C.B.Ü. Fen Bilimleri Dergisi ISSN 1305-1385 C.B.U. Journal of Science
3.1 (2007) 1-14 3.1 (2007) 1-14

LORENTZ DÖNÜŞÜMLERİNİN KOMPLEKS KUATERNİONLARLA İNCELENMESİ

Süleyman DEMİR[1,*]

[1]Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi Fizik Bölümü, Yunusemre Kampüsü, 26470 Eskişehir.

Özet: Bu çalışmada rölativistik fiziğin yapı taşlarından biri olan Lorentz dönüşümlerinin kompleks kuaternionik temsili için alternatif bir yöntem önerilmiştir. Kompleks kuaternionlarla Lorentz dönüşümlerinin incelenmesi yeni değildir. Fakat önerilen yöntem mevcutlarından daha basit bir formülasyon öne sürmektedir. Bu çalışmada ayrıca elde edilen matematiksel ifadelerin matris temsillerinin elde edilmesi de hedeflenmektedir. Önerilen yöntem basitliği, çok yönlü doğası ve özel matris temsillerine olanak vermesi nedeniyle oldukça kullanışlıdır.

Anahtar Kelimeler: *Kompleks Kuaternion, Lorentz Dönüşümleri, Matrisler.*

INVESTIGATION OF LORENTZ TRANSFORMATIONS BY USING COMPLEX QUATERNIONS

Abstract: In this paper, an alternative method is proposed for the complex quaternionic representation of Lorentz transformations that are one of the cornerstones of relativistic physics. Investigation of Lorentz transformations by using complex quaternions isn't new. But proposed method introduces much more simpler formulation than existing methods. Furthermore in this paper, the matrix representations of derived mathematical expressions are also obtained. Proposed method is much more useful because of its simplicity, multipurpose nature and enabling to use special matrix representations.

Key words: *Complex Quaternion, Lorentz Transformations, Matrices*.

Geliş Tarihi:17.11.2005 *Kabul Tarihi: 18.04.2006*

---

[*] sudemir@anadolu.edu.tr

1. GİRİŞ

Günümüzde reel, dual ve kompleks olmak üzere üç farklı tipi olan kuaternionlar 1843 yılında İrlandalı matematikçi William Rowan Hamilton'un kompleks sayıları üç boyutlu uzaya taşımak amacıyla yaptığı çalışmalar sırasında bulunmuştur [1]. Reel kuaternionlar adından anlaşılacağı üzere dört reel bileşenden oluşur ve diğer kuaternion türlerinin tanımlanması açısından temel rol oynar. Zira iki reel kuaternionun bir "ε" dual birimi ($\varepsilon^2 = 0$) ile kombinasyonundan dual kuaternion, iki reel kuaternionun bir "i" kompleks sayısı ($i^2 = -1$) ile kombinasyonundan da kompleks kuaternion oluşturulmaktadır. Bu yolla elde edilen yapılar doğal olarak sekiz bileşenli bir karakter taşıyacaktır.

Sekiz boyutlu kompleks kuaternionlar bilim tarihinin yapı taşları olan birçok fiziksel eşitliğin daha kısa ve daha kullanışlı bir biçimde ifade edilebilmesine olanak tanımaktadırlar. Kompleks kuaternionlar yardımıyla birbirleriyle çok yakından ilişkili olan elektrik ve manyetik alanların birlikte ifade edilmesi mümkün olmaktadır. Imaeda tarafından 1976 yılında yapılan bir çalışmada kompleks kuaternionlar kullanılarak klasik elektromanyetizmanın temel denklemleri yeniden ifade edilmiştir [2]. Bu çalışmadan etkilenen Negi ve arkadaşları, kompleks kuaternionların izomorfik 8×8 matris temsillerini tanımlamış, Maxwell denklemlerinin kapalı ve açık biçimlerini de vermişlerdir [3]. Yine Lambek [4], Gürsey ve Tze [5], Colombo ve arkadaşları [6], Gsponer ve Hurni [7] tarafından yapılan benzer incelemelerde Maxwell'in dört eşitliği daha kısa ve daha şık formdaki tek eşitliğe indirgenmiştir. Kompleks kuaternionların kullanıldığı rölativistik elektromagnetizmaya ilişkin çalışmalar ise Silberstein [8], Sobczyk [9], Jantzen [10], Abonyi ve arkadaşları [11], Kassandrov [12] ve Ward [13] tarafından yapılmıştır. Bu çalışmalarda genel olarak Maxwell denklemlerinin Lorentz dönüşümleri altındaki yeni formları elde edilmiştir.

Kompleks kuaternionların imajiner özellikleri baskın olduğu için kuantum mekaniksel incelemelerde için de oldukça uygun bir yapıdadır. Aynı zamanda bikuaternion olarak da adlandırılan kompleks kuaternionlar, Conte [14] tarafından bu alana uygulanırken De Leo ve arkadaşları ise kuantum mekaniksel bağıntıları elde etmiştir [15-16].

Kuaternionların kullanım alanlarından birisi de rölativistik mekaniğin incelenmesidir. Silberstein 1912 yılında yayınlanan çalışmasında Lorentz dönüşümlerini kuaternionlarla ifade etmeyi başarmıştır [8]. Rölativistik incelemelerde kuaternionların kullanıldığı son yıllardaki diğer çalışmaların yine Lorentz dönüşümleri üzerinde yoğunlaştığı görülmektedir [17-21]. Öte yandan De Leo tarafından yapılan çalışmada ise reel kuaternionlar kullanılarak özel rölativite teorisi incelenmiştir [22].

Kompleks kuaternionlarla Lorentz dönüşümlerinin incelenmesi yeni değildir. Fakat mevcut formülasyonlar incelendiğinde genelde ifadelerin birçok karmaşık trigonometrik bağıntı ile vektörel eşitliğe ihtiyaç duyduğu ve çok sayıda basamak ile işlemden oluştuğu görülmektedir. Fakat bu çalışmada önerilen yöntem, benzeri ile karşılaştırıldığında [13] oldukça kısa, basit ve açıklayıcıdır.

Genel olarak literatürde elde edilen matematiksel ifadelerin daha iyi anlaşılması açısından bunların matris temsillerinin de verilmesi yaygın olarak tercih edilen bir yöntemdir. Bu çalışmada reel kuaternionik matrisler için tanımlanan birçok yararlı eşitlik kompleks kuaternion uygulamaları için de genelleştirilmiştir. Bu yolla kompleks kuaternionlar için geçerli olmayan değişme özelliği, tanımlanan hem dört boyutlu kompleks matrislerle hem de sekiz boyutlu reel matrislerle gerçekleştirilmiştir. Böylece dört boyutlu ve sekiz boyutlu özel dönüşüm matrisleri de elde edilmiştir. Önerilen yöntem basitliği, çok yönlü doğası ve özel matris temsillerine olanak vermesi nedeniyle oldukça kullanışlıdır.

2. KOMPLEKS KUATERNİONLAR

Kompleks kuaternionlar, reel kuaternionların kompleks bir ifadesidir. $\mathbf{q}$ ve $\mathbf{q}'$ reel kuaternionları;

$$\mathbf{q} = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3 \tag{2.1}$$

ve

$$\mathbf{q}' = q_0'\boldsymbol{e}_0 + q_1'\boldsymbol{e}_1 + q_2'\boldsymbol{e}_2 + q_3'\boldsymbol{e}_3 \tag{2.2}$$

ile verilmek üzere $\mathbf{Q}$ kompleks kuaternionu;

$$\begin{aligned}\mathbf{Q} = \mathbf{q} + i\mathbf{q}' &= (q_0 + iq_0')\boldsymbol{e}_0 + (q_1 + iq_1')\boldsymbol{e}_1 \\ &\quad + (q_2 + iq_2')\boldsymbol{e}_2 + (q_3 + iq_3')\boldsymbol{e}_3 \\ &= Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 + Q_2\boldsymbol{e}_2 + Q_3\boldsymbol{e}_3\end{aligned} \tag{2.3}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $i^2 = -1$ olup, Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 ise kompleks bileşenlerdir. Kuaternionların taban elemanları olan $\boldsymbol{e}_0$ ve $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ aşağıdaki çarpım kurallarına uyarlar:

$$\boldsymbol{e}_0^2 = 1,\ \boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k = -\delta_{jk}\boldsymbol{e}_0 + \varepsilon_{jkl}\,\boldsymbol{e}_l \quad j,k,l = 1,2,3\,. \tag{2.4}$$

Burada δ_{jk} ve ε_{jkl} terimleri sırasıyla Kronecker deltası ve Levi-Civita sembollerini göstermektedir. Genel olarak reel bileşenlerden oluşan kuaternionlar reel kuaternion, kompleks bileşenlerden oluşan kuaternionlar da kompleks kuaternion olarak adlandırılır. Bir $\mathbf{P}$ kompleks kuaternionu skalar (P_0) ve vektörel bileşenleri ($P_1\boldsymbol{e}_1 + P_2\boldsymbol{e}_2 + P_3\boldsymbol{e}_3$) cinsinden,

$$\mathbf{P} = P_0 + \boldsymbol{P} \tag{2.5}$$

şeklinde ifade edilir. $\mathbf{P}$ ve $\mathbf{Q}$ gibi iki kompleks kuaternionunun çarpımı,

$$\begin{aligned}\mathbf{PQ} &= (P_0 + \boldsymbol{P})(Q_0 + \boldsymbol{Q}) \\ &= P_0Q_0 + P_0\boldsymbol{Q} + Q_0\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}.\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}\end{aligned} \tag{2.6}$$

biçiminde tanımlanır. Buradaki nokta ve kros çarpımlar, üç boyutlu uzaydaki skalar ve vektörel çarpımlara karşılık gelmektedir. Her kompleks kuaternion için bir eşlenik tanımlamak mümkündür. $\mathbf{Q}$ kompleks kuaternionunun eşleniği $\mathbf{Q}^*$ ile gösterilir ve

$$\mathbf{Q}^* = Q_{\mathrm{Q}} - \boldsymbol{Q} = Q_0\boldsymbol{e}_0 - Q_1\boldsymbol{e}_1 - Q_2\boldsymbol{e}_2 - Q_3\boldsymbol{e}_3 \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanır. Görüldüğü gibi **Q**' nun eşleniği vektörel kısmın işaretinin değiştirilmesi ile elde edilir. **P**, **Q** kompleks kuaternion olmak üzere bunların çarpımının eşleniği için;

$$(\mathbf{PQ})^* = \mathbf{Q}^*\,\mathbf{P}^* \tag{2.8}$$

ifadesi yazılabilir. Kompleks kuaternionlar için eşlenik ifadesi yanında ayrıca kompleks eşlenik de tanımlanabilir. $\mathbf{Q}^{\mathrm{c}}$ ile gösterilen kompleks eşlenik;

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}^{\mathrm{c}} &= (q_0 - iq_0')\boldsymbol{e}_0 + (q_1 - iq_1')\boldsymbol{e}_1 \\ &\quad + (q_2 - iq_2')\boldsymbol{e}_2 + (q_3 - iq_3')\boldsymbol{e}_3 \\ &= Q_0^{\mathrm{c}}\boldsymbol{e}_0 + Q_1^{\mathrm{c}}\boldsymbol{e}_1 + Q_2^{\mathrm{c}}\boldsymbol{e}_2 + Q_3^{\mathrm{c}}\boldsymbol{e}_3\end{aligned} \tag{2.9}$$

ile verilir ve Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 kompleks sayılarının eşleniğinin alınmasıyla elde edilir. Ele alınan bir $\mathbf{Q}$ kompleks kuaternionunun normu N_{Q} ile gösterilmek üzere;

$$N_{\mathrm{Q}} = \mathbf{QQ}^* = Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 \tag{2.10}$$

şeklinde tanımlanır. Normu sıfırdan farklı olmak kaydı ile bir $\mathbf{Q}$ kompleks kuaternionunun tersi ise,

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^* / N_{\mathrm{Q}} \tag{2.11}$$

şeklinde verilir.

3.KOMPLEKS KUATERNİONLARIN MATRİS TEMSİLLERİ

Literatürde genel olarak elde edilen matematiksel ifadelerin daha açıklayıcı olması açısından matris temsillerinin de verilmesi yaygın olarak tercih edilen bir yöntemdir. Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 kompleks bileşenler olmak üzere $\mathbf{Q}$ kompleks kuaternionunu 4×4

matrislerle temsil etmek mümkündür. Bu amaçla,

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

ve

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

ifadeleri ile verilen Pauli spin matrisleri kullanılarak 4-Boyutlu uzayda kuaternionların taban elemanları $\boldsymbol{e}_0$, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$'e karşılık gelen matrisler;

$$\boldsymbol{\Omega_0} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\boldsymbol{\Omega_1} = \begin{bmatrix} i\boldsymbol{\sigma}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -i\boldsymbol{\sigma}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\boldsymbol{\Omega_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma}_0 \\ -\boldsymbol{\sigma}_0 & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\boldsymbol{\Omega_3} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & i\boldsymbol{\sigma}_2 \\ i\boldsymbol{\sigma}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

biçiminde tanımlanır. Yukarıdaki ifadelerden yararlanarak $\mathbf{q} = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3$ reel kuaternionu,

$$\mathbf{Q} = q_0\boldsymbol{\Omega_0} + q_1\boldsymbol{\Omega_1} + q_2\boldsymbol{\Omega_2} + q_3\boldsymbol{\Omega_3}$$

$$= \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

matrisi ile temsil edilir.

Literatürde reel kuaternionlar için çok sayıda matris eşitliği Chou tarafından verilmiştir [23]. $\boldsymbol{\Omega}_0, \boldsymbol{\Omega}_1, \boldsymbol{\Omega}_2, \boldsymbol{\Omega}_3$ matrisleri, kuaternion baz elemanları için tanımlanan (2.4) eşitliği ile aynı formdaki,

$$\boldsymbol{\Omega}_0^2 = \boldsymbol{\Omega}_0, \quad \boldsymbol{\Omega}_j\boldsymbol{\Omega}_k = -\delta_{jk}\boldsymbol{\Omega}_0 + \varepsilon_{jkl}\,\boldsymbol{\Omega}_l \quad (3.8)$$

çarpım bağıntılarını sağlarlar.

$\mathbf{Q} = Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 + Q_2\boldsymbol{e}_2 + Q_3\boldsymbol{e}_3$ kompleks kuaternionu biçim açısından $\mathbf{q}$ reel kuaternionu ile aynı formatta olduğundan (3.7) ifadesindeki reel bileşenler kompleks bileşenlerle değiştirilerek,

$$\mathrm{Q} = Q_0\boldsymbol{\Omega_0} + Q_1\boldsymbol{\Omega_1} + Q_2\boldsymbol{\Omega_2} + Q_3\boldsymbol{\Omega_3}$$

$$= \begin{bmatrix} Q_0 & Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ -Q_1 & Q_0 & -Q_3 & Q_2 \\ -Q_2 & Q_3 & Q_0 & -Q_1 \\ -Q_3 & -Q_2 & Q_1 & Q_0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

biçimindeki 4×4 kompleks kuaternionik matris elde edilir. $\mathbf{Q}$ kuaternionunu aynı zamanda

$$\mathrm{Q} = \left[Q_0, \quad \boldsymbol{Q}\right]^{\mathrm{T}} = \left[Q_0 \quad Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3\right]^{\mathrm{T}} \quad (3.10)$$

ile verilen 4×1 matris ile de temsil etmek mümkündür. Bir $\mathbf{P}$ kompleks kuaternionunun eşleniği $\mathbf{P}^* = P_0 - \boldsymbol{P}$, imajiner kısmının diğer bir deyişle vektörel kısmının işaretinin değiştirilmesi ile elde edildiğinden bu işlem, $\mathbf{P}$ kompleks kuaternionunu temsil eden matrisin transpozesi alınarak,

$$\mathrm{P}^* = \mathrm{P}^{\mathrm{T}} = P_0\boldsymbol{\Omega_0} - P_1\boldsymbol{\Omega_1} - P_2\boldsymbol{\Omega_2} - P_3\boldsymbol{\Omega_3}$$

$$= \begin{pmatrix} P_0 & -P_1 & -P_2 & -P_3 \\ P_1 & P_0 & P_3 & -P_2 \\ P_2 & -P_3 & P_0 & P_1 \\ P_3 & P_2 & -P_1 & P_0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

biçiminde de gerçekleştirilebilir. Kompleks kuaternionlarla reel kuaternionlar arasındaki bu benzerlikten yararlanarak çok yararlı matris ifadeleri de elde edilebilir. (2.6) eşitliğinde tanımlanan

$\mathbf{PQ}$ kompleks kuaternion çarpımını matris ifadeleri ile de elde etmek mümkündür. $\mathbf{I}_3$, 3×3 birim matris ve $\tilde{\boldsymbol{P}}$ ve $\tilde{\boldsymbol{Q}}$ ise

$$\tilde{\boldsymbol{P}} = \begin{bmatrix} 0 & -P_3 & P_2 \\ P_3 & 0 & -P_1 \\ -P_2 & P_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

$$\tilde{\boldsymbol{Q}} = \begin{bmatrix} 0 & -Q_3 & Q_2 \\ Q_3 & 0 & -Q_1 \\ -Q_2 & Q_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

şeklinde tanımlanan antisimetrik matrisler olmak üzere bu çarpım bağıntısı,

$$\begin{aligned} \mathrm{PQ} &= \begin{bmatrix} P_0 & -\boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} & P_0\mathbf{I}_3 + \tilde{\boldsymbol{P}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_0 \\ \boldsymbol{Q} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_0 & -P_1 & -P_2 & -P_3 \\ P_1 & P_0 & -P_3 & P_2 \\ P_2 & P_3 & P_0 & -P_1 \\ P_3 & -P_2 & P_1 & P_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.14}$$

veya

$$\begin{aligned} \mathrm{PQ} &= \begin{bmatrix} Q_0 & -\boldsymbol{Q} \\ \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} & Q_0\mathbf{I}_3 - \tilde{\boldsymbol{Q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ \boldsymbol{P} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Q_0 & -Q_1 & -Q_2 & -Q_3 \\ Q_1 & Q_0 & Q_3 & -Q_2 \\ Q_2 & -Q_3 & Q_0 & Q_1 \\ Q_3 & Q_2 & -Q_1 & Q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.15}$$

şeklinde temsil edilir. Daha önce vurgulandığı üzere kompleks kuaternion çarpımı değişme özelliğine sahip değildir. Fakat (3.14) ve (3.15) eşitlikleri için,

$$\breve{\mathrm{P}} = \begin{bmatrix} P_0 & -\boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} & P_0\mathbf{I}_3 + \tilde{\boldsymbol{P}} \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

ve

$$\breve{\mathrm{Q}} = \begin{bmatrix} Q_0 & -\boldsymbol{Q} \\ \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} & Q_0\mathbf{I}_3 - \tilde{\boldsymbol{Q}} \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

matrisleri tanımlandığı taktirde bu ifadeleri,

$$\mathrm{PQ} = \breve{\mathrm{P}}\,\mathrm{Q} \tag{3.18}$$

ve

$$\mathrm{PQ} = \breve{\mathrm{Q}}\,\mathrm{P} \tag{3.19}$$

şeklindeki kompakt formda yeniden yazmak mümkün olacaktır. Böylece kompleks kuaternionlar için tanımlı olmayan değişme özelliği matrisler yardımıyla kolaylıkla elde edilebilir:

$$\breve{\mathrm{P}}\,\mathrm{Q} = \breve{\mathrm{Q}}\,\mathrm{P}\ . \tag{3.20}$$

Elde edilen bu özellik daha sonra türetilecek olan dönüşüm matrisleri için belirleyici bir rol oynayacaktır.

Öte yandan sekiz reel bileşenden oluşan $\mathbf{Q} = \mathbf{q} + i\mathbf{q}'$ kompleks kuaternionunu, reel kuaternionların taban elemanları için tanımlanan (3.3)-(3.6) ifadelerinden yararlanarak oluşturulan 8×8 reel matrisle de temsil etmek mümkündür. $\boldsymbol{\eta}$,

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

şeklinde verilen bir matris olmak üzere;

$$\mathbf{K} = \boldsymbol{\eta} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{0}} \\ -\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{0}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

ve

$$\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{j}} = \boldsymbol{\sigma}_0 \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{j}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{j}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{j}} \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2, 3) \tag{3.25}$$

matrisleri türetilsin. Bu matrislerden yararlanarak $\mathbf{Q}$ kompleks kuaternionu,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= (q_0 + \mathbf{K}q_0')\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{0}} + (q_1 + \mathbf{K}q_1')\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{1}} \\ &\quad + (q_2 + \mathbf{K}q_2')\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{2}} + (q_3 + \mathbf{K}q_3')\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{3}} \end{aligned} \tag{3.24}$$

matrisi ile temsil edilir. $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{0}}$, $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{1}}$, $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{2}}$ ve $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{3}}$ matrisleri kuaternion taban elemanları ile aynı çarpım kurallarına uyarlar [3]:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2}} = -\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{j}}^{\mathbf{2}} = \mathbf{I}_{\mathbf{8}} = \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{0}}, \\ &\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{j}}\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{k}} = -\delta_{jk}\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{0}} + \varepsilon_{jkl}\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{l}}, \quad j,k,l = 1,2,3. \end{aligned} \tag{3.25}$$

(3.24) ifadesi gereğince $\mathbf{Q}$ kompleks kuaternionu,

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathrm{Q} & \mathrm{Q}' \\ -\mathrm{Q}' & \mathrm{Q} \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

$$= \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & q_0' & q_1' & q_2' & q_3' \\ -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 & -q_1' & q_0' & -q_3' & q_2' \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 & -q_2' & q_3' & q_0' & -q_1' \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 & -q_3' & -q_2' & q_1' & q_0' \\ -q_0' & -q_1' & -q_2' & -q_3' & q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ q_1' & -q_0' & q_3' & -q_2' & -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2' & -q_3' & -q_0' & q_1' & -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3' & q_2' & -q_1' & -q_0' & -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}$$

matrisi ile temsil edilir [3].

Literatürde kompleks kuaternionların matris ifadeleri için yeterince yararlı eşitlik tanımlanmamıştır. Bu çalışmada, reel kuaternionlarla kompleks kuaternionlar arasındaki 4×4 matris ifadelerindeki benzerlikten yararlanarak çok kullanışlı (3.12)-(3.20) matris ifadeleri elde edilmiştir. Bu eşitliklerde yer alan matris elemanlarının kompleks sayılardan oluştuğu hatırlanmalıdır. Eğer inceleme elemanları reel bileşenlerden oluşan matrislerle yapılmak istenirse, kompleks kuaternionların sekiz reel bileşenden oluşması nedeniyle, doğal olarak sekiz boyutlu matrislerle çalışılması ihtiyacı doğacaktır. Sekiz boyutlu matrisler için henüz (3.12)-(3.20) ifadelerine benzer yararlı eşitlikler geliştirilmemiştir. Bu amaçla ilk olarak $\mathbf{P} = \mathbf{p} + i\mathbf{p}'$ kompleks kuaternionu,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_0 \\ \boldsymbol{p} \\ p_0' \\ \boldsymbol{p}' \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

$$= \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_0' & p_1' & p_2' & p_3' \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

şeklindeki 8×1 matrisle temsil edilsin. Bu ifadede $\boldsymbol{p}$ ile $\boldsymbol{p}'$ sırasıyla $\mathbf{p}$ ve $\mathbf{p}'$ reel kuaternionlarının vektörel kısımlarını göstermektedir. (3.12) ve (3.13) tanımlarındaki kompleks bileşenler yerine reel bileşenler alınarak elde edilen

$$\tilde{\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

ve

$$\tilde{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

şeklindeki özel matrisler tanımlansın. (3.14) ve (3.15) bağıntılarından yararlanarak (2.6) eşitliğinde tanımlanan **PQ** kompleks kuaternion çarpımı için,

$$\mathbf{PQ} = \left[\begin{array}{cc:cc} p_0 & -\boldsymbol{p} & p_0' & -\boldsymbol{p}' \\ \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}} & p_0\mathbf{I_3} + \tilde{\boldsymbol{p}} & \boldsymbol{p}'^{\mathrm{T}} & p_0'\mathbf{I_3} + \tilde{\boldsymbol{p}}' \\ \hdashline -p_0' & \boldsymbol{p}' & p_0 & -\boldsymbol{p} \\ -\boldsymbol{p}'^{\mathrm{T}} & -p_0'\mathbf{I_3} - \tilde{\boldsymbol{p}}' & \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}} & p_0\mathbf{I_3} + \tilde{\boldsymbol{p}} \end{array}\right] \begin{bmatrix} q_0 \\ \boldsymbol{q} \\ q_0' \\ \boldsymbol{q}' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 & p_0' & -p_1' & -p_2' & -p_3' \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 & p_1' & p_0' & -p_3' & p_2' \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 & p_2' & p_3' & p_0' & -p_1' \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 & p_3' & -p_2' & p_1' & p_0' \\ -p_0' & p_1' & p_2' & p_3' & p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ -p_1' & -p_0' & p_3' & -p_2' & p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ -p_2' & -p_3' & -p_0' & p_1' & p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ -p_3' & p_2' & -p_1' & -p_0' & p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_0' \\ q_1' \\ q_2' \\ q_3' \end{bmatrix}$$

veya

$$\mathbf{PQ} = \left[\begin{array}{cc:cc} q_0 & -\boldsymbol{q} & q_0' & -\boldsymbol{q}' \\ \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} & q_0\mathbf{I_3} - \tilde{\boldsymbol{q}} & \boldsymbol{q}'^{\mathrm{T}} & q_0'\mathbf{I_3} - \tilde{\boldsymbol{q}}' \\ \hdashline -q_0' & \boldsymbol{q}' & q_0 & -\boldsymbol{q} \\ -\boldsymbol{q}'^{\mathrm{T}} & -q_0'\mathbf{I_3} + \tilde{\boldsymbol{q}}' & \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} & q_0\mathbf{I_3} - \tilde{\boldsymbol{q}} \end{array}\right] \begin{bmatrix} p_0 \\ \boldsymbol{p} \\ p_0' \\ \boldsymbol{p}' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_0' & -q_1' & -q_2' & -q_3' \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 & q_1' & q_0' & q_3' & -q_2' \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 & q_2' & -q_3' & q_0' & q_1' \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 & q_3' & q_2' & -q_1' & q_0' \\ -q_0' & q_1' & q_2' & q_3' & q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ -q_1' & -q_0' & -q_3' & q_2' & q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_2' & q_3' & -q_0' & -q_1' & q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3' & -q_2' & q_1' & -q_0' & q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_0' \\ p_2' \\ p_2' \\ p_3' \end{bmatrix}$$

matris ifadeleri yazılabilir. Bu eşitliklerden yararlanarak,

$$\overset{+}{\mathbf{P}}=\begin{bmatrix} \breve{\mathbf{P}} & \breve{\mathbf{P}}' \\ -\breve{\mathbf{P}}' & \breve{\mathbf{P}} \end{bmatrix}$$

$$=\left[\begin{array}{cc|cc} p_0 & -\boldsymbol{p} & p_0' & -\boldsymbol{p}' \\ \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}} & p_0\mathbf{I}_3+\tilde{\boldsymbol{p}} & \boldsymbol{p}'^{\mathrm{T}} & p_0'\mathbf{I}_3+\tilde{\boldsymbol{p}}' \\ \hline -p_0' & \boldsymbol{p}' & p_0 & -\boldsymbol{p} \\ -\boldsymbol{p}'^{\mathrm{T}} & -p_0'\mathbf{I}_3-\tilde{\boldsymbol{p}}' & \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}} & p_0\mathbf{I}_3+\tilde{\boldsymbol{p}} \end{array}\right] \quad (3.30)$$

ve

$$\overset{-}{\mathbf{Q}}=\begin{bmatrix} \breve{\mathbf{Q}} & \breve{\mathbf{Q}}' \\ -\breve{\mathbf{Q}}' & \breve{\mathbf{Q}} \end{bmatrix}$$

$$=\left[\begin{array}{cc|cc} q_0 & -\boldsymbol{q} & q_0' & -\boldsymbol{q}' \\ \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} & q_0\mathbf{I}_3-\tilde{\boldsymbol{q}} & \boldsymbol{q}'^{\mathrm{T}} & q_0'\mathbf{I}_3-\tilde{\boldsymbol{q}}' \\ \hline -q_0' & \boldsymbol{q}' & q_0 & -\boldsymbol{q} \\ -\boldsymbol{q}'^{\mathrm{T}} & -q_0'\mathbf{I}_3+\tilde{\boldsymbol{q}}' & \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} & q_0\mathbf{I}_3-\tilde{\boldsymbol{q}} \end{array}\right] \quad (3.31)$$

matrisleri tanımlanırsa bu ifadeleri,

$$\mathbf{PQ}=\overset{+}{\mathbf{P}}\mathbf{Q} \quad (3.32)$$

ve

$$\mathbf{PQ}=\overset{-}{\mathbf{Q}}\mathbf{P} \quad (3.33)$$

şeklinde temsil etmek mümkün olacaktır. Dolayısı ile kompleks kuaternionik çarpım bağıntısı,

$$\overset{+}{\mathbf{P}}\mathbf{Q}=\overset{-}{\mathbf{Q}}\mathbf{P} \quad (3.34)$$

biçiminde ifade edilir. Böylece kompleks kuaternionlar için tanımlı olmayan değişme özelliği yukarıda tanımlanan özel matrisler yardımıyla gerçekleştirilebilir.

4. KOMPLEKS KUATERNİONLARLA LORENTZ DÖNÜŞÜMLERİ

Özel rölativite teorisi birbirlerine göre göreli hareket eden iki koordinat sisteminin hareketine dayanır. S gözlem çerçevesine göre pozitif $x-$ekseni yönünde v hızı ile hareket eden S' gözlem çevresinde ölçülen konum ve zaman değerlerini birbirine bağlayan Lorentz dönüşüm denklemleri aşağıdaki gibi özetlenebilir:

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\beta(x-vt) \quad (4.1)$$

$$y'=y\,,\ z'=z\,, \quad (4.2)$$

$$t'=\frac{t-xv/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\beta(t-\mu\, x/c)\,. \quad (4.3)$$

Lorentz dönüşüm denklemleri incelendiğinde uzay ve zaman kavramlarının bağımsız nicelikler olmadığı, aksine birbirleriyle yakından ilişkili olduğu görülmektedir.

Dört boyutlu uzayda basitlik açısından $c=1$ (ışık hızı) olmak üzere t zamanı ile $\vec{r}=r_1\hat{i}+r_2\hat{j}+r_3\hat{k}$ kartezyen konum vektörünü birleştiren,

$$\begin{aligned}\mathbf{R}&=ct+i\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{e}_0+i[r_1\boldsymbol{e}_1+r_2\boldsymbol{e}_2+r_3\boldsymbol{e}_3]\\&=R_0\boldsymbol{e}_0+R_1\boldsymbol{e}_1+R_2\boldsymbol{e}_2+R_3\boldsymbol{e}_3\end{aligned} \quad (4.4)$$

kompleks kuaternionu ele alınsın. Tanımlanacak kuaternionik dönüşüm bağıntısı sonucunda elde edilecek kompleks kuaternionun da,

$$\begin{aligned}\mathbf{R}&=t'+i\boldsymbol{r}'=t'\boldsymbol{e}_0+i[r_1'\boldsymbol{e}_1+r_2'\boldsymbol{e}_2+r_3'\boldsymbol{e}_3]\\&=R_0'\boldsymbol{e}_0+R_1'\boldsymbol{e}_1+R_2'\boldsymbol{e}_2+R_3'\boldsymbol{e}_3\end{aligned} \quad (4.5)$$

formunda olması beklenir. (3.7) ifadesinden yararlanarak $\boldsymbol{r}$ reel kuaternionunu temsil etmek üzere,

$$\mathrm{R}=r_1\boldsymbol{\Omega}_1+r_2\boldsymbol{\Omega}_2+r_3\boldsymbol{\Omega}_3$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & r_1 & r_2 & r_3 \\ -r_1 & 0 & -r_3 & r_2 \\ -r_2 & r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_3 & -r_2 & r_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

kuaternionik matrisi tanımlansın. Öte yandan (4.4) eşitliğindeki $\mathbf{R}$ kompleks kuaternionu (3.24) ve (3.26) ifadeleri gereğince,

$$\mathbf{R}=t\boldsymbol{\alpha}_0+(\boldsymbol{\kappa}r_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(\boldsymbol{\kappa}r_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(\boldsymbol{\kappa}r_3)\boldsymbol{\alpha}_3 \quad (4.7a)$$

şeklinde formüle edilen ve açık formu,

$$
\mathbf{R}=\begin{bmatrix} t\boldsymbol{\Omega}_0 & \mathrm{R} \\ -\mathrm{R} & t\boldsymbol{\Omega}_0 \end{bmatrix}
=\begin{bmatrix}
t & 0 & 0 & 0 & 0 & r_1 & r_2 & r_3 \\
0 & t & 0 & 0 & -r_1 & 0 & -r_3 & r_2 \\
0 & 0 & t & 0 & -r_2 & r_3 & 0 & -r_1 \\
0 & 0 & 0 & t & -r_3 & -r_2 & r_1 & 0 \\
0 & -r_1 & -r_2 & -r_3 & t & 0 & 0 & 0 \\
r_1 & 0 & r_3 & -r_2 & 0 & t & 0 & 0 \\
r_2 & -r_3 & 0 & r_1 & 0 & 0 & t & 0 \\
r_3 & r_2 & -r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & t
\end{bmatrix} \quad (4.7b)
$$

ile verilen 8×8 reel matris ile temsil edilir.

$\mathbf{Q}$ birim kompleks kuaternionu ($N_{\mathrm{Q}} = 1$),

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q} &= q_0 + i\boldsymbol{q} \\
&= Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 + Q_2\boldsymbol{e}_1 + Q_3\boldsymbol{e}_1 \qquad (4.8) \\
&= Q_0 + \boldsymbol{Q}
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlanmak üzere uzay-zamanı birlikte ifade eden $\mathbf{R} = ct + i\,\boldsymbol{r}$ kompleks kuaternionunun rölativistik dönüşüm bağıntısı,

$$
\mathbf{R}' = \mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{Q}_{\mathbf{c}}^{*} \qquad (4.9)
$$

şeklinde ifade edilir. Bu eşitlik, (3.24) ve (4.7) matris tanımları kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R}' &= \mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{Q}_{\mathbf{c}}^{*} \qquad (4.10) \\
&= [q_0\mathbf{a}_0 + (\mathbf{K}q_1)\mathbf{a}_1 + (\mathbf{K}q_2)\mathbf{a}_2 + (\mathbf{K}q_3)\mathbf{a}_3] \\
&\quad [t\mathbf{a}_0 + (\mathbf{K}r_1)\mathbf{a}_1 + (\mathbf{K}r_2)\mathbf{a}_2 + (\mathbf{K}r_3)\mathbf{a}_3] \\
&\quad [q_0\mathbf{a}_0 + (\mathbf{K}q_1)\mathbf{a}_1 + (\mathbf{K}q_2)\mathbf{a}_2 + (\mathbf{K}q_3)\mathbf{a}_3]
\end{aligned}
$$

biçiminde veya daha açık bir ifadeyle

$$
\mathbf{R}' = \begin{bmatrix} q_0\boldsymbol{\Omega}_0 & \mathrm{Q} \\ -\mathrm{Q} & q_0\boldsymbol{\Omega}_0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} t\boldsymbol{\Omega}_0 & \mathrm{R} \\ -\mathrm{R} & t\boldsymbol{\Omega}_0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} q_0\boldsymbol{\Omega}_0 & \mathrm{Q} \\ -\mathrm{Q} & q_0\boldsymbol{\Omega}_0 \end{bmatrix}
$$

şeklinde temsil edilir. Yukarıdaki matris eşitliğini gerçekleştirmek için üç tane 8×8 matrisin çarpılması gerekir. Bu ihtiyaç, başka bir bakış açısına göre belki de kompleks kuaternionik dönüşümünün avantajları yanında eleştirilebilecek tek olumsuz yönüdür. Fakat bu durum, üstesinden gelinemeyek bir nitelik de teşkil etmez. (4.9) dönüşüm bağıntısını,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R}' &= [Q_0 + \mathbf{Q}][Q_0 R_0 + R_0\mathbf{Q} + Q_0\mathbf{R} \\
&\qquad - \mathbf{R}.\mathbf{Q} + \mathbf{R}\times\mathbf{Q}] \qquad (4.11) \\
&= Q_0^2 R_0 + Q_0 R_0\mathbf{Q} + Q_0^2\mathbf{R} - Q_0(\mathbf{R}.\mathbf{Q}) \\
&\quad + Q_0(\mathbf{R}\times\mathbf{Q}) + Q_0 R_0\,\mathbf{Q} - R_0(\mathbf{Q}.\mathbf{Q}) \\
&\quad - Q_0(\mathbf{Q}.\mathbf{R}) + Q_0(\mathbf{Q}\times\mathbf{R}) - \mathbf{Q}(\mathbf{R}.\mathbf{Q}) \\
&\quad - \mathbf{Q}.(\mathbf{R}\times\mathbf{Q}) + \mathbf{Q}\times(\mathbf{R}\times\mathbf{Q})
\end{aligned}
$$

şeklinde yazmak mümkündür. Yukarıdaki denklemlerde skalar çarpım bağıntısı gereğince,

$$
\mathbf{Q}.(\mathbf{R}\times\mathbf{Q}) = 0 \qquad (4.12)
$$

yazılabilir. Bazı kısaltmalardan sonra $\mathbf{R}'$ için,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R}' &= Q_0^2 R_0 + 2Q_0 R_0\mathbf{Q} + Q_0^2\mathbf{R} - Q_0(\mathbf{R}.\mathbf{Q}) \\
&\quad - R_0(\mathbf{Q}.\mathbf{Q}) - Q_0(\mathbf{Q}.\mathbf{R}) - \mathbf{Q}(\mathbf{R}.\mathbf{Q}) \qquad (4.13) \\
&\quad + \mathbf{Q}\times(\mathbf{R}\times\mathbf{Q})
\end{aligned}
$$

genel ifadesine ulaşılır. Vektörel eşitliklerden,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q}\times(\mathbf{R}\times\mathbf{Q}) &= \mathbf{R}(\mathbf{Q}.\mathbf{Q}) - \mathbf{Q}(\mathbf{Q}.\mathbf{R}) \qquad (4.14) \\
&= \mathbf{Q}^2\mathbf{R} - \mathbf{Q}(\mathbf{Q}.\mathbf{R})
\end{aligned}
$$

bağıntısı yazılabildiğine göre (4.13) denklemi,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R}' &= Q_0^2 R_0 + 2Q_0 R_0\mathbf{Q} + Q_0^2\mathbf{R} - 2Q_0(\mathbf{Q}.\mathbf{R}) \qquad (4.15) \\
&\quad - R_0\mathbf{Q}^2 - 2\mathbf{Q}(\mathbf{Q}.\mathbf{R}) + \mathbf{Q}^2\mathbf{R}
\end{aligned}
$$

haline gelir. Bu eşitlikte (4.4) ve (4.5) tanımları kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R}' &= Q_0^2 R_0 - R_0\mathbf{Q}^2 - 2Q_0(\mathbf{R}.\mathbf{Q}) + Q_0^2\mathbf{R} \\
&\quad + 2Q_0 R_0\mathbf{Q} - 2\mathbf{Q}(\mathbf{Q}.\mathbf{R}) + \mathbf{Q}^2\mathbf{R} \\
&= (Q_0^2 - (i\boldsymbol{q})^2)\,t - 2Q_0(i\boldsymbol{r}).(i\boldsymbol{q}) + iQ_0^2\boldsymbol{r} \qquad (4.16) \\
&\quad + 2iQ_0R_0\boldsymbol{q} - 2\,i\boldsymbol{q}(i\boldsymbol{q}).(i\boldsymbol{r}) + (i\boldsymbol{q})^2(i\boldsymbol{r}) \\
&= (Q_0^2 + \boldsymbol{q}^2)\,t + 2Q_0\boldsymbol{r}.\boldsymbol{q} + i[Q_0^2 - \boldsymbol{q}^2]\,\boldsymbol{r} \\
&\quad + 2iQ_0R_0\boldsymbol{q} + 2\,i\boldsymbol{q}\,(\boldsymbol{q}.\boldsymbol{r})
\end{aligned}
$$

ifadesine ulaşılır. Bu ifadede; eşitliğin her iki tarafının birbirine eşit olabilmesi için “i” içeren ve içermeyen terimler eşleştirilmelidir. Böylece uzay ve zamanın rölativistik dönüşümleri için,

$$
t' = (Q_0^2 + \boldsymbol{q}^2)\,t + 2Q_0\boldsymbol{r}.\boldsymbol{q} \qquad (4.17)
$$

$$
\boldsymbol{r}' = [Q_0^2 - \boldsymbol{q}^2]\,\boldsymbol{r} + 2Q_0R_0\boldsymbol{q} + 2\boldsymbol{q}\,(\boldsymbol{q}.\boldsymbol{r}) \qquad (4.18)
$$

bağıntıları yazılabilir. (4.1)-(4.3) Lorentz dönüşümleri x-ekseni yönündeki iki farklı koordinat sisteminin göreceli hareketine dayanır. Fakat genel anlamda aynı yönde olmayan bir $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3$ hızından söz edilmelidir. (4.8) ifadesinde verilen $\mathbf{Q} = Q_0 + \boldsymbol{Q}$ kompleks kuaternionu $\psi = i(\alpha/2)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} q_0 + i\boldsymbol{q} &= \cos\psi + i\frac{\boldsymbol{v}}{v}\sin\psi \\ Q_0 + \boldsymbol{Q} &= \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i\frac{\boldsymbol{v}}{v}\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{aligned} \tag{4.19}$$

şeklinde tanımlansın. Bu tanım (4.17) ifadesinde kullanılarak,

$$\begin{aligned} t' &= \left[\cosh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\boldsymbol{v}^2}{v^2}\sinh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]t \\ &\quad + 2\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\boldsymbol{r.v}}{v} \\ &= t\cosh\alpha + \frac{\boldsymbol{r.v}}{v}\sinh\alpha \end{aligned} \tag{4.20}$$

eşitliği elde edilir. Bu ifadede,

$$\cosh\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \tag{4.21}$$

şeklinde tanımlanmak üzere hiperbolik fonksiyon eşitliklerinden yararlanarak,

$$\sinh^2\alpha = \cosh^2\alpha - 1 = \beta^2 - 1 = \beta^2 v^2 \tag{4.22}$$

ve

$$\sinh\alpha = \pm\beta v \tag{4.23}$$

bulunur. $\sinh\alpha$'nın alabileceği bu iki değerden eksi olanı seçilsin,

$$\sinh\alpha = -\beta v\,. \tag{4.24}$$

(4.21) ve (4.24) tanımları (4.20) eşitliğinde kullanılırsa

$$t' = \beta[t - \boldsymbol{r.v}] \tag{4.25}$$

ifadesi elde edilir.

Benzer şekilde (4.18)'da verilen $\boldsymbol{r}'$ ifadesi için,

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \sinh\alpha\frac{\boldsymbol{v}}{v}t + 2\sinh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v.r})}{v^2} \tag{4.26}$$

eşitliği yazılabilir. Yukarıdaki eşitlikte kullanılmak üzere yine hiperbolik bağıntılardan,

$$\sinh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}(\cosh\alpha - 1) = \frac{1}{2}(\beta - 1) \tag{4.27}$$

ifadesi elde edilebilir. (4.24) ve (4.27) tanımları (4.26) eşitliğinde yerlerine konulursa,

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \beta\boldsymbol{v}t + (\beta - 1)\frac{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v.r})}{v^2} \tag{4.28}$$

dönüşüm denklemi elde edilir. t' ve $\boldsymbol{r}'$ için elde edilen bu denklemler, alışılagelen Lorentz dönüşüm denklemleriyle elde edilen ifadelerle [17] aynıdır.

Rölativistik dönüşümü tanımlayan (4.10) matris eşitliğini 4-Boyutlu matris ifadeleri ile de gerçekleştirmek mümkündür. Bu amaçla (3.9) eşitliğindeki kompleks kuaternion matris tanımı kullanılırsa,

$$\mathrm{Q}' = \mathrm{Q}\,\mathrm{R}\,\mathrm{Q}_c^* \tag{4.29}$$

şeklinde ifade yazılabilir. Matrisler, kuaternionlara benzer şekilde cebirsel özellikleri gereği değişme özelliğini sağlamazlar. Bu nedenle genel bir dönüşüm matrisi elde edebilmek için (3.14) ve (3.15) matris çarpım bağıntıları kullanılabilir. (4.29) matris eşitliğini,

$$\begin{aligned} \mathrm{Q}' &= \mathrm{Q}\,\mathrm{R}\,\mathrm{Q}_c^* = \mathrm{Q}\,\breve{\mathrm{Q}}_c^*\,\mathrm{R} \\ \begin{bmatrix} R_0' \\ \boldsymbol{Q}' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Q_0 & -\boldsymbol{Q} \\ \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} & Q_0\mathbf{I}_3 + \tilde{\boldsymbol{Q}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_0 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & R_0\mathbf{I}_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_0 \\ \boldsymbol{Q} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Q_0 & -\boldsymbol{Q} \\ \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} & Q_0\mathbf{I}_3 + \tilde{\boldsymbol{Q}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_0 & -\boldsymbol{Q} \\ \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} & Q_0\mathbf{I}_3 - \tilde{\boldsymbol{Q}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_0 \\ \boldsymbol{R} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.30}$$

şeklinde yazmak mümkündür. Bu ifade daha açık bir biçimde yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} R_0' \\ R_1' \\ R_2' \\ R_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_0 & -Q_1 & -Q_2 & -Q_3 \\ Q_1 & Q_0 & -Q_3 & Q_2 \\ Q_2 & Q_3 & Q_0 & -Q_1 \\ Q_3 & -Q_2 & Q_1 & Q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_0 & -Q_1 & -Q_2 & -Q_3 \\ Q_1 & Q_0 & Q_3 & -Q_2 \\ Q_2 & -Q_3 & Q_0 & Q_1 \\ Q_3 & Q_2 & -Q_1 & Q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_0 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Q_0^2 - (Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) & -2Q_0Q_1 & -2Q_0Q_2 & -2Q_0Q_3 \\ 2Q_0Q_1 & Q_0^2 - Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 & -2Q_1Q_2 & -2Q_1Q_3 \\ 2Q_0Q_2 & -2Q_1Q_2 & Q_0^2 + Q_1^2 - Q_2^2 + Q_3^2 & -2Q_2Q_3 \\ 2Q_0Q_3 & -2Q_1Q_3 & -2Q_2Q_3 & Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 - Q_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_0 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix}$$

ifadesine ulaşılır. **Q** kuaternionu birim kompleks katernion olduğundan ($N_{\mathrm{Q}} = Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_1^2 = 1$) yukarıdaki matris bağıntısı,

$$\begin{bmatrix} R_0' \\ R_1' \\ R_2' \\ R_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2Q_0^2 - 1 & -2Q_0Q_1 & -2Q_0Q_2 & -2Q_0Q_3 \\ 2Q_0Q_1 & 1-2Q_1^2 & -2Q_1Q_2 & -2Q_1Q_3 \\ 2Q_0Q_2 & -2Q_1Q_2 & 1-2Q_2^2 & -2Q_2Q_3 \\ 2Q_0Q_3 & -2Q_1Q_3 & -2Q_2Q_3 & 1-2Q_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_0 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix}$$

şeklindeki daha basit bir forma indirgenebilir.

$$\mathrm{R} = \begin{bmatrix} R_0 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ ir_1 \\ ir_2 \\ ir_3 \end{bmatrix} \qquad (4.31)$$

$$\mathrm{R}' = \begin{bmatrix} R_0' \\ R_1' \\ R_2' \\ R_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t' \\ ir_1' \\ ir_2' \\ ir_3' \end{bmatrix} \qquad (4.32)$$

matrisleri ile (4.19) ifadesindeki Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 tanımları kullanılarak

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 2Q_0^2 - 1 & -2Q_0Q_1 & -2Q_0Q_2 & -2Q_0Q_3 \\ 2Q_0Q_1 & 1-2Q_1^2 & -2Q_1Q_2 & -2Q_1Q_3 \\ 2Q_0Q_2 & -2Q_1Q_2 & 1-2Q_2^2 & -2Q_2Q_3 \\ 2Q_0Q_3 & -2Q_1Q_3 & -2Q_2Q_3 & 1-2Q_3^2 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$= \begin{bmatrix} \beta & i\beta v_1 & i\beta v_2 & i\beta v_3 \\ -i\beta v_1 & 1+(\beta-1)\dfrac{v_1^2}{v^2} & (\beta-1)\dfrac{v_1v_2}{v^2} & (\beta-1)\dfrac{v_1v_3}{v^2} \\ -i\beta v_2 & (\beta-1)\dfrac{v_1v_2}{v^2} & 1+(\beta-1)\dfrac{v_2^2}{v^2} & (\beta-1)\dfrac{v_2v_3}{v^2} \\ i\beta v_3 & (\beta-1)\dfrac{v_1v_3}{v^2} & (\beta-1)\dfrac{v_2v_3}{v^2} & 1+(\beta-1)\dfrac{v_3^2}{v^2} \end{bmatrix}$$

dönüşüm matrisi tanımlandığı takdirde (4.30) eşitliğini

$$\mathrm{R}' = \mathrm{T}\,\mathrm{R} \qquad (4.34)$$

şeklinde temsil etmek mümkündür.

Eğer incelemenin (4.10) eşitliğinde tanımlandığı gibi sekiz boyutlu reel matrislerle gerçekleştirilmesi istenirse,

$$\mathbf{R}' = \mathbf{QRQ}_{\mathbf{c}}^{*} = \mathbf{Q}\,\bar{\mathbf{Q}}\,\mathbf{R} = \left[\begin{array}{cc:cc} q_0 & \mathbf{0} & q_0' & -\boldsymbol{q}' \\ \mathbf{0} & q_0\mathbf{I}_3 & \boldsymbol{q}'^{\mathrm{T}} & q_0'\mathbf{I}_3 + \tilde{\boldsymbol{q}}' \\ \hdashline -q_0' & \boldsymbol{q}' & q_0 & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{q}'^{\mathrm{T}} & -q_0'\mathbf{I}_3 - \tilde{\boldsymbol{q}}' & \mathbf{0} & q_0\mathbf{I}_3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc:cc} q_0 & \mathbf{0} & q_0' & -\boldsymbol{q}' \\ \mathbf{0} & q_0\mathbf{I}_3 - \tilde{\boldsymbol{q}} & \boldsymbol{q}'^{\mathrm{T}} & q_0'\mathbf{I}_3 - \tilde{\boldsymbol{q}}' \\ \hdashline -q_0' & \boldsymbol{q}' & q_0 & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{q}'^{\mathrm{T}} & -q_0'\mathbf{I}_3 + \tilde{\boldsymbol{q}}' & \mathbf{0} & q_0\mathbf{I}_3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} R_0 \\ 0 \\ 0 \\ \boldsymbol{R} \end{bmatrix} \quad (4.35a)$$

matris eşitliği yazılabilir. Bu ifade daha açık bir biçimde,

$$\begin{bmatrix} t' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ r_1' \\ r_2' \\ r_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2q_0^2-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2q_0q_1' & -2q_0q_2' & -2q_0q_3' \\ 0 & 1+2q_1'^2 & 2q_1'q_2' & 2q_1'q_3' & 2q_0q_1' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2q_1'q_2' & 1+2q_2'^2 & 2q_2'q_3' & 2q_0q_2' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2q_1'q_3' & 2q_2'q_3' & 1+2q_3'^2 & 2q_0q_3' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2q_0q_1' & 2q_0q_2' & 2q_0q_3' & 2q_0^2-1 & 0 & 0 & 0 \\ -2q_0q_1' & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+2q_1'^2 & 2q_1'q_2' & 2q_1'q_3' \\ -2q_0q_2' & 0 & 0 & 0 & 0 & 2q_1'q_2' & 1+2q_2'^2 & 2q_2'q_3' \\ -2q_0q_3' & 0 & 0 & 0 & 0 & 2q_1'q_3' & 2q_2'q_3' & 1+2q_3'^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \qquad (4.35b)$$

ile verilir. (4.19) eşitliğinde verilen $\mathbf{Q}$ kompleks kuaternionunun reel bileşenleri için,

$$q_0 = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right), \qquad (4.36)$$

$$q_1' = \frac{v_1}{v}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right), \qquad (4.37)$$

$$q_2' = \frac{v_2}{v}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right), \qquad (4.38)$$

$$q_3' = \frac{v_3}{v}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right), \qquad (4.39)$$

ile (4.21) ve (4.23) tanımları kullanılarak (4.35) ifadesini gerçekleştiren dönüşüm matrisi ise,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta v_1 & -\beta v_2 & -\beta v_3 \\ 0 & 1+(\beta-1)\frac{v_1^2}{v^2} & (\beta-1)\frac{v_1v_2}{v^2} & (\beta-1)\frac{v_1v_3}{v^2} & \beta v_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\beta-1)\frac{v_1v_2}{v^2} & 1+(\beta-1)\frac{v_2^2}{v^2} & (\beta-1)\frac{v_2v_3}{v^2} & \beta v_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\beta-1)\frac{v_1v_3}{v^2} & (\beta-1)\frac{v_2v_3}{v^2} & 1+(\beta-1)\frac{v_3^2}{v^2} & \beta v_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta v_1 & \beta v_2 & \beta v_3 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ -\beta v_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+(\beta-1)\frac{v_1^2}{v^2} & (\beta-1)\frac{v_1v_2}{v^2} & (\beta-1)\frac{v_1v_3}{v^2} \\ -\beta v_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\beta-1)\frac{v_1v_2}{v^2} & 1+(\beta-1)\frac{v_2^2}{v^2} & (\beta-1)\frac{v_2v_3}{v^2} \\ -\beta v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\beta-1)\frac{v_2v_3}{v^2} & (\beta-1)\frac{v_2v_3}{v^2} & 1+(\beta-1)\frac{v_3^2}{v^2} \end{bmatrix} \qquad (4.40)$$

olmalıdır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Reel kuaternionların kombinasyonu olan kompleks kuaternionlar rölativistik denklemlerin ifade edilmesinde önemli derecede rol oynarlar. İki reel kuaternionu birleştiren "*i*" kompleks sayısı farklı özellikteki birçok fiziksel niceliğin hem birlikte ifade edilmesine hem de birbirlerinden kolaylıkla ayırt edilebilmesine imkan tanır. $\boldsymbol{r}$ uzayı ile t zamanı birlikte ifade edilmesine olanak veren $\mathbf{R} = ct + i\boldsymbol{r}$ kompleks kuaternionu, zaman ve uzay türevlerini birleştiren $\mathbf{D} = (\partial/\partial t) + i\,\nabla$ operatörü, eneji ve momentum niceliklerini ifade eden $\mathbf{P} = (E/c) + i\,\boldsymbol{p}$ kuaternionu, elektrik ve manyetik alanı birleştiren $\mathbf{F} = \boldsymbol{H} + i\boldsymbol{E}$ kompleks kuaternionu bu tür örnekler arasında sayılabilir. Bu şekildeki bir ifade tarzı (4.9) bağıntısına benzer bir dönüşüm sonrasında elde edilen fiziksel sonuçların birbirleriyle kolaylıkla ilişkilendirilebilmesine olanak tanır. (4.4) eşitliğinde görüldüğü gibi

$\mathbf{R}$ kompleks kuaternionunun reel bileşeni ile "zaman", kompleks bileşeni ile de "uzay" ifade edilmiştir. Bu nedenle rölativistik dönüşüm sonucunda elde edilen (4.16) denkleminde "zaman" ve "uzay" bileşenleri kolaylıkla ayırt edilebilmektedir. Nitekim, bu ifadede $\mathbf{R}'$ kompleks kuaternionunun reel bileşeni t' zamanını ile, "i" sayısının bulunduğu kompleks bileşen ise $\boldsymbol{r}'$ uzayı ile ilişkilendirilmiştir.

Bu çalışmada rölativistik fiziğin yapı taşlarından biri olan Lorentz dönüşümlerini kompleks kuaternionik temsili için alternatif bir yöntem önerilmiştir. Önerilen yöntem halihazırda kullanılan [13] ve karmaşık trigonometrik bağıntılara dayalı formülasyon yerine daha basit ve anlaşılır bir formülasyon öne sürmektedir.

Literatürdeki mevcut kompleks kuaternionik çalışmalar incelendiğinde elde edilen matematiksel ifadelerin matris temsillerinin verilmediği görülmektedir. Bunun nedeni kompleks kuaternionların yapısal özelliklerinde aranabilir. Zira kompleks kuaternionlar tanımları gereği reel kuaternionların kompleks bir kombinasyonudur. Dolayısı ile ortaya sekiz reel bileşenden oluşan bir yapı çıkar ki bu durum doğal olarak sekiz boyutlu reel matrislerin kullanımını gerektirir. (4.10) ifadesine benzer bir dönüşüm denkleminde sekiz boyutlu üç matrisin çarpımı gerekir. Literatürde kompleks kuaternionik matrisler için yeterince yararlı eşitlikler üretilmemiştir. Üstelik kuaternionların değişme özelliği göstermemesi nedeniyle genel bir dönüşüm matrisninin elde edilmesinde de zorluklar mevcuttur. Oysa bu çalışmada görüldüğü gibi kompleks kuaternionlar kompleks bileşenler cinsinden ifade edildiğinde biçim bakımından reel kuaternionik matrislerle benzerlik göstermektedir. Bu benzerlikten yararlanarak kompleks kuaternionlar için dört boyutlu matrislerin kullanıldığı (3.14) ve (3.15) çarpım bağıntıları tanımlanmıştır. (3.16) ve (3.17) eşitliğinde tanımlanan özel matrisler yardımıyla (3.20) kompleks kuaternionik değişim bağıntısı elde edilmiştir. Böylece (4.9) ifadesinde verilen kompleks kuaternionik dönüşüm için (4.33)'de tanımlanan 4×4 boyutundaki genel bir dönüşüm matrisi elde edilmiştir.

Yukarıda sözü edilen ifadelerde yer alan matris elemanlarının kompleks bileşenlerden oluştuğu hatırlanmalıdır. Kompleks kuaternionları reel bileşenli matrislerle de temsil etmek mümkündür. Her ne kadar literatürde bir kompleks kuaternionun 8×8 reel matrisle nasıl ifade edileceği verilse de [3] bu matrislerle ilgili olarak kullanışlı bağıntılar tanımlanmamıştır. Oysa bu çalışmada, daha önce 4×4 kompleks matrisler için gerçekleştirildiği gibi, oldukça yararlı (3.32) ve (3.33) çarpım bağıntıları da tanımlanmıştır. (3.30) ve (3.31)'de ifade edilen özel matrisler yardımıyla kompleks kuaternionik sekiz boyutlu reel matrisler için de (3.34) eşitliğinde tanımlanan değişme özelliği kazandırılmıştır. Böylece (4.40) eşitliğinde verilen 8×8 boyutundaki dönüşüm matrisi elde edilmiştir. T dönüşüm matrisi, kompleks kuaternionların reel bileşenler cinsinden ifade edilmesi durumunda dönüşümün daha yalın bir şekilde ifade edilmesini ve daha az işlemle gerçekleştirilmesini sağlamaktadır.

Bu çalışmada; yukarıda bahsedildiği gibi kompleks bileşenlerden oluşan 4×4 matris boyutunda ve reel bileşenlerden oluşan 8×8 boyutunda olmak üzere iki tür dönüşüm matrisi tanımlanmıştır. Hangi dönüşüm matrisinin kullanılacağı amaca göre değişir ve kullanıcının tercihine bırakılmıştır. Zira (4.30)-(4.40) matris ifadeleri elektrik ve manyetik alanı birleştiren $\mathbf{F} = \boldsymbol{E} + i\boldsymbol{H}$ kompleks kuaternionu, enerji ve momentum niceliklerini birlikte ifade eden $\mathbf{P} = (E/c) + i\,\boldsymbol{p}$ kompleks kuaternionik momentumu, elektriksel yük yoğunluğu ile akım yoğunluğunu veren $\mathbf{J} = \rho + i\boldsymbol{J}$ kompleks kuaternionu ile φ skaler potansiyeli ile $\vec{A}$ vektör potansiyelini birleştiren $\mathbf{V} = \varphi + i\boldsymbol{A}$ kompleks kuaternionik potansiyelin yer aldığı tüm rölativistik bağıntıların incelenmesinde kullanılabilir. Elde edilen (4.33) dönüşüm matrisinin, bileşen sayısı nispeten daha az olan $\mathbf{R}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{J}$ ve $\mathbf{V}$ kompleks kuaternionlarının rölativistik ifadeleri için daha uygun bir formatta olduğu düşünülmektedir. Öte yandan (4.40) dönüşüm matrisi ise bileşen sayısı nispeten daha çok olan $\mathbf{F}$ kompleks kuaternionunun rölativistik incelenmesinde tercih edilebilir. Görüldüğü gibi tanımlanan yapılar çok yönlü kullanıma açık olup rölativistik denklemlerin elde edilmesi açısından oldukça yararlıdır.

KAYNAKLAR

[1] Hamilton, W. R., "Elements of Quaternions", Vol.I, II and III, Chelsea, New York, (1899).

[2] Imaeda, K., "A New Formulation of Classical Electrodynamics", Nuovo Cimento, 32B(1): 138-162 (1976).

[3] Negi, O. P. S., et al., "Revisting Quaternion Formulation and Electromagnetism", Nuovo Cimento, 113B(12): 1449-1467 (1998).

[4] Lambek, J., "If Hamilton Had Prevailed: Quaternions in Physics", The Mathematical Intelligencer, 17(4): 7-15 (1995).

[5] Gürsey, F. and Tze, C. H., "On the role of Division, Jordan and Related Algebras in Particle Physics", Singapore, World Scientific, (1996).

[6] Colombo, F. and et al., "Regular Functions of Biquaternionic Variables and Maxwell's Equations", Journal of Geometry and Physics, 26: 183-201 (1998).

[7] Gsponer, A., Hurni, J. P., "Comment on Formulating and Generalizing Dirac's, Proca's, and Maxwell's Equations with Biquaternions or Clifford Numbers", Foundations of Physics Letters, 14(1): 77-85, (2001).

[8] Silberstein, L., "Quaternionic Form of Relativity", Philosophical Magazine, 23; 790-809 (1912).

[9] Sobczyk, G., "Spacetime Vector Analysis", Physics Letters, 84A(2): 45-48 (1981).

[10] Jantzen, R., "Generalized Quaternions and Spacetime Symmetries", J. Mathematical Physics, 23(10): 1741-1746 (1982).

[11] Abonyi, I. and et al. "A Quaternion Representation of the Lorentz Group for Classical Physical Applications", Journal of Physics A: Mathematical and General, 24: 3245-3254 (1991).

[12] Kassandrov, V. V., "Biquaternion Electrodynamics and Weyl-Cartan Geometry of Space-Time", Gravitation and Cosmology, 1(3): 216-222 (1995).

[13] Ward, J. P., "Quaternions and Cayley Numbers", Dordrecht, Boston, London, Kluwer Academic Publishers, (1997).

[14] Conte, E., "On a Generalization of Quantum Mechanics by Biquaternions", Hadronnic Journal, 16, 261-275 1993).

[15] De Leo, S. and Rotelli, P., "Translations Between Quaternion and Complex Quantum Mechanics", Progress of Theoretical Physics, 92(5): 917-926 (1994).

[16] De Leo, S. and Rodrigues W. A., "Quantum Mechanics: From Complex to Complexified Quaternions", Int. Journal of Theoretical Physics, 36(12): 2725-2757 (1997).

[17] Kyrala, A., "Theoretical Physics: Applications of Vectors, Matrices, Tensors and Quaternions", Philadelphia, London, W. B. Saunders Company, (1967).

[18] Rao S. K. N., "On the Quaternion Representation of the Proper Lorentz Group SO(3,1)", Journal of Mathematical Physics , 24(8): 1945-1954 (1983).

[19] Manogue, C., Schray, J., "Finite Lorentz Transformations, Automorphisms and Divison Algebras", Journal of Mathematical Physics, 34(8): 3746-3767 (1993).

[20] Dahm, R., "Complex Quaternions in Spacetime Symmetry and Relativistic Spin-

Flavor Supermultiplets”, Physics of Atomic Nuclei, 61(11): 1885-1891 (1998).

[21] De Leo, S., “Quaternionic Lorentz Group and Dirac Equation”, Foundations of Physics Letters , 14(1): 37-50 (2001).

[22] De Leo, S., “Quaternions and Special Relativity”, Journal of Mathematical Physics, 37(6): 2955-2968 (1996).

[23] Chou, J. C. K., “Quaternion Kinematic and Dynamic Differantial Equations”, IEEE Transaction on Robotics and Automation, 8(1): 53-64 (1992).