C.B.Ü. Fen Bilimleri Dergisi ISSN 1305-1385 C.B.U. Journal of Science
2.2 (2006) 135 – 139 2.2 (2006) 135 –139

# ASAL YAKIN HALKALAR ÜZERİNE

**Akın Osman ATAGÜN***

Erciyes Üniversitesi, Yozgat Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 66100 Yozgat, TÜRKİYE

**Özet:** Yakın-halkalarda asallığın bir çok farklı genelleştirilmesi çalışılmıştır. Bu çalışmada, asal yakın-halkalar için $c_1$-asal yakın-halkalar adıyla yeni bir genelleştirme verilmiştir. Bir N yakın-halkası üzerinde, $c_1$-N-grup kavramı tanımlanmış ve $c_1$-asal yakın-halkalar ile $c_1$-N-gruplar arasında literatüre uygun bir ilişki olduğu ispatlanmıştır. 1990 yılında Booth, Groenewald ve Veldsman tarafından tanıtılan e-asal yakın-halkaların, aynı zamanda $c_1$-asal olduğu ispatlanmıştır. Bunun tersinin yakın-halkanın sıfır-simetrik olması halinde bile doğru olmayacağına bir örnek verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** *Asal yakın-halka, N-grup, e-asal*

# ON PRIME NEAR-RINGS

**Abstract:** Several different generalizations of primeness in near-rings have been studied. In this study, a new generalization for prime near-rings called $c_1$-primeness has been given. On a near-ring N, the concept $c_1$-N-group has been defined and it has been proved that there is a relation, which is suitable in the literature, between $c_1$-prime near-rings and $c_1$-N-groups. It has been proved that the e-prime near-rings, defined by Booth, Groenewald and Veldsman in 1990, are also $c_1$-prime. An example has been given for the converse is not true even when N is zero-symmetric.

**Key Words:** *Prime near-ring, N-group, e-prime.*
**MOS Classification**. 16Y30.

---

*aoatagun@erciyes.edu.tr

## 1. GİRİŞ

Yakın-halkalarda asallık kavramı için bazı genelleştirmeler bir çok yazar tarafından tanımlanmıştır. [1] de Holcombe yakın-halkalar için üç farklı asallık kavramı üzerinde çalışmış ve bunları 0-, 1- ve 2-asal şeklinde adlandırmıştır. Groenewald bu kavramlar üzerinde yeni sonuçlar elde etmiş ve 3-asallık adıyla yeni bir genelleştirme vermiştir [2]. Booth, Groenewald ve Veldsman e-asallık adıyla farklı bir tanım ortaya koymuşlardır [3].

Bu çalışmada, bir N yakın-halkasında N-grupsallık kavramı tanıtılacak ve bunun yardımıyla $c_1$-asal yakın-halka olarak isimlendirilen, yukarıda belirtilen genelleştirmelere bir yenisi ilave edilecektir. Halkalarda karşılığı modüller olan, bir N yakın-halkasının N-grupları için, $c_1$-asal yakın-halka tanımına uygun olarak, $c_1$-N-grup kavramı tanıtılacak ve $c_1$-asal yakın-halkalar ile $c_1$-N-gruplar arasında literatüre uygun bir ilişki olduğu ispatlanacaktır. e-asal yakın-halkaların, aynı zamanda $c_1$-asal olduğu ispatlanmıştır. Fakat, bunun tersinin yakın-halkanın sıfır-simetrik olması durumunda dahi doğru olmayacağına bir örnek verilmiştir.

## 2. ÖNBİLGİLER

Bir $N$ cümlesi, "+" ve "." şeklinde gösterilen iki ikili işlem ile, $(N,+)$ değişmeli olması gerekmeyen bir grup, $(N,.)$ bir yarı grup ve $\forall x,y,z \in N$ için $(x+y)z = xz+yz$ (sağdan dağılma) özelliklerini sağlıyorsa, $(N,+,.)$ üçlüsüne bir sağ yakın-halka denir.

Bu çalışma da, tüm yakın-halkalar sağ yakın-halka olarak alınacaktır. Bir $N$ yakın-halkasında, $N_o = \{ n \in N : n0 = 0 \}$ cümlesine $N$ yakın-halkasının sıfır-simetrik kısmı adı verilir. Eğer $N = N_o$ ise, $N$ ye bir sıfır-simetrik yakın-halka denir.

$N$ bir yakın-halka olsun. $N$ üzerinde bir yakın-modül, ya da daha çok kullanılan ifadesiyle bir $N$-grup, aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\Gamma$ toplamsal grubu ile birlikte $\Gamma$ üzerinde $N$ nin bir işlemine (yani, $N\times\Gamma \to \Gamma, (x,\gamma) \mapsto x\gamma$ şeklindeki bir dönüşüme) denir: $\forall x,y \in N$ ve $\forall \gamma \in \Gamma$ için, $(x+y)\gamma = x\gamma + y\gamma$ ve $(xy)\gamma = x(y\gamma)$. $N$ bir yakın-halka ve $\Gamma$ bir $N$-grup olsun. $\Gamma$ nın $N\Delta \subseteq \Delta$ (N-grup işlemi altında) şartını sağlayan bir $\Delta$ alt grubuna $\Gamma$ nın bir $N$-alt grubu denir ve $\Delta \leq_N \Gamma$ ile gösterilir. Eğer $(0:\Gamma)_N = \{ n \in N : \forall\gamma \in \Gamma \ için \ n\gamma = 0 \} = \{0\}$ ise $\Gamma$ ya bir faithful $N$-grup adı verilir.

$N$ bir yakın-halka ve $A;B \subseteq N$ olsun. Bu durumda $AB = \{ ab : a \in A, b \in B \}$ şeklinde tanımlanacaktır. 1990 yılında Booth, Groenewald ve Veldsman [3] e-asal yakın-halka tanımını şu şekilde vermişlerdir: $N$ bir yakın-halka olsun. Eğer $x, y \in N$ , $0 \neq a \in N$ ve $\forall n \in N$ için $anx = any$ iken $x = y$ oluyorsa, $N$ ye bir e-asal yakın-halka denir.1992 yılında Booth ve Groenewald [4] e-asal $N$-grup tanımını şu şekilde vermişlerdir: $N$ bir yakın-halka ve $\Gamma$ bir $N$-grup olsun. Eğer, $N\Gamma \neq 0_\Gamma$, $a \in N - (0:\Gamma)_N$, $\forall n \in N$ ve $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ için $an\gamma_1 = an\gamma_2$ olması $\gamma_1 = \gamma_2$ olmasını gerektirir, $N0_\Gamma = 0_\Gamma$ şartları sağlanıyorsa $\Gamma$ ya bir e-asal $N$-grup denir. e-asal yakın-halkalar ve e-asal $N$-gruplar arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır: $0 \neq N$ bir yakın-halka olsun. Bu durumda $N$ nin bir e-asal yakın-halka olması için gerek ve yeter şart $N$ nin bir faithful e-asal $N$-grubu olmasıdır [4]. Bu çalışmada $c_1$-asal yakın-halkalar ile $c_1$-N-gruplar arasında yukarıdakine benzer bir ilişki olduğu da ispatlanacaktır.

Çalışmada tanımı verilmeyen kavramlar için [5] kaynak olarak alınabilir.

## 3. YAKIN-HALKALARDA GRUPSALLAR

Yakın-halka tanımından da görüleceği gibi, her halka aynı zamanda bir yakın-halkadır. Bu kesimde, sadece yakın-halkalar değil halkalar için de yeni bir yapı olan grupsallık kavramı tanıtılmıştır.

**3.1 Tanım** $N$ bir yakın-halka ve $A \subseteq N$ olsun. Eğer $NA \leq N$ ise, yani $(NA,+)$ $(N,+)$ nın bir alt grubu ise, $A$ ya bir $N$-grupsal denir ve $A \leq_c N$ ile gösterilir.

**3.2 Lemma** $N$ bir yakın-halka olsun. Bu durumda $N$ nin kendisi ve $N$ nin tek noktalı her alt cümlesi bir $N$-grupsaldır.

**İspat:** $\forall n \in N$ için $(Nn,+)$, $(N,+)$ nın bir alt grubudur. Gerçekten, $N$ bir sağ yakın-halka olduğundan $\forall x, y \in N$ için $xn - yn = (x - y)n \in Nn$ dir.

Yakın-halkalarda grupsallık kavramı için aşağıdaki örnekler verilebilir:

**3.3 Örnek** $Z$ tam sayılar halkasında $\{0,2\}$ ve $\{0,3\}$ alt cümleleri $Z$-grupsaldır. Fakat bunların birleşimi olan $\{0,2,3\}$ alt cümlesi bir $Z$-grupsal değildir. Buradan herhangi iki grupsalın birleşiminin yine bir grupsal olmak zorunda olmadığı görülür.

**3.4 Örnek** $S_3$ simetrik grubu üzerinde Çizelge 1 ile verilen işlemler altında tanımlanan $N$ yakın-halkasını alalım [6, Example 3.7].

| + | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 1 | 0 | 5 | 4 | 3 | 2 |
| 2 | 2 | 4 | 0 | 5 | 1 | 3 |
| 3 | 3 | 5 | 4 | 0 | 2 | 1 |
| 4 | 4 | 2 | 3 | 1 | 5 | 0 |
| 5 | 5 | 3 | 1 | 2 | 0 | 4 |

| · | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 2 |
| 4 | 0 | 0 | 5 | 4 | 4 | 5 |
| 5 | 0 | 0 | 4 | 5 | 5 | 4 |

Çizelge 1

Eğer $A=\{0\},\{1\}$ veya $\{0,1\}$ alınırsa, $NA=\{0,1\}$ ve dolayısıyla Çizelge 1 den de görüleceği gibi $A\leq_c N$ dir. $N$ nin bunlar dışındaki tüm $A$ alt cümleleri için $NA=N$ olduğundan yine $A\leq_c N$ dir. O halde $N$ yakın-halkasının tüm alt cümleleri $N$-grupsaldır.

## 4. $C_1$-ASAL YAKIN-HALKALAR VE $C_1$-*N*-GRUPLAR

**4.1 Tanım** $N$ bir yakın-halka olsun. Eğer $x,y\in N$ ve $\forall\, 0\neq A,B\leq_c N$ için $Ax=By$ olması $x=y$ olmasını gerektiriyorsa $N$ ye bir $c_1$-asal yakın-halka adı verilir.

Bu tanıma benzer olarak aşağıdaki tanımı verebiliriz.

**4.2 Tanım** $N$ bir yakın halka ve $\Gamma$ bir $N$-grup olsun. Eğer $\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma$ ve $\forall\, 0\neq A,B\leq_c N$ için $A\gamma_1=B\gamma_2$ olması $\gamma_1=\gamma_2$ olmasını gerektiriyorsa, $\Gamma$ ya bir $c_1$-*N*-grup adı verilir.

Bir $c_1$-asal $N$ yakın-halkası ile $c_1$-*N*-gruplar arasında aşağıdaki ilişki mevcuttur.

**4.3 Önerme** $0\neq N$ sıfır-simetrik bir yakın-halka olsun. Bu taktirde, $N$ nin $c_1$-asal olması için gerek ve yeter koşul sıfırdan farklı bir $\Gamma$ faithful $c_1$-*N*-grubunun mevcut olmasıdır.

**İspat:** $N$ $c_1$-asal olsun. $\Gamma=N$ alınırsa ispatın birinci tarafı elde edilir. Yani $N$ nin kendisi bir faithful $c_1$-*N*-gruptur. İspatın ikinci tarafı için, $\Gamma$ nın sıfırdan farklı bir faithful $c_1$-*N*-grup olduğunu kabul edelim. $x,y\in N$ ve $\forall\, 0\neq A,B\leq_c N$ için $Ax=By$ olsun. Bu durumda $Ax-By=0$ dır. Dolayısıyla $\forall\gamma\in\Gamma$ için

$$\begin{aligned}(Ax-By)\gamma &= (Ax)\gamma-(By)\gamma\\ &= A(x\gamma)-B(y\gamma)=0\gamma=0\end{aligned}$$

dır. Burada $x\gamma=\gamma_1$, $y\gamma=\gamma_2$ diyelim. Dolayısıyla $A\gamma_1=B\gamma_2$ dir. $\Gamma$ bir $c_1$-*N*-grup olduğundan $\gamma_1=\gamma_2$ dir. O halde $\forall\gamma\in\Gamma$ için $x\gamma=y\gamma$ ve buradan $(x-y)\gamma=0$ elde edilir. $\Gamma$ faithful olduğundan $x-y\in(0:\Gamma)_N=0$, yani $x=y$ olur. Bu ise $N$ nin $c_1$-asal olduğunu gösterir.

Aşağıdaki teorem $c_1$-asallık ve e-asallık arasındaki ilişkiyi vermektedir.

**4.4 Teorem** Her e-asal yakın-halka bir $c_1$-asal yakın-halkadır.

**İspat:** $N$ bir e-asal yakın-halka, $x,y\in N$ ve $x\neq y$ olsun. O halde e-asallık tanımından $anx\neq any$ olacak şekilde bir $a\in N-\{0\}$ ve bir $n\in N$ vardır. 3.2. Lemma dan $\forall\, a,n\in N$ için $\{an\}\leq_c N$ dir. Eğer $A=B=\{an\}$ alınırsa, $Ax\neq By$ olacak şekilde $0\neq A,B\leq_c N$ elde edilir. Dolayısıyla $N$ $c_1$-asaldır.

Bu teoremin tersi yakın-halkanın sıfır-simetrik olması durumunda dahi doğru değildir. Bunu göstermek için aşağıdaki örnek yeterlidir.

**4.5 Örnek** [7, example 4] $(N,+)$ mertebesi $\geq 3$ olan bir grup olsun. Bu grup üzerinde çarpma işlemi,

$$xy = \begin{cases} x & , y \neq 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases}$$

ile tanımlanırsa $N$ bir sıfır-simetrik sağ yakın-halka olur. $N$ nin bir $c_1$-asal yakın-halka olduğunu gösterelim. $0 \neq x, y \in N$ , $x \neq y$ alalım. $a, b \in N$, $a \neq b$ olmak üzere $A = \{0, a\}$ ve $B = \{0, b\}$ seçelim. Bu durumda $NA = NB = N$ olduğundan $0 \neq A, B \leq_c N$ dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} Ax &= \{0, a\}x = \{0x, ax\} = \{0, a\} = A \neq B \\ &= By = \{0y, by\} = \{0, y\} \end{aligned}$$

yani $Ax \neq By$ elde edilir. Dolayısıyla $N$ $c_1$-asaldır. Şimdi $N$ nin e-asal olmadığını gösterelim. $0 \neq x, y \in N$ , $x \neq y$ alalım. Bu durumda,

$$\begin{cases} xnx = xny = x & , n \neq 0 \\ xnx = xny = 0 & , n = 0 \end{cases}$$

yani $\forall\, n \in N$ için $xnx = xny$ , fakat $x \neq y$ dir. Dolayısıyla $N$ bir e-asal yakın-halka değildir.

## KAYNAKLAR


**1.** Holcombe, W. L. M., Primitive near-rings, Doctoral Dissertation, University of Leeds, 1970.

**2.** Groenewald, N. J., Different Prime Ideals in Near-rings, Comm. Algebra, 10, 2667-2675, 1991.

**3.** Booth. G. L., Groenewald, N. J., Veldsman, S., A Kurosh-Amitsur Radical For Near-rings, Comm. Algebra 18, 3111-3122, 1990.

**4.** Booth. G. L., Groenewald, N. J., Equiprime Left Ideals and Equiprime N-groups of a Near-ring, Contributations to General Algebra 8, 25-38, 1992.

**5.** Pilz, G., Near-rings, 2nd. ed., Amsterdam, North-Holland, 1983.

**6.** Groenewald, N. J., Prime near-rings and Special Radicals, East-West J. of Math., 3, 147-162, 2001.

**7.** Booth. G. L., Groenewald, N. J., Different Prime Ideals in Near-rings II, Rings and Radicals (B. J. Gardner, Liu Shaoxue, R. Wiegandt (eds.)), Shijiazhaung 1994, Pitman Res. Notes Math., 346, 131-139, 1996.


*Geliş Tarihi: 05/01/2006* *Kabul Tarihi: 09/05/2006*