılabilir ki bu da $f(x)$'in integralinin $F(x)$+c şeklinde de yazılabileceğini gösterir. Tamamen keyfi olan bu c sabitine integrasyon sabiti denir [7]. Örneğin;

$$\int 9x^2\,dx$$

integralinin değeri

$$\int 9x^2\,dx = 9\frac{x^3}{3} + c = x^3 + c$$

dir.

4. Gerçek Hayatta İntegralin Kulanım Alanları

Bu bölümde, ilk olarak integralin diferansiyel denklemlerin çözümündeki rolünden bahsedilmiş daha sonra tıp, mühendislik, ekonomi, fizik, kimya, biyoloji, istatistik, astronomi, psikoloji gibi daha birçok alanda uygulaması bulunan integralin kullanımı ile ilgili örnekler verilmiştir.

4.1. İntegralin Diferansiyel Denklemlerin Çözümündeki Rolü

İntegral, mühendislikten biyolojiye kadar pek çok alanda birikimli değişimi hesaplamak için kullanılır. Ancak bu süreç genellikle bir diferansiyel denklem ile başlar. Örneğin, bir ilacın kandaki konsantrasyonunun zamanla değişimi, bir nüfusun büyümesi veya radyoaktif maddelerin bozunumu gibi dinamik sistemler, türevle ifade edilen değişim hızları ile modellenir.

İlaç Emilim Kinetiği Vücuda alınan bir ilacın sindirim sistemine geçtikten sonra sindirim sistemindeki derişiminin belirli bir oranına bağlı olarak gecikmeksizin kana karıştığı kabul edilsin. İlaç kandaki derişimi ile orantılı olarak metabolize edilir ve kandan atılır. Burada ilaç miktarı $m(t)$, sindirim sistemindeki derişim miktarı $x(t)$ ve kandaki derişim miktarı da $y(t)$ ile gösterilirse,

$$\frac{dx}{dt} = -k_1 x + m(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = k_1 x - k_2 y\,, \qquad k_1, k_2 > 0\,, \qquad k_1 \neq k_2$$

şeklinde diferansiyel denklemi elde edilir. Bu bir lineer denklem sistemi olup, çözümü

$$x(t) = e^{-k_1 t}\left[x_0 + \int_0^t e^{k_1 s} m(s) ds\right]$$

ve

$$y(t) = e^{-k_2 t}\left[y_0 + k_1 \int_0^t e^{k_2 s} x(s) ds\right]$$

dir. Burada $m(t)$'nin sabit olduğunu kabul edelim. Yani ilacın sürekli olarak sindirim sistemine salındığı varsayalım. Basitlik için $m(t) = 1$ ve $x_0 = y_0 = 0$ alınırsa,

$$x(t) = e^{-k_1 t}\left[\int_0^t e^{k_1 s} ds\right] = \frac{1}{k_1}(1 - e^{-k_1 t})$$

$$y(t) = e^{-k_2 t}\left[\int_0^t e^{k_2 s}(1 - e^{-k_1 s}) ds\right] = \frac{1}{k_2} - \frac{e^{-k_1 t}}{k_2 - k_1} + \frac{k_1 e^{-k_2 t}}{k_2(k_2 - k_1)}$$

elde edilir. Böylece

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \frac{1}{k_1}$$

ve

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \frac{1}{k_2}$$

olarak bulunur. Eğer ilacın belli bir bölgedeki yarılanma ömrünün tahmin edilebilmesi için

$$\frac{dx}{dt} = k_1 x$$

denklemi ve

$$x(t) = x_0 e^{-k_1 t}$$

çözümü bulunur. İlacın yarılanma ömrü için $x(t) = \frac{x_0}{2}$ olacak şekilde t zamanı hesaplanırsa $t = \frac{ln2}{k_1}$ bulunur. Eğer ilacın sindirim sisteminde yarım saatte ve kanda da 10 saatte yarılandığı varsayılırsa, $k_1 = 2ln2$ ve $k_2 = \frac{ln2}{10}$ olarak elde edilir. [9]

Sınırsız Nüfus Artışı Malthusyan büyüme modeli olarak adlandırılan model,

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

diferansiyel denklemi ile verilir. Burada N popülasyon sayısı veya $\frac{dN}{dt}$ popülasyon değişim oranı, b doğurganlık oranı ile d ölüm oranı arasındaki farka eşit olan $r = b - d$ tarafından belirlenmektedir. Bu denklemin çözümünü bulmak için;

$$\frac{dN}{N} = kdt$$

Burada her iki tarafın integrali alınırsa

$$\int \frac{dN}{N} = \int kdt$$

$$N = Ae^{kt}$$

şeklinde çözüm elde edilir. Dolayısıyla bu denklemin çözümü, başlangıç değeri N_0 olmak üzere $N = N_0 e^{kt}$ olarak yazılabilir. Bu model temel olarak gelişmiş bir nüfus modelini temsil eder. Basit olarak oluşturulan bu denklemin doğruluğu için göç, iklim değişkenleri, sınırlı gıda kaynakları, doğal felaketler gibi diğer değişkenler göz ardı edilebilmektedir [10].

Taşıma Kapasitesi Pierre-François Verhulst, Malthus'un denklemini eleştirerek nüfusun zamanın sürekli bir fonksiyonu olarak değerlendirilebileceğini öne sürmüş ve bu yaklaşıma dayalı olarak nüfus problemine yönelik yeni bir doğrusal olmayan matematiksel model geliştirmiştir. Verhulst (1838, 1845) bir nüfusun aşırı büyümesi durumunda kendi kendini sınırlayan bir sürecin devreye girmesi gerektiğini savunmuş ve bu bağlamda, büyüme oranı r ile mevcut sürdürülebilir kaynakların belirlediği ortamın taşıma kapasitesi k değerlerinin pozitif olması koşulu ile nüfus dinamiğini

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{k}\right), \qquad t \geq 0, \qquad N(0) = N_0$$

denklemi ile tanımlamıştır. Bu modelde $r(1 - \frac{N}{k})$ kişi başına düşen doğum artış oranıdır ve N popülasyon büyüklüğüne bağlıdır [11].

Verhulst tarafından önerilen bu denklem başlangıç değeri ile çözümü

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{k}\right), \quad t \geq 0, \quad N(0) = N_0$$

$$\rightarrow \int \frac{dN}{\left(1-\frac{N}{k}\right)N} = \int r dt$$

$$\rightarrow \frac{1}{\left(1-\frac{N}{k}\right)N} = \frac{k}{N(k-N)} = \frac{1}{N} + \frac{1}{k-N}$$

$$\rightarrow \int \frac{dN}{N} + \int \frac{dN}{k-N} = \int r dt$$

$$\rightarrow \ln|N| - \ln|k-N| = rt + c_1$$

$$\rightarrow \ln\left|\frac{k-N}{N}\right| = -rt - c_1$$

$$\rightarrow \frac{k-N}{N} = ce^{-rt} \qquad (c = \pm e^{-c_1})$$

$$\rightarrow N = \frac{k}{1+e^{-r}} \qquad \left(c = \frac{k-N_0}{N_0}\right)$$

olmak üzere

$$N(t) = \frac{N_0 k}{N_0 + (k-N_0)e^{-rt}}$$

şeklindedir. Verhulst tarafından önerilen bu denklem lojistik difreransiyel denklem olarak da adlandırılmaktadır. Günümüzde Çelik ve Uçar, Aralık 2019 tarihinde Çin'in Wuhan kentinde ortaya çıkan Covid 19 salgınının Türkiye verilerini lojistik büyüme modeline uygulayıp Taylor matris ve sıralama yöntemini kullanarak salgının ülkedeki zamansal gelişimi hakkında tahminler yapmışlardır [12].

Radyoaktivite Bazı atomlar kararsız yapıda olup sürekli olarak kütle ve radyasyon yayarlar. Bu süreç, radyoaktif bozunma olarak adlandırılır. Sürekli radyoaktif bozunmaya uğrayan atomları içeren elementler ise radyoaktif elementler olarak tanımlanır. Radyoaktif bozunma sırasında, bir atom kütlesinin bir kısmını radyasyon şeklinde yayabilir ve bu süreç sonucunda geri kalan kısmı yeniden yapılanarak farklı bir elementin atomuna dönüşebilir. Yapılan deneyler, belirli bir zaman diliminde bir radyoaktif elementin bozunma hızının (birim zamanda bozunan çekirdek sayısı) mevcut radyoaktif çekirdek sayısıyla doğru orantılı olduğunu ortaya koymuştur. Yani, bir radyoaktif elementin bozunumu

$$\frac{dy}{dt} = -ky$$

ile tanımlanır. y_0 sıfır anında bulunan parçacıkların sayısı ise daha sonraki bir t anında kalan parçacık sayısı, integral yardımıyla gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$y = y_0 e^{-kt}$$

şeklinde elde edilir. [13]

4.2. İntegralin Tıp Alanında Uygulamaları

Kardiak Çıkışı Kalbin kardiak çıkışı, birim zamanda kalbin pompaladığı kanın hacmidir. Kardiak çıkışını ölçmek için boya sulandırma yöntemi kullanılmaktadır. Boya sulandırma yöntemi dediğimiz yöntem ile kalbin sağ kulakçığına enjekte edilen boyanın kalpten geçerek aorta akması sağlanır. Daha sonra aorta sokulan sonda ile boya temizlenene kadar $[0, T]$ zaman aralığında eşit aralıklı zamanlarda kalpten çıkan boyanın konsantrasyonu ölçülür. Burada $c(t)$, boyanın t anındaki konsantrasyonu ve F bulmaya çalıştığımız akış hızı olmak üzere, $[0, T]$ aralığı her biri Δt genişliğinde alt aralıklara bölünürse t_{i-1}'den t_i'ye olan alt aralık boyunca ölçüm noktasından geçen boya yaklaşık olarak

$$c(t_i)(F\Delta t)$$

şeklindedir. Boyanın toplam miktarı ise yaklaşık olarak

$$\sum_{i=1}^{n} c(t_i)F\Delta t = F\sum_{i=1}^{n} c(t_i)\Delta t$$

şeklinde hesaplanır. Burada $n \to \infty$ için limit alınırsa boya miktarı

$$A = F\int_0^T c(t)dt$$

olarak bulunur. Böylece kardiak çıkış

$$F = \frac{A}{\int_0^T c(t)dt}$$

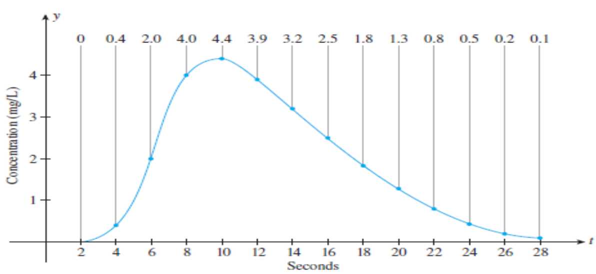
ile hesaplanır [13].

Örnek 4.1

Bir sağ kulakçığa 5 mg boya verilmiştir. Burada

$$F = \frac{60A}{\int_0^{28} c(t)dt}$$

ve boyanın konsantrasyonu



Şekil 4.1. Boya konsantrasyonu

Şekil 4.1'deki gibi verildiğinde kardiak çıkışını hesaplayabiliriz. Burada $n = 14$ ve $\Delta t = 2$ olmak üzere $t_0 = 0, t_1 = 2, t_2 = 4, t_3 = 6, \cdots, t_{14} = 28$ elde edilir. Bu değerler integralde yerine yazılırsa

$$\int_0^{28} c(t)dt \approx \frac{2}{3}[c(0) + 4c(2) + 2c(4) + 4c(6) + \cdots + 4c(26) + c(28)]$$
$$= \frac{2}{3}[0 + 4(0) + 2(0.4) + 4(2.0) + 2(4.0) + \cdots + 4(0.2) + (0.1)] \approx 49.9$$

olarak bulunur. Böylece kardiak çıkışı

$$\frac{60(5)}{49.9} \approx 6.0$$

şeklinde hesaplanır [14].

Kanın Akışı Merkezi eksenine r uzaklıkta, yarıçapı R, uzunluğu l olan bir kan damarından akan kanın hızı v ve bu kan damarının iki ucu arasındaki basınç farkı P, kan akışkanlığı , kan akışkanlığı Δr olmak üzere, bu kan damarının bir kesitinden birim zamanda akan kanın toplam hacmi

$$F = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi r v(r) dr$$

ile hesaplanır. Burada laminar akış yasası gereği,

$$v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

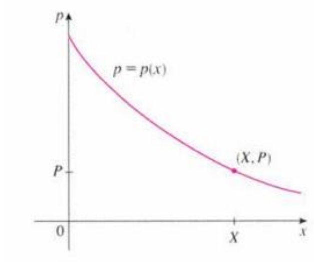
alınıp denklem yeniden düzenlendiğinde

$$\int_0^R 2\pi r \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)dr = \frac{\pi P R^4}{8\eta l}$$

denklemi elde edilir. Ortaya çıkan bu denklem Poiseuille Yasası olarak bilinir ve bize akının damarın yarıçapının dördüncü kuvvetiyle doğru orantılı olduğunu gösterir. [13]

4.3. İntegralin Ekonomi Alanında Uygulamaları

Tüketici Rantı Talep fonksiyonu $p(x)$, bir üründen x birim satmak için bir şirketin uygulaması gereken fiyatı göstersin. Şirketin bir ürünü daha fazla satması için o ürünün fiyatını düşürmesi gerektiği için talep fonksiyonu $p(x)$ azalan bir fonksiyondur. Bu durumda talep eğrisi



Şekil 4.2 Talep Eğrisi

Şekil 4.2. ile gösterildiği şekilde çizilebilir. Burada X satışa hazır olan ürünün miktarını ve $P = p(X)$ ise şu andaki satış fiyatını

$$\int_0^X [p(x) - P]dx$$

integrali ise ekonomide tüketici rantını göstermektedir [13]. Tüketici rantı, tüketicilerin bir mal için ödemeye razı oldukları para miktarı ile fiilen ödediği para miktarı arasındaki farktır.

Örnek 4.2

Bir ürünün dolar cinsinden talebi $p = 1500 - 0.0001x^2$ ve satılan ürün miktarı 600 ise tüketici rantı şu şekilde hesaplanabilir:
Satılan ürün miktarı $X = 600$ olduğu için, buna karşılık gelen fiyat

$$P = 1500 - 0.0001(600)^2 = 1464$$

olarak elde edilir.

$$\int_0^{600} [p(x) - P]dx = \int_0^{600} [1500 - 0.0001x^2 - 1464]dx = \int_0^{600} [36 - 0.0001x^2]dx = 14400\$$$

Üretici rantı, bir mal için satmaya razı oldukları para miktarı ile fiili olarak satması gereken piyasa fiyatı arasındaki fark olmak üzere aynı şekilde üretici rantını da integral yardımıyla hesaplayabilmek mümkündür.

4.4. İntegralin Fizik Alanında Uygulamaları

Yapılan İş Değişken bir $F(x)$ kuvveti tarafından x-ekseni boyunca $x = a$'dan $x = b$'ye kadar yapılan iş

$$W = \int_a^b F(x)dx$$

ile bulunur.

Hooke Yasası, bir elastik malzemeye uygulanan kuvvet ile malzemenin meydana getirdiği şekil değişikliği (örneğin uzama veya sıkışma) arasındaki doğrusal ilişkiyi ifade eden temel bir fizik yasasıdır. Matematiksel olarak $F = kx$ şeklinde ifade edilir.

Örnek 4.3

Kuvvet sabiti $k = 16$ Ib/ft ise, bir yayı doğal uzunluğu 1 ft'den 0.75 ft uzunluğuna sıkıştırmak için gereken iş;

$$F = kx = 16x$$

dir. Öyleyse,

$$W = \int_0^{25} 16x\, dx = 0.5 \text{ ft-Ib}$$

olarak bulunur [13].

Frenleme Sistemi Arabaların frenleme sistemlerinde integral, hareketin dinamiklerini anlamak ve optimize etmek için kullanılır. Özellikle frenleme sırasında aracın ne kadar mesafe kat edeceğini hesaplamak için hızın zamana göre integrali alınır.

Örnek 4.4

Bir araç 60 m/s hızla giderken fren yapıyor ve sabit $-5\ m/s^2$ ivmeyle durmaktadır. Frenleme sırasında aracın ne kadar yol kat edeceği şu şekilde hesaplanabilir:

Başlangıç hızı $v_0 = 60\ m/s$ ve sabit negatif ivme $a = -5\ m/s^2$ olmak üzere, hız zamanın bir fonksiyonu olarak

$$v(t) = v_0 + at$$

şeklinde yazılabilir. Araç tamamen durduğunda hız $v(t) = 0$ olur.

$$0 = 60 - 5t$$

Öyleyse araç 12 saniyede durur. $x(t)$ zamana bağlı alınan mesafe olmak üzere, hızın zamana göre integrali ile hesaplanır.

$$x(t) = \int v(t)dt$$

Burada hız fonksiyonu $v(t) = 60 - 5t$ olduğundan

$$x(t) = \int (60 - 5t)dt = 60t - \frac{5}{2}t^2 + C$$

Başlangıçta $t = 0$, $x(0) = 0$, bu yüzden $C = 0$ olur. Alınan mesafe $t = 12s$ için

$$x(12) = 60(12) - \frac{5}{2}(12)^2 = 720 - 360 = 360m$$

Araç frenleme sırasında $360m$ yol kat eder. Ayrıca fren kuvvetinin zamanla değiştiği (örneğin fren kuvveti kaygan bir yolda lastik yüzeyi ile değişebilir) durumlarda mesafenin hesaplanması genellikle daha karmaşık model ve integraller ile yapılır.

Uçak Yapımı Uçak üzerindeki aerodinamik kuvvetlerin hesaplanması, yakıt tüketim analizleri ve yapısal yüklerin dağılımı gibi kritik problemlerde integrallerden faydalanılır. Örneğin bir uçağın uçmasını sağlayan en önemli faktörlerden biri kanatların oluşturduğu kaldırma kuvvetidir. Bu kuvvet, kanat yüzeyine etki eden basıncın integrali alınarak hesaplanır. Kaldırma kuvveti (L), kanat yüzeyi boyunca basınç farkının integralidir:

$$L = \int_S (P_{üst} - P_{alt}) dS$$

Burada;

- $P_{üst}$: Kanadın üst yüzeyindeki basınç,
- P_{alt}: Kanadın alt yüzeyindeki basınç,
- S: Kanadın yüzey alanıdır.

Yatak Tasarımı Yatak konforu sağlamak için integral, özellikle basınç dağılımı, yüzey şekli optimizasyonu ve vücut destek analizi gibi konularda kullanılır. Yatak tasarımında, vücudun farklı bölgelerinin yüzeye uyguladığı basıncın dengeli bir şekilde dağıtılması konforun artırılması için kritiktir. Bu süreçte integral, basınç dağılımının ve yük taşıma kapasitesinin hesaplanmasında rol oynar. Bir insan vücudu yaklaşık olarak bir eğri ile modellenebilir (örneğin, sırtüstü yatarken sırt, kalça ve bacak bölgelerinin yatakla temas ettiği noktalar). Yatak yüzeyindeki basınç dağılımı şu şekilde ifade edilebilir:

$$P(x) = k(1 - \frac{x^2}{L^2})$$

Burada;

- $P(x)$: x noktasındaki basınç,
- k: Maksimum basınç (örneğin kalça bölgesinde),
- x: Yatak boyunca yatay eksen üzerindeki nokta,
- L: Yatak uzunluğunun yarısıdır.

4.5. İntegralin Mimari Alanda Uygulamaları

Dikey Bir Levhaya Etki Eden Akışkan Basıncı Ağırlık yoğunluğu w olan bir akışkanın içine batırılmış bir plakanın y-ekseninde $y = a$'dan $y = b$'ye kadar uzansın. $L(y)$, y seviyesinde plakanın yüzeyi boyunca soldan sağa doğru ölçülen yatay şeridin uzunluğu olsun. Bu durumda plakanın bir tarafına akışkanın uyguladığı basınç;

$$F = \int_a^b w(şerit\ genişliği) L(y) \Delta y$$

ile hesaplanır [9].

Boston Şeker Pekmezi Felaketi 15 Ocak 1919'da Boston, Massachusetts'te büyük bir şeker pekmezi tankının patlaması sonucunda 8.700.000 litre pekmez saatte 56 km hızla sokaklara saçılmış ve bir sele dönüşmüştür. Bu felaketin fiziksel boyutunu anlamak için, kabın geometrik yapısını modelleyerek hacmini integral yardımıyla hesaplayalım. Tarihsel kayıtlara göre tank, yarıçapı $(r) = 7.5$ metre ve yüksekliği $(h_{silindir}) = 10$ metre olan silindirik bir yapıya sahiptir ve kısmen yüksekliği $(h_{konik}) = 3$ metre konik bir çatıyla kapatılmıştır.

$$V_{Silindir} = \pi r^2 h = \pi(7.5)^2 10 \approx 1767 m^3$$

Konik kısmı yatay kesitlerin integrali olarak modellenirse

$$V_{Konik} = \int_0^3 \pi(7.5)^2 (1 - \frac{y}{3})^2 dy \approx 176.7 m^3$$

ve toplam hacim

$$V_{Toplam} = V_{Silindir} + V_{Konik} \approx 1944 m^3 (\approx 8.700.000\ litre)$$

olarak hesaplanır. Ayrıca tankın çökmesi, içindeki pekmezin tank duvarlarına uyguladığı hidrostatik basınç ve toplam kuvvetin yeterince analiz edilmemiş olmasından kaynaklanmıştır. Bir silindirik tankta, sıvının her noktasındaki basıncı hidrostatik basınç formülü ile hesaplanabilir.

$$P(h) = \rho g h$$

Burada ρ pekmezin yoğunluğu, g yer çekim ivmesi ve h ise derinliktir. Tankın dikey duvarlarının maruz kaldığı toplam kuvvet ise diferansiyel basınç ele alınarak integralle hesaplanabilir.

$$F = \int_0^H P(h) dA$$

Eğer duvarların her bir dikey kesitinde ele alınan bir dA elemanı $w\ dh$ olarak alınırsa, toplam kuvvet şu şekilde ifade edilir.

$$F = \int_0^H \rho g h (w\ dh) = \frac{1}{2} \rho g w H^2$$

Bu ifade, tank duvarlarının tabana yakın noktalarında en yüksek kuvvete maruz kaldığını gösterir. Eğer bu kuvvetler malzemenin akma dayanımını aşarsa tankın çökmesi kaçınılmaz hale gelir. Bu felaket öncesi, tankın 8.700.000 litre pekmezle dolu olduğu düşünüldüğünde, kırıldığı sırada şeker pekmezinin uyguladığı toplam kuvvet integral yardımıyla önceden hesaplanıp gerekli önlemler alınabilirdi. Ancak bu pekmez felaketi sonucunda 21 kişi ölmüş 150 kişi de yaralanmıştır.

Katener Eğrisi Hiperbolik fonksiyonların fiziksel bir uygulaması asılı kabloları içerir. Kendi ağırlığı dışında herhangi bir yük olmadan iki destek arasında eşit yoğunlukta bir kablo asılırsa, kablo katener adı verilen bir eğri oluşturur. Yüksek voltajlı elektrik hatları, iki direk arasında asılı zincirler ve bir örümcek ağının telleri katener oluşturur. Bu asılı zincirlerin uzunluğu;

$$\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2 dx}$$

integrali yardımıyla hesaplanır.

5. Sonuç

Bu çalışmada ilk olarak integral hesabın nasıl bulunduğu, integral hesaba neden ihtiyaç duyulduğu ve integral hesap üzerine yapılan çalışmalar ile integral hesabın gelişimi ele alınmıştır. Daha sonra günlük hayatta integralin kullanımı ve integral hesabın gelişimiyle günlük hayatta sağladığı kolaylıklar ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Sonuç olarak integral hesabın farklı alanlarda kullanımı bu alanda araştırma yapan bilim insanları için bir motivasyon kaynağı haline gelmiştir ve böylelikle integral kavramı analizin en önemli kavramlarından biri olarak yerini korumaktadır ve farklı alanlarda uygulamalarına ilişkin çalışmalara devam edilmektedir.

Etik Kurul Onayı

Bu çalışmada etik kurul onayına gerek duyulmamaktadır.

Katkı Oranı

Yazarlar bu çalışmaya eşit katkıda bulunmuştur.

Çıkar Çatışması

Yazarlar çıkar çatışması beyan etmemektedir.

Kaynaklar

1. Dönmez A. Matematiğin öyküsü ve serüveni: Yunan matematiği IV. Cilt. İstanbul: Toplumsal Dönüşüm Yayınları; 2002.
2. Kabaca T. Matematiğin deneysel gelişimi ve öğretimindeki uzantısı: analiz dersi örneği. Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 2011;30(30):173-177.
3. Akbulut K, Akgün L. Matematik ve sonsuzluk. Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi, 2005;11:548-559.
4. Ülger A. Matematik dünyası dergisi. 2003;Yaz:49-53.
5. Keshet L. Integral calculus with applications to the life sciences. Vancouver: Mathematics Department, University of British Columbia, 2014.
6. Yavuz İ. Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar. 2. baskı. Ankara: Pegem Akademi; 2015.
7. Balcı M. Matematik analiz: cilt 1. 7. baskı. Ankara: Balcı yayınları; 1997.
8. Herman EJ, Strang G. Calculus volume 2. University of Wisconsin-Stevens Point Gilbert Strang, Massachusetts Institute of Technology; 2016.
9. Özalp N. Matematiksel modelleme. Gazi Kitabevi; 2006.
10. Pulley LC. Analyzing predator-prey models using systems of ordinary linear differential equations, Honors Thesis, Southern Illinois University Carbondale, USA, 2011.
11. Murray JD. Mathematical biology: I. An Introduction, Third edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.

12. Çelik E, Uçar D. Analysis of the logistic growth model with Taylor matrix and collocation method. International Journal of Analysis and Applications, 2023;21:58-58.
13. Thomas GB Jr, Weir MD, Hass J. Early Transcendentals. San Francisco (CA), USA: WH Freeman; 2014.
14. Tan ST. Calculus for the managerial, life, and social sciences. Pacific Grove (CA): Brooks Cole, 1997.