C.B.Ü. Fen Bilimleri Dergisi 6.1 (2010) 9 – 18
ISSN 1305-1385
C.B.U. Journal of Science 6.1 (2010) 9 – 18

YÜZEYLERİN SİMETRİLERİ ÜZERİNE BAZI UYGULAMALAR

Derya DOĞAN[1]*, Mustafa KAZAZ[2]

[1]Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 35100 İzmir, TÜRKİYE

[2]Celal Bayar Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 45047 Manisa,TÜRKİYE

Özet: G aşikar olmayan bir sonlu grup ve $\sum_g$ deliği g olan kompakt bağlantılı yönlendirilebilir bir yüzey olsun. Eğer G grubu $\sum_g$ nin yönü koruyan self-homeomorfizmlerinin bir grubu olarak $\sum_g$ üzerinde faithful olarak etki ediyorsa, bu taktirde G ye $\sum_g$ üzerine etkir veya G , $\sum_g$ nin bir simetri grubudur denir. G nin $\sum_g$ üzerine etki edecek şekildeki g değerlerinin kümesini $\nu(G)$ ile gösterelim. Bu çalışmada, $G = C_2 \times C_2$, $G = C_p \times C_p$ (p bir tek asal sayı), A_4, A_5 (alterne gruplar) ve S_4 (simetrik grup) grupları için bu küme hesaplanmıştır. Ayrıca, bu G gruplar için G nin $\sum_g$ üzerine serbest etki edecek şekildeki g değerlerinin $\xi(G)$ kümesi elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Yüzey simetrisi, faithful etki, yönlendirilebilir yüzey*

SOME APPLICATIONS ON SYMMETRIES OF SURFACES

Abstract: Let G be a non-trivial finite group and $\sum_g$ denote a compact connected orientable surface of genus g . If G acts faithfully on $\sum_g$ as a group of orientation-preserving self-homeomorphisms of $\sum_g$, then we say that G acts on $\sum_g$ or that G is a symmetry group of $\sum_g$. Let $\nu(G)$ denote the set of values of g for which G acts on $\sum_g$ In this paper, we compute this set for the groups $G = C_2 \times C_2$, $G = C_p \times C_p$ (p is an odd prime), A_4, A_5 alternating groups and S_4 symmetric group. We also obtain the set $\xi(G)$ of g such that G acts freely on $\sum_g$ for these groups.

Key words: *Symmetries of surfaces, orientation-preserving, faithful action.*

AMS(2000) Classification: 20F34, 30F10, 30F20.

***Sorumlu yazar**

derya.dogan@ege.edu.tr

1. Giriş

G aşikar olmayan sonlu bir grup ve $\sum_g$ deliği g olan kompakt, bağlantılı yönlendirilebilir bir yüzey $\alpha : G \times \sum_g \to \sum_g$, $\sum_g$ üzerinde G nin bir etkisi olsun. Eğer G nin sadece birim elemanı $\sum_g$ nin her elemanını sabit bırakıyorsa α etkisine faithfuldur denir. Eğer $\sum_g$ nin hiçbir elemanı $G-\{1\}$ in herhangi bir elemanı tarafından sabit bırakılmıyorsa bu durumda α etkisine serbest (free) dir denir. Eğer G, $\sum_g$ nin yönü koruyan self-homeomorfizmlerinin grubu olarak faithful etkiye sahipse, bu durumda G ye $\sum_g$ üzerinde etkir veya G ye $\sum_g$ nin bir simetri grubu denir. G nin $\sum_g$ üzerinde etki edecek şekildeki g lerin kümesini $\nu(G)$ ile gösterelim. Bu durumda [4] de Kulkarni $\nu(G)$ kümesinin sonlu sayıda hariç bütün negatif olmayan $g \equiv 1 (\mathrm{mod}\, K)$ sayılarından oluştuğunu göstermiştir. Burada $g \geq 2$ ve K sadece G nin $d = |G|$ mertebesi, G nin $e = eks(G)$ eksponentine ve G nin bir G_2 sylow 2-alt grubunun yapısına bağlı olan bir pozitif tamsayıdır. [3] de Jones her $h \in \mathbb{N}$ için

$$\nu_h(G) = \{ g \mid G \text{ grubu, bölüm uzayı } \textstyle\sum_g \big/ G \cong \sum_h \text{ ile} \sum_g \text{ üzerine etkir}\}$$

kümesini göz önüne alarak, $\nu_h(G)$ kümesinin sonlu sayıda hariç bütün negatif olmayan $g \equiv d(h-1)+1 (\mathrm{mod}\, J)$ sayılarından oluştuğunu ispatlamıştır. Daha sonra $\nu(G) = \bigcup_{h \geq 0} \nu_h(G)$ olduğunu göstererek $g \geq 2$ kısıtlamasına gerek olmadığını ispatlamıştır.

Eğer α serbest etkiye sahip ise bu durumda karşılık gelen $\sum_g \to \sum_g \big/ G$ örtüsü dallanmamıştır. G nin $\sum_g$ üzerinde serbest etki edecek şekildeki g lerin $\xi(G)$ kümesi yine Jones tarafından incelenmiş ve her sonlu G grubu için $\xi(G) = g_0 + d\mathbb{N}$ i sağlayan bir $g_0 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, d)$ tamsayısının mevcut olduğunu ispatlamıştır. Böylece, $\xi(G)$ sonlu çoklukta hariç bütün $g \equiv 1$ (mod d) sayılarını içerir. Bu çalışmada, $G = C_2 \times C_2$, $G = C_p \times C_p$ ($p > 2$ bir tek asal sayı), (devirli gruplar) A_4, A_5 (alterne gruplar) ve S_4 (simetrik grup) grupları için $\nu(G)$ ve $\xi(G)$ kümeleri bulunmuştur.

2. Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde çalışmada kullanılacak olan notasyonlar, tanımlar ve teoremler verilecektir. Daha fazla bilgi için [3, 4] e bakınız. Yüzeyler ve yüzey örtüleri için [1], sonlu gruplar için [2,5] nolu referanslardan yararlanılmıştır.

Tanım 2.1. G bir sonlu grup ve $d = |G|$ olsun.

d yi bölen her n için $n' := d/n$,

$\Gamma := \{n > 1 \mid G$ mertebesi n olan bir elemana sahiptir$\}$,

$$M_1 := \text{ebob } \{(n-1)\, n' : n \in \Gamma\},$$

$$M_2 := \text{ebob } \{ (n-1)\, n' : n \in \Delta \},$$

$$\Pi := \{ p \mid p,\, d \text{ yi bölen bir asal sayı} \},$$

$$\Pi - 1 := \{ p - 1 \mid p \in \Pi \}$$

$$M := \frac{d}{e} \text{ ebob } (\Pi - 1)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.2. T bir sonlu 2-grup ve $g \in T$ olsun. Eğer g nin mertebesi $|g| = eks(T)$ ise g ye *uzun eleman* ve $|g| < eks(T)$ ise g ye *kısa eleman* denir.

T nin kısa elemanlarının cümlesini T^{σ} ile gösterelim. Eğer T^{σ}, T de 2-indeksli bir altgrup ise T ye *dengelidir (balanced)* denir.

Tanım 2.3. G bir sonlu grup olsun. Eğer G nin G_2 Sylow 2-alt grupları dengeli ise G ye *dengelidir* denir.

Buradan aşikar olmayan bir T 2-grubunun dengeli olması için gerek ve yeter koşulun

$$\prod_{k=1}^{m} g_k = 1 \quad (g_k \in T)$$

formundaki her bağıntının g_k uzun elemanlarının bir çift sayısını içermesidir [3].

Tanım 2.4. G bir grup olsun. Bu taktirde,

$$J = J(G) := \begin{cases} M & \text{, eğer } G \text{ dengeli ise} \\ \frac{1}{2}M, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve

$$K = K(G) := \begin{cases} \frac{d}{e} & \text{, eğer } G_2 \text{ dengeli ve aşikar ise,} \\ \frac{d}{2e}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Açık olarak M tektir ancak ve ancak G_2 aşikardan farklıdır ve devirlidir. Bu durumda G dengelidir; böylece J daima bir tamsayıdır ve aynı şekilde K da daima bir tamsayıdır.

m in n i böldüğünü göstermek için $m \mid n$ ve p bir asal sayı olmak üzere n i bölen p nin en yüksek p^f kuvvetini göstermek için $p^f \| n$ yazacağız. A ve B kümeler olsun. $A \subseteq B$ ve $B - A$ farkı sonlu ise bu durumu belirtmek için $A \subsetsim B$ yazacağız.

Teorem 2.5. $M_1 = M_2 = M$. [3]

3. BAZI SONLU GRUPLAR İÇİN YÜZEYLERİN SİMETRİLERİ

G nin, $g \geq 0$ delikli bir $\sum_g$ kompakt, bağlantılı, yönlendirilebilir yüzeyi üzerine bir etkisi, yönü koruyan $\sum_g \to \sum_g$ self-homeomorfizmlerinin bir grubu olarak G nin bir faithful gösterimidir.

$\nu(G) = \{ g \in \mathbb{N} : G, \sum_g \text{ üzerine etkir} \}$ olarak tanımlansın.

Eğer G, $\sum_g$ üzerine etkiyorsa, bu taktirde bir $h \in \mathbb{N}$ için $\sum_g / G \cong \sum_h$ dır, böylece

$$\nu_h(G) = \left\{ g \in \mathbb{N} \mid \sum_g / G \cong \sum_h \text{ ile } G \text{ grubu } \sum_g \text{ üzerine etkir} \right\}$$

olmak üzere $\nu(G) = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \nu_h(G)$ dir.

Teorem 3.1. $g \in \nu_h(G)$ dir ancak ve ancak G, aşağıdaki şartları sağlayan a_i, b_i $(1 \leq i \leq h)$ ve $c_{i,n}$ $(1 \leq i \leq x_n, n \in \Gamma)$ elemanlarına sahiptir;

(i) a_i, b_i ve $c_{i,n}$ elemanları G yi üretir,

(ii) $c_{i,n}$ elemanların bir sıralaması için, $\prod_{i=1}^{h} [a_i, b_i] \prod_{i,n} c_{i,n} = 1$ dir,

(iii) Herbir $c_{i,n}$ nin mertebesi, n $(1 \leq i \leq x_n)$ dir,

(iv)

$$2(g-1) - 2d(h-1) = \sum_{n \in \Gamma} (n-1) n' x_n$$

dir. [3]

Elemanların böyle bir kümesine $(h; x)$ simgeli G için bir Hurwitz cümlesi denir, burada $x : n \mapsto x_n$ fonksiyonudur.

(ii) denklemi yada denk olarak (iv) eşitliği Riemann-Hurwitz formülü olarak bilinir. Onun çözümlerini çalışmak için, Φ

pozitif tamsayıların sonlu bir cümlesi olmak üzere,

$$\mathbb{N}\,\Phi = \{ \sum_{m \in \phi} x_m \, m \mid x_m \in \mathbb{N} \}$$

formundaki $\mathbb{N}$ in toplamlı alt yarı gruplarını göz önüne almamız gerekecektir.

$$\mathbb{N}\,\Phi \subsetneq \mathbb{N}\ ebob\,(\Phi) \qquad (3.1)$$

olduğu iyi bilinir[3]. (3.1) in basit bir genişlemesi, eğer her bir $m \in \Phi$ için $k_m \in \mathbb{N}$ ise, bu taktirde

$$\{ \sum_{m \in \phi} x_m \, m : x_m \in \mathbb{N}, x_m \geq k_m \} \subseteq \mathbb{N}\ ebob\,(\Phi)$$

olduğunu iddia eder.

Teorem 3.2 $\nu_h(G)$ kümesi,

$$g \equiv d\,(h-1)+1\,(\bmod J)$$

kongrüansını sağlayan sonlu sayıda hariç bütün negatif olmayan tamsayılardan oluşur. Ayrıca, $\xi_h(G) = \mathbb{N}J + d(h-1)+1$ olarak tanımlarsak $\nu_h(G) \subsetneq \xi_h(G)$ dir.[3]

Teorem 3.3. $\nu(G)$ kümesi, $g \equiv 1\ (\bmod \mathrm{K})$ kongrüansını sağlayan sonlu sayıda negatif olmayanlar hariç bütün negatif olmayan tamsayılardan oluşur [3].

Teorem 3.4. $\xi(G) = g_0 + d\mathbb{N}$ [3].

Böylece $\xi(G)$ kümesi $g \equiv 1\,(\bmod d)$ kongrüansını sağlayan sonlu sayıda hariç bütün tamsayılardan oluşur.

Şimdi $\nu(G)$, $\nu_h(G)$ ve $\xi(G)$ kümelerini inceleyelim: Yöntem, G grubu $|c_{i,n}| = n$ ve $\prod_{i=1}^{h} [a_i, b_i] \prod_{i,n} c_{i,n} = 1$ bağıntılarını sağlayan bir a_i, b_i $(1 \leq i \leq h)$ ve $c_{i,n}$ $(1 \leq i \leq x_n)$ Hurwitz kümesine sahip olacak şekilde h ve $x_n\,(n \in \Gamma)$ nın değerlerini belirlemektir. g nin değerleri ise

$$g = \frac{1}{2} \sum_{n \in \Gamma} (n-1) n' x_n + d\,(h-1)+1 \qquad (3.2)$$

formundaki Riemann-Hurwitz formülü ile verilir ki $g \in \xi(G)$ ler her $n \in \Gamma$ için $x_n = 0$ durumuna karşılık gelirler.

Teorem 3.5. $G = C_2 \times C_2$ olsun. Bu taktirde $\nu(C_2 \times C_2) \subsetneq \mathbb{N}$, $\nu_h(C_2 \times C_2) = \mathbb{N} + 4h - 3$ ve $\xi(C_2 \times C_2) = 4\mathbb{N} + 1$ dir.

İspat.

$$G = C_2 \times C_2 = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle$$
$$= \{ 1, a, b, ab \}$$

olsun. $|G| = 4$ ve $e = \exp(G) = 2$. $G_2 = G$ olup G dengeli değildir. Böylece $M = 2$, $J = 1$, $K = 1$ dir. Böylece Teorem 3.3 den $\nu(C_2 \times C_2) \subsetneq \mathbb{N}$ ve Teorem 3.2 den

$$\nu_h(C_2 \times C_2) \subsetneq \mathbb{N} + 4\,(h-1) + 1 = \mathbb{N} + 4h - 3$$

dır. $\Gamma = \{2\}$ olduğundan (3.2) den

$$g = \frac{1}{2} \sum_{n \in \Gamma} (n-1) n' x_n + d\,(h-1)+1$$
$$= x_2 + 4h - 3$$

bulunur. Eğer $h = 0$ ise, bu taktirde $x_2 \geq 3$ olmalıdır, böylece $\nu_0(C_2 \times C_2) = \mathbb{N}$ dir. Eğer $h \geq 1$ ise $\nu_h(C_2 \times C_2) = \mathbb{N} + 4h - 3$ bulunur. Böylece,

$$\nu(C_2 \times C_2) = \bigcup_h \nu_h(C_2 \times C_2) = \mathbb{N}.$$

Şimdi $x_2 = 0$ koyarsak, $h \geq 1$ olur, böylece

$$g = 4h - 3 = 4(h-1) + 1 \in 4\mathbb{N} + 1$$

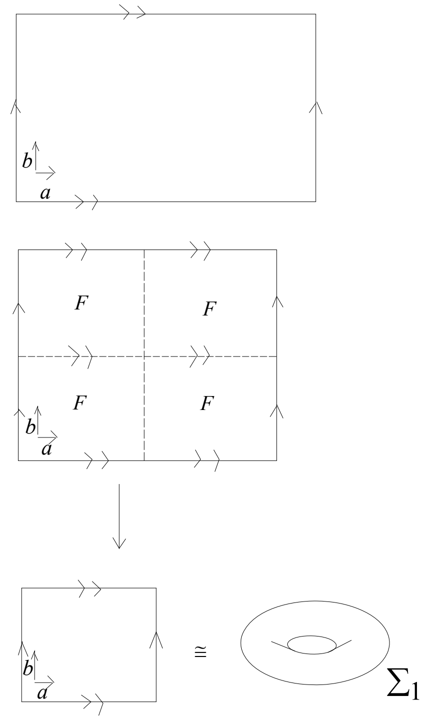
ve böylece

$$\xi(C_2 \times C_2) = 4\mathbb{N} + 1$$

olur. Böylece $\xi(C_2 \times C_2) = \{ 1, 5, 9, 13, ... \}$ dır.

■

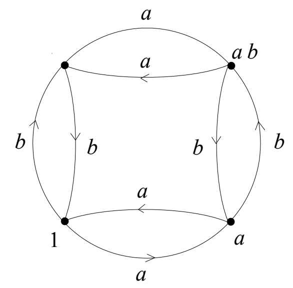
G grubunun $\sum_1$ torusu (yönlendirilmiş bir kare olarak düşünülüyor) üzerine serbest etkiye sahip olduğu açıktır (Şekil 3.1).



Şekil 3.1. G grubunun $\sum_1$ torusu üzerine etkisi.

Bu etki bize bir 4 kare verir. Bunların her biri $\sum_1$ üzerinde G için bir F temel bölgedir. Böylece G, bir kare üzerinde serbest etkiye sahiptir öyle ki bölüm yüzeyi $\sum_1 \big/ G \cong \sum_1$ dır. Yani bu durum $h = 1$ ve $g = 1$ e karşılık gelir. Şimdi, $\sum_1$ karesine , $\sum_1$ in 4 kopyasını, her biri bir küçük kare üzerine gelecek şekilde eklersek elde edilen

$\tilde{\Sigma} \cong 4\sum_1 \# \sum_1 \cong \sum_5$ yüzeyi G nin Cayley grafiğinden elde edilen yüzeye denktir. G nin Cayley grafiği için şekil 3.2 ye bakınız.

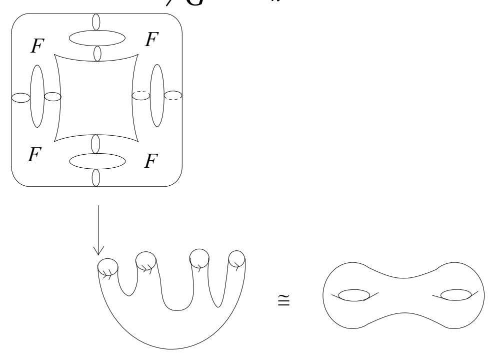


Şekil 3.2. G nin Cayley grafiği.

G bu yüzey üzerinde serbest etkir öyle ki bölüm yüzeyi $\sum_5 \big/ G \cong \sum_2$ dır (şekil 3.3). Buradan deliği 5 olan $\sum_5$ yüzeyi elde edilir. $\sum_5$ e $\sum_{h-2}$ in 4 kopyasını her biri bir temel bölge üzerine gelecek şekilde eklersek, G elde edilen

$$\tilde{\Sigma} \cong 4\Sigma_{h-2} \# \Sigma_5 \cong \Sigma_{1+4(h-1)}$$

yüzeyi üzerine serbest etkir öyle ki bölüm yüzeyi $\sum_{1+4(h-1)} \big/ G \cong \sum_h$ olur.



Şekil 3.3. G nin Cayley grafiği ile elde edilen etki.

Teorem 3.6. $G = C_p \times C_p$ ($p > 2$ asal) olsun. Bu taktirde $\nu(G) \subsetneq \mathbb{N}p+1$,

$\nu_h(G) \subsetneq \frac{1}{2}p(p-1)\,\mathbb{N} + p^2(h-1)+1$ ve

$\xi(C_p \times C_p) = \{1, 1+p^2, 1+2p^2, \ldots\}$

dır.

İspat.

$G = C_p \times C_p = < a, b \mid a^p = b^p = [a,b] = 1 >$

diyelim. Bu durumda

$$d = |G| = p^2, \quad e = \exp(G) = p$$

dır ve bu grup dengelidir. Böylece

$$\Pi = \{p\},\ \Pi - 1 = \{p-1\},\ M = p(p-1),\ J = \frac{p(p-1)}{2}$$

$G_2 =$ aşikar olduğundan, $K = p$ dir. Böylece Teorem 3.3 den $\nu(G) \subsetneq \mathbb{N}p+1$ ve Teorem 3.2 den

$$\nu_h(G) \subsetneq \frac{1}{2}p(p-1)\,\mathbb{N} + p^2(h-1)+1$$

dir. $\Gamma = \{p\}$ olduğundan

$$g = \frac{1}{2}(p-1)(p(x_p-2)-2) + p^2 h$$

bulunur. Eğer $h = 0$ ise bu taktirde $x_p \geq 3$ tür. Böylece,

$$\nu_0(G) = \frac{1}{2}(p-1)(p(\mathbb{N}+1)-2).$$

Eğer $h \geq 1$ ise bu taktirde

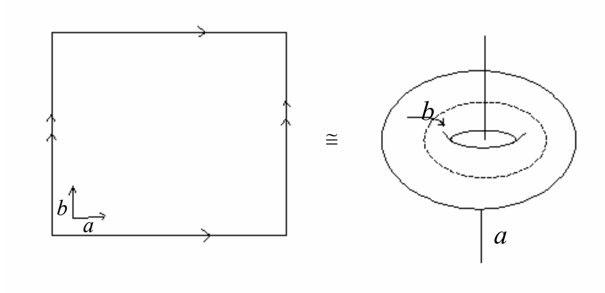
$$\nu_h(G) = \{p^2 h - p^2 + 1\} \cup \{\frac{1}{2}(p-1)(p(\mathbb{N}+1)-2) + p^2 h\}.$$

Şimdi, $x_p = 0$ koyalım, bu durumda $h \geq 1$ olup,

$$\xi(C_p \times C_p) = \{1, 1+p^2, 1+2p^2, \ldots\}$$

dır. ■

G, $\sum_1$ torusu (yönlendirilmiş kare olarak alalım) üzerinde serbest etkiye sahip olduğundan bu etki bize p^2 tane kare verir (şekil 3.4 ve 3.5).

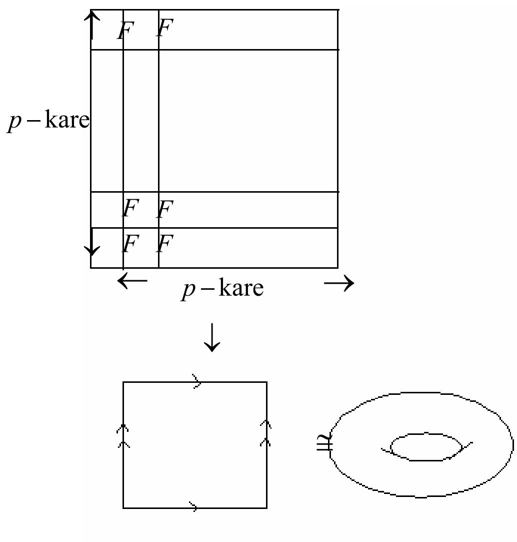


Şekil 3.4. G nin $\sum_1$ torusu üzerine etkisi.

Bunların her biri $\sum_1$ üzerinde G için bir F temel bölgedir. Şimdi $\sum_1$ e, p^2 tane $\sum_{h-1}$ in kopyasını, her biri bir temel bölge üzerinde olacak şekilde eklersek

$$\tilde{\Sigma} \cong p^2 \Sigma_{h-1} \# \Sigma_1 \cong \Sigma_{1+p^2(h-1)}$$

olup, G bu $\tilde{\Sigma}$ üzerinde etkir öyle ki $\Sigma_{1+p^2(h-1)} / G \cong \Sigma_h$ dır.



Şekil 3.5. p^2 tane temel bölge.

Teorem 3.7. $G = A_4$ alterne grup olsun. Bu taktirde $\nu_h(A_4) \subsetneq \mathbb{N} + 12h - 11$, $\nu(A_4) \subsetneq \mathbb{N}$ ve $\xi(A_4) = 13 + 12\mathbb{N}$ dir.

İspat.
$G = A_4 = < x, y \mid x^3 = y^2 = (xy)^3 = 1 >$ olsun (burada $x = (123)$, $y = (12)(34)$ alabiliriz).
Bu taktirde,

$$d = |G| = 12 = 2^2.3\,, \quad e = \exp(G) = 6$$

dır. $G_2 \cong V_4 \cong C_2 \times C_2$

$$= \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

olup, $|G_2| = 4$, $eks(G_2) = 2$

dir. Böylece G_2 dengeli değildir, dolayısıyla G dengeli değildir. $\Pi = \{\ 2,3\ \}$, ve dolayısıyla $\Pi - 1 = \{1,2\}$ dir. $M = 2$, $J(A_4) = 1$, $K(A_4) = 1$ dır. Böylece Teorem 3.3 den $\nu(A_4) \subsetneq \mathbb{N}$ ve Teorem 3.2 den de $\nu_h(A_4) \subsetneq \mathbb{N} + 12h - 11$ elde edilir. Diğer taraftan $\Gamma = \{\ 2,3\ \}$ dır. Buradan

$$g = 3x_2 + 4x_3 + 12h - 11$$

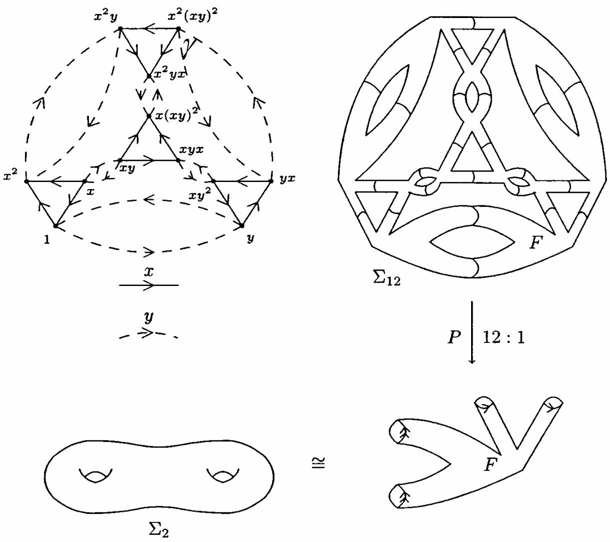
bulunur. Şimdi, eğer $x_2 = x_3 = 0$ ise $h \geq 2$ dir. g_0 değerini bulmak için

$$g = 3x_2 + 4x_3 + 12h - 11$$

formülünden $h = 2$ yazılırsa $g_0 = 13$ olarak bulunur ve böylece $\xi(A_4) = 13 + 12\mathbb{N}$ dır.

■

Şimdi de $\xi(A_4) = 13 + 12\mathbb{N}$ kümesini A_4 ün γ Cayley grafiği (şekil 3.6) yardımıyla elde edebiliriz. G nin γ üzerinde etkisiyle cinsi 13 olan bir $\tilde{\sum}$ yüzeyi elde edilir (burada $\tilde{\sum}$, γ nın bir kapalı tüp komşuluğunun sınırıdır). Bu bize $\sum_2$ nin 12 yapraklı düzgün dallanmamış örtüsünü verir.



Şekil 3.6. G nin Cayley grafiği ile elde edilen etki.

F, bu $\tilde{\sum}$ yüzey üzerinde sınır eğrileri tanımlanmış G için bir temel bölge olsun. Her bir temel bölgeye deliği $h-2$ olan $\sum_{h-2}$ yüzeyini eklersek deliği $g = 1 + 12(h-2)$ olan yeni bir $\sum_{1+12(h-2)}$ yüzeyi elde ederiz öyle ki bölüm yüzeyi $\sum_{1+12(h-1)} / A_4 \cong \sum_h$ dır, yani $\sum_g$ nin 12 yapraklı düzgün dallanmamış örtüsü elde edilir.

Teorem 3.8. $G = A_5$ alterne grup olsun. Bu taktirde $\nu_h(A_5) \subsetneq 60h - 59 + \mathbb{N}$, $\nu(A_5) \subsetneq \mathbb{N}$ ve

$\xi(A_5) = g_0 + d\mathbb{N} = 61 + 60\mathbb{N}$ dir.

İspat. $G = A_5 = < a,b \mid a^3 = b^2 = (ab)^5 = 1 >$ olsun. Bu durumda

$$d = |G| = 60 = 2^2.3.5, \quad e = \exp(G) = 30$$

dur. $G_2 = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ olup

$|G_2| = 4$, $eks(G_2) = 2$ ve $T^\sigma = \{1\}$ dir.

$\left| G_2 / T^\sigma \right| = 4$ olduğundan G_2 dengeli değildir.

Dolayısıyla G dengeli değildir.
$\Pi = \{\,2,3,5\,\}$ ve
$\Pi - 1 = \{\,1,2,4\,\}$ olduğundan,
$M = 2,\ J(A_5) = 1,\quad K(A_5) = 1$ elde edilir.
$\Gamma = \{2,3,5\}$ olduğundan

$$g = 15x_2 + 20x_3 + 24x_5 + 60h - 59$$

dır. $\nu(A_5)$, $g \equiv 1(\mathrm{mod}\,1)$ kongrüansını sağlayan g lerden oluştuğuna göre $g = 1 + \mathbb{N}$ dir. Dolayısıyla, $\nu(A_5) \subsetneq \mathbb{N}$ dir. Diğer taraftan

$$\nu_h(A_5),\ g \equiv d(h-1)+1\ (\mathrm{mod}\,1)$$

kongrüansını sağlayan g lerden oluştuğuna göre

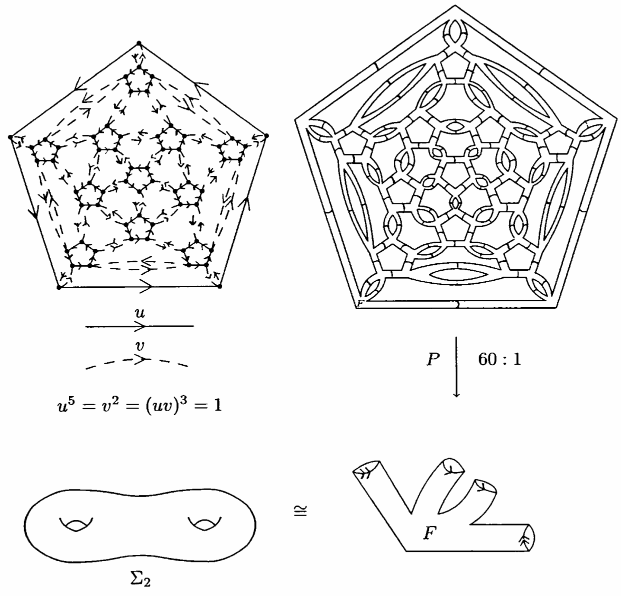
$$\nu_h(A_5) \subsetneq 60h - 59 + \mathbb{N}$$

elde edilir. Şimdi G nin serbest etkisine bakalım. $x_2, x_3, x_5 = 0$ için $h \geq 2$ olmalıdır. Bu durumda $h = 2$ için $g_0 = 120 - 59 = 61$ elde edilir. Böylece,

$$\xi(A_5) = g_0 + d\,\mathbb{N} = 61 + 60\mathbb{N}$$

dır. ■

$G = A_5$ için γ Cayley grafiğini alalım. G, γ üzerinde etkir (şekil 3.7). $\tilde{\Sigma}$ γ nın kapalı tüp komşuluğunun sınırı olsun. F de bu yüzey üzerinde sınır eğrileri tanımlanmış temel bölgeyi göstersin. $\tilde{\Sigma}$ deliği 61 olan bir yüzeydir ve G bu yüzey üzerinde etkir. Böylece Σ_2 nin 60 yapraklı düzgün dallanmamış örtüsü elde edilir. Σ_{61} e her temel bölge üzerine bir tane olmak üzere Σ_{h-2} nin 60 kopyasını eklersek bu taktirde $1 + 60(h-2)$ olan yeni bir $\Sigma_{1+60(h-2)}$ yüzeyi elde edilir. Şimdi $G = A_5$ bu yüzey üzerinde serbest etkiye sahiptir öyle ki bölüm yüzeyi $\Sigma_{1+60(h-1)} \big/ A_5 \cong \Sigma_h$ dır, yani Σ_g nin 60 yapraklı düzgün dallanmamış örtüsü elde edilir.



Şekil 3.7. G nin Cayley grafiği ve G nin bunun üzerine etkisi.

Teorem 3.8. $G = S_4$ olsun. Bu taktirde $\nu(S_4) \subsetneq \mathbb{N}$, $\nu_h(S_4) \subsetneq 24h - 23 + 2\mathbb{N}$ ve $\xi(S_4) = 25 + 24\mathbb{N}$ dır.

İspat.
$G = S_4 = \langle x, y \mid x^3 = y^2 = (xy)^4 = 1 \rangle$ (burada $x = (124)$, $y = (13)$ alabiliriz) olsun.

$$d = |G| = 24 = 2^3.4,\quad e = eks(S_4) = 12,$$

ve $|G_2| = 2^3 = 8$ dır. G_2 mertebesi 8 olan bir dihedral gruba izomorftur, yani

$$G_2 \cong D_4 = \{1, x, x^2, x^3, y, xy, x^2y, x^3y\}$$

dir. D_4 dengeli olmadığından, G dengeli değildir. $eks(D_4) = 4$ dir. Ayrıca

$$T^{\sigma} = \{\,1, x^2, y, xy, x^2y, x^3y\,\}$$

kümesi bir grup oluşturmaz.
$\Pi = \{\,2,3\,\}$ olduğundan $\Pi - 1 = \{\,1,2\,\}$ dır.

$M = 2,\ J = 1,\ K = 1$ dır. $\Gamma = \{\,2,3,4\,\}$ olduğundan,

$$g = 6x_2 + 8x_3 + 24x_4 + 24h - 23$$

elde edilir. Böylece Teorem 3.3 den

$$\nu(S_4),\ g \equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$$

kongrüansını sağlayan g lerden oluşacağından $g = 1 + 2\mathbb{N}$ dir. Dolayısıyla, $\nu(S_4) \subseteq \mathbb{N}$ dir. Teorem 2.2 den ise

$$\nu_h(S_4)\,,\ g \equiv d(h-1)+1\ (\operatorname{mod} 2)$$

kongrüansını sağlayan g lerden oluşacağından

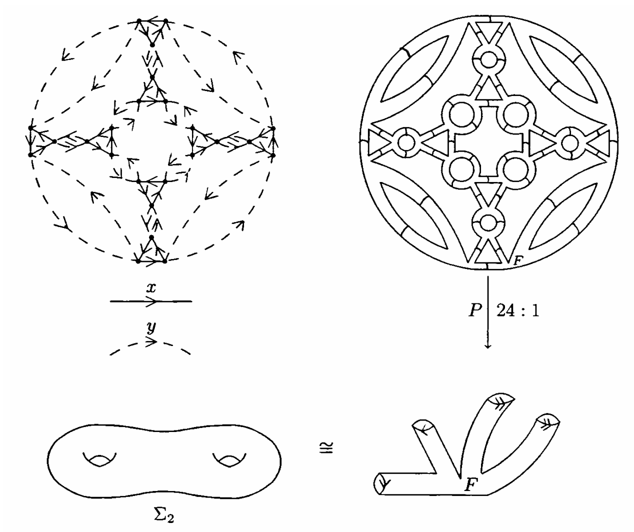
$$\nu_h(S_4) \subseteq 24h-23+2\mathbb{N}$$

dır. Şimdi, $x_2, x_3, x_4 = 0$ ise $h \geq 2$ olmalıdır. $h = 2$ için $g_0 = 48-23 = 25$ bulunur. Buradan,

$$\xi(S_4) = 25+24\mathbb{N}$$

elde edilir. ■

Bu küme G nin Cayley grafiğinden elde edilebilir. $G = S_4$ için γ Cayley grafiğini alalım (şekil 3.9). G, γ üzerinde etkir. $\tilde{\Sigma}$ boşluğu 25 olan bir yüzeydir ve $\tilde{\Sigma}$, γ nın bir kapalı tüp komşuluğunun sınırını göstersin. F de bu yüzey üzerinde sınır eğrileri tanımlanmış temel bölge olsun. Her bir F temel bölgeye bir tane olmak üzere boşluğu $h-2$ olan Σ_{h-2} yüzeyini eklersek boşluğu $g = 1+24(h-2)$ olan $\Sigma_{1+24(h-2)}$ yüzeyini elde ederiz. Böylece $\Sigma_{1+24(h-1)} \big/ S_4 \cong \Sigma_4$ dür.



Şekil 3.8. G nin Cayley grafiği ve G nin bunun üzerine etkisi.

KAYNAKLAR

[1] Armstrong M.A., Basic Topology, Springer – Verlag, New York, (1983).
[2] Doğan D., Sonlu Gruplar ve Yüzeylere Etkileri, Yüksek Lisans Tezi, Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Manisa, 31-79, (2004).
[3] Gorenstein D., Finite Groups Second Edition, *Chelsea Publishing Company*, New York, (1980).
[4] Jones G.A., Symmetries of Surfaces: An Extension of Kulkarni's Theorem, Glasgow Math. J. 173-184, (1994).
[5] Kulkarni R.S., Symmetries of Surfaces, Topolgy, Vol.26, No.2, 195-203, (1987).

Geliş Tarihi: 07/05/2008 *Kabul Tarihi: 26/01/2010*