C.B.Ü. Fen Bilimleri Dergisi ISSN 1305-1385 C.B.U. Journal of Science
9.2 (2013) 25 - 29 9.2 (2013) 25 - 29

FOURIER SERİLERİNİN EŞLENİK SERİLERİNİN MUTLAK GENELLEŞTİRİLMİŞ NÖRLUND TOPLANABİLMESİ ÜZERİNE

Abdullah SÖNMEZOĞLU[1*]

[1]Bozok Üniversitesi, Fen- Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 66100 Yozgat, TÜRKİYE

Özet: Bu çalışmada, $k \geq 2$ olmak üzere (p_n) ve (q_n) pozitif dizileri için $(-\pi, \pi)$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilen 2π periyotlu periyodik f fonksiyonunun Fourier serisinin eşlenik serisinin $\left|N, p_n, q_n\right|_k$ toplanabilmesi hakkında bir teorem ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: *Yakınsaklık, Fourier serileri, Eşlenik seriler, Mutlak genelleştirilmiş Nörlund toplanabilme.*

ON ABSOLUTE GENERALIZED NORLUND SUMMABILITY OF THE CONJUGATE SERIES OF FOURIER SERIES

Abstract: In this paper , a theorem about $\left|N, p_n, q_n\right|_k$ summability of the conjugate series of Fourier series of periodic f function which has 2π period and integrable in the mean of Lebesgue in the interval $(-\pi, \pi)$ for positive sequences (p_n) and (q_n), is proved where $k \geq 2$.

Keywords: *Convergence,Fourier series, Conjugate series , Absolute generalized Nörlund summability,.*

---

[*]**Abdullah SÖNMEZOĞLU** **2000 MSC Numbers:** Primary 40F05, Secondary 42A24.

abdullah.sonmezoglu@bozok.edu.tr

1. GİRİŞ

Özel trigonometrik seri olarak bilinen Fourier serileri ile bu serilerin conjugate (eşlenik) serilerinin iyi bilinen toplanabilme metodu olan $(C,1)$ yakınsaklığı araştırılmıştır. Nörlund, [1] de adını verdiği Nörlund toplanabilme metodunu tanımladı. [2] de ise mutlak Nörlund toplanabilme metodu tanımlandı ve bu metodun kuvvet serilerine uygulanması ile ilgili teoremler ispatlandı.Özel Nörlund tipi metotların tanımı ve metotlar arasındaki ilişkiler [3] te verildi. [4-10] de Fourier serileri ve Fourier serilerinin eşlenik serilerinin mutlak Nörlund toplanabilmesi ile ilgili teoremler ispatlandı. [4-10] deki teoremlerin ispat tekniklerinden yararlanarak bu çalışmada, $(-\pi,\pi)$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilen 2π periyotlu periyodik bir f fonksiyonun Fourier serisinin conjugate serilerinin $k \geq 2$ için $\left|N, p_n, q_n\right|_k$ mutlak genelleştirilmiş Nörlund toplanabilmesi incelenmiştir. [1] de tanımlanan Nörlund toplanabilme, diziden diziye bir dönüşüm metodu ancak mutlak genelleştirilmiş Nörlund toplanabilme ise Nörlund toplanabilme yardımıyla oluşturulan bir serinin yakınsaklığıdır.

Çalışma boyunca $t \in (0,\pi)$ olmak üzere

i) $\psi(t) = \dfrac{f(x+t) - f(x-t)}{2}$

ii) $\Delta r_n = r_n - r_{n+1}$

iii) $a_{n,j} = p_{n-j}\Delta\left(\dfrac{1}{r_{n-1}}\right)$

iv) $b_{n,j} = \dfrac{\Delta(p_{n-j-1})}{r_{n-1}}$

gösterimlerini kullanılacaktır.

Ayrıca bir ψ fonksiyonunun $(0,\pi)$ aralığında sınırlı salınımlı olması

$$\psi(t) \in BV(0,\pi)$$

gösterimiyle , bir (a_n) dizisinin sınırlı olması

$$a_n = O(1)$$

sembolüyle gösterilecektir.

Bunların dışında K, her durumda aynı olması gerekmeyen pozitif sabiti gösterecektir.

Tanım 1. f fonksiyonu $(-\pi,\pi)$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilen 2π periyotlu bir fonksiyon olsun.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \qquad \text{ve}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

olmak üzere

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

trigonometrik serisine f fonksiyonunun Fourier serisi veya f fonksiyonuna karşılık getirilen Fourier serisi denir ve

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$

şeklinde gösterilir. Buna ek olarak

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n \cos nx - a_n \sin nx) \quad (2)$$

trigonometrik serisine f fonksiyonunun (1) de ifade edilen Fourier serisinin eşlenik veya türevi serisi denir [3].

Tanım 2. (p_n) ve (q_n) herhangi iki dizi olmak üzere

$$r_n = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v}q_v, \qquad r_{-1} = p_{-1} = q_{-1} = 0$$

olsun. $(s_n), \sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi olsun.

$$t_n = \frac{1}{r_n}\sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v s_v \tag{3}$$

ile tanımlanan dönüşüme genelleştirilmiş Nörlund dönüşümü denir ve (N, p, q) ile gösterilir.

Eğer $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = s$ ise, $\sum a_n$ serisine veya (s_n) dizisine s değerine genelleştirilmiş Nörlund toplanabilirdir denir ve

$\sum a_n = s,\ (N, p_n, q_n)$ veya

$s_n \to s(N, p_n, q_n)$ ile gösterilir [11].

Tanım 3. $k \ge 1$ ve (t_n), (3) deki gibi tanımlanmak üzere $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = s$ olsun.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{r_n}{\Delta r_n}\right|^{k-1} |t_n - t_{n+1}|^k < \infty \tag{4}$$

ise $\sum a_n$ serisine s değerine mutlak $(N, p_n, q_n)_k$ veya $|N, p_n, q_n|_k$ toplanabilirdir denir [11].

2. ESAS SONUÇLAR

Teoremimizi ifade ve ispat etmeden önce teoremin ispatında kullanacağımız Lemmayı verelim.

Lemma 1. m ve n herhangi pozitif sayılar olmak üzere $\forall t \in (0, \pi]$ için düzgün olarak

$$\left|\sum_{v=m}^{n} \frac{\cos vt}{v}\right| \le K$$

olacak şekilde $\exists\ K > 0$ sayısı vardır [12].

Teorem 2. (p_n) ve (q_n) negatif olmayan diziler ve (r_n) dizisi de $n \to \infty$ iken $r_n \to \infty$ olacak şekilde bir dizi olsun. Ayrıca $k \ge 2$ olmak üzere

$$\psi(t) \in BV(0, \pi), \tag{5}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} (q_j)^{\frac{k}{k-1}} = O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{6}$$

$$\sum_{n=j+1}^{m}\left|\frac{r_{n-1}}{n\Delta r_{n-1}}\right|^{k-1} = O(1), \tag{7}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} (p_{n-j})^k + |\Delta p_{n-j-1}|^k = O(1) \tag{8}$$

şartları da sağlansın. Bu durumda $(-\pi, \pi)$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilen 2π periyotlu bir $f(t)$ fonksiyonunun (1) deki Fourier serisinin (2) de verilen conjugate serisi $k \ge 2$ için $t = x$ noktasında $|N, p_n, q_n|_k$ toplanabilirdir.

İspat.

$$r_n = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v = \sum_{v=0}^{n} p_v q_{n-v}$$

olup (p_n) ve (q_n) negatif olmayan diziler olduğundan (r_n) de negatif olmayan bir dizidir.

$(u_n(x))$, (2) serisinin kısmı toplamlar dizisi olmak üzere

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} (b_k \cos kx - a_k \sin kx) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin k(t-x)\,dt\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Toplamın içindeki integrale $t = x - u$ değişken değiştirmesi yaparak ve f fonksiyonunun 2π periyotlu olmasını da kullanarak

$$\begin{aligned} u_n(x) &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) \sin ku\,du\right) \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x-u) \sin ku\,du \right. \\ &\quad \left. + \int_{0}^{\pi} f(x-u) \sin ku\,du\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Toplamın içindeki ilk integralde $-u = y$ değişken değiştirmesini yaparak

$$
\begin{aligned}
u_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} f(x+y)\sin kydy \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{\pi} f(x-u)\cos kudu \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x+u)\sin kudu \\
&\quad - \int_0^{\pi} f(x-u)\cos kudu \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \psi(u)\sin kudu \right) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \psi(u)\sum_{k=1}^{n}\sin kudu \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left[\psi(t)\sum_{k=1}^{n}\sin kt \right] dt
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Böylece $k \geq 2$, $t_n = \frac{1}{r_n}\sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v u_v$ ve

$\lim_{n\to\infty} t_n = u$ olmak üzere

$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{r_n}{\Delta r_n} \right|^{k-1} |t_n - t_{n+1}|^k < \infty$ veya buna

denk olan $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}} \right|^{k-1} |t_n - t_{n-1}|^k < \infty$

olduğunu gösterirsek teorem ispatlanmış olur. (r_n) pozitif ve monoton artan bir dizi olduğundan

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}} \right|^{k-1} |t_n - t_{n-1}|^k =
$$

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}} \right)^{k-1} |t_n - t_{n-1}|^k \qquad \text{yazılabilir.}
$$

İlk olarak,

$$
t_n - t_{n-1} = \frac{1}{r_n}\sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v u_v - \frac{1}{r_{n-1}}\sum_{v=0}^{n-1} p_{n-v-1} q_v u_v
$$

$$
= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \psi(t) \left[\sum_{v=0}^{n} \left(\frac{p_{n-v}}{r_n} - \frac{p_{n-v-1}}{r_{n-1}} \right) q_v \sum_{j=1}^{v} \sin jt \right] dt
$$

elde edilir. Köşeli parantez içindeki ifadeye Abel kısmi toplama formülü uygulandıktan sonra toplamların sırasını değiştirme metodunu kullanarak

$$
\sum_{v=0}^{n} \left(\frac{p_{n-v}}{r_n} - \frac{p_{n-v-1}}{r_{n-1}} \right) q_v \sum_{j=1}^{v} \sin jt
$$

$$
= \sum_{v=0}^{n-1} \sin vt \sum_{j=0}^{v} \left(\frac{p_{n-j}}{r_n} - \frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}} \right) q_j
$$

$$
= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{p_{n-j}}{r_n} - \frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}} \right) q_j \sum_{v=j}^{n-1} \sin vt \quad \text{yazılabilir.}
$$

Buna göre kısmi integrasyon metodu uygulanarak

$$
\left[\sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{p_{n-j}}{r_n} - \frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}} \right) q_j \sum_{v=j}^{n-1} \sin vt \left(\frac{p_{n-j}}{r_n} - \frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}} \right) q_j \right] dt = dz
$$

, $\psi(t) = u$

olmak üzere $\psi(\pi) = \psi(0) = 0$ şartı altında belirli integralin tanımından da yararlanarak

$$
\leq \left(\frac{2}{\pi} \right) \left[\int_0^{\pi} \left| \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{p_{n-j}}{r_n} - \frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}} \right) q_j \sum_{v=j}^{n-1} \frac{\cos vt}{v} \right| |d\psi(t)| \right]
$$

yazılabilir.

Lemma 1 den yararlanarak son eşitsizlik

$$
|t_n - t_{n-1}| \leq K \left[\int_0^{\pi} \sum_{j=0}^{n-1} \left| \frac{p_{n-j}}{r_n} - \frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}} \right| q_j |d\psi(t)| \right]
$$

$$
= K \sum_{j=0}^{n-1} \left| \frac{p_{n-j}}{r_n} - \frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}} \right| q_j \int_0^{\pi} |d\psi(t)|
$$

şeklinde yazılabilir. $\psi(t) \in BV(0,\pi)$ olduğundan $\int_0^{\pi} |d\psi(t)| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı vardır. O halde

$$
|t_n - t_{n-1}| = 0(1) \sum_{j=0}^{n-1} \left| \frac{p_{n-j}}{r_n} - \frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}} \right| q_j \qquad \text{dır.}
$$

Böylece (6) hipotezini ve $k \geq 2$ için Hölder eşitsizliğini kullanarak

$$|t_n - t_{n-1}|^k = 0(1)\sum_{j=0}^{n-1}\left|\frac{p_{n-j}}{r_n} - \frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}}\right|^k \left(\sum_{j=0}^{n-1} q_j^{\frac{k}{k-1}}\right)^{k-1}$$
$$= 0\left(\frac{1}{n^{k-1}}\right)\sum_{j=0}^{n-1}\left|\frac{p_{n-j}}{r_n} - \frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}}\right|^k$$

elde ederiz. (r_n) dizisinin özelliğini ve (7)-(8) hipotezlerini kullanarak $m \to \infty$ için

$$\sum_{n=1}^{m}\left|\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right|^{k-1} |t_n - t_{n-1}|^k$$
$$= 0(1)\sum_{n=1}^{m}\left|\frac{r_{n-1}}{n\Delta r_{n-1}}\right|^{k-1} \sum_{j=0}^{n-1}\left|\frac{p_{n-j}}{r_n} - \frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}}\right|^k$$

$$= 0(1)\sum_{j=0}^{m}\left|\frac{p_{n-j}}{r_n} - \frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}}\right|^k \sum_{n=j+1}^{m}\left|\frac{r_{n-1}}{n\Delta r_{n-1}}\right|^{k-1}$$
$$= 0(1)\sum_{j=0}^{m}\left|\frac{p_{n-j}}{r_n} - \frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}}\right|^k$$

$$= 0(1)\sum_{j=0}^{m}\left|\frac{p_{n-j}}{r_n} - \frac{p_{n-j}}{r_{n-1}} + \frac{p_{n-j}}{r_{n-1}} + \frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}}\right|^k$$

$$= 0(1)\left[\left(\sum_{j=0}^{m}|a_{n,j}|^k\right)^{\frac{1}{k}} + \left(\sum_{j=0}^{m}|b_{n,j}|^k\right)^{\frac{1}{k}}\right]^k = 0(1)$$

elde ederiz ki bu ispatı tamamlar.

Kaynaklar

[1]. Nörlund. N.E.; Sur une application des fonctions permutables. Lunds Universitets Arsskrift 16, (1919).

[2]. Mcfadden, L., Absolute Nörlund summability.Duke Math.J , 9, 168-207,(1942).

[3]. Hardy. G.H. ;Divergent series , Oxford, (1949).

[4] Pati, T., On the absolute Nörlund summability of a Fourier series. London Math. Soc, 34, 153-160, (1959).

[5] Pati, T., Addendum: On the absolute Nörlund summability of a Fourier series. J.London Math. Soc, 37, 256, (1962).

[6]. Pati, T., On the absolute summability of the Conjugate series of a Fourier series by Nörlund means. J. London Math. Soc(2), 38, 204-214, (1963).

[7]. Dikshit, H. P., On the absolute $|N, p_n|$ of a Fourier series at a point. Proc. Cambridge Philos Soc, 65, 495-505, (1969).

[8]. Dikshit, H. P., Absolute summability of the Conjugate series of a Fourier series by Nörlund means. Math. Ann, 184, 106-112, (1970).

[9]. Pati, T., On the absolute summability of a Fourier series by Nörlund means. Math.Z, 88,244-249, (1965).

[10]. Rhoades,B. E;Savaş Ekrem.; On absolute Nörlund summability of Fourier series.Tamkang J.Math.33(4), 359-364-, (2002).

[11].J.R.Nurcombe.; Limitation and ineffectivens theorems for absolute and strong generalised Nörlund summability.Analysis, 9, 357-365, (1989).

[12]. E. C. Titchmarsh.; Theory of Functions., Oxford University Pres, (1949).

Geliş Tarihi:15.03.2013

Kabul Tarihi:18.11.2013