

Multiset Dizilerinin λ -İstatistiksel Yakınsaklığı

Nihal DEMİR ¹  Hafize GÜMÜŞ ^{2*} 

¹ Milli Eğitim Bakanlığı, Şehit Nurullah Seçen Anadolu İmam Hatip Lisesi, Konya, Türkiye

² Necmettin Erbakan Üniversitesi, Ereğli Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Konya, Türkiye

Makale Bilgisi	ÖZET
Geliş Tarihi: 05.02.2025 Kabul Tarihi: 13.11.2025 Yayın Tarihi: 31.12.2025	Bu çalışmada, multiset dizilerinin istatistiksel yakınsaklık kavramı incelenmiş ve bu konudaki temel tanımlar, özellikler ve teoremler ele alınmıştır. Çalışmada, multiset dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı tanımlanmış, klasik küme dizileri ile benzerlikleri ve farklılıkları ortaya konulmuştur. Ayrıca, kuvvetli Cesàro toplanabilirlik ve diğer yakınsaklık türleri incelenmiş, bu kavramların multiset dizilerine uygulanabilirliği gösterilmiştir. Elde edilen sonuçlar, multiset dizilerinin daha genel bir perspektifle ele alınmasına katkı sağlamaktadır. Bu çalışmada, multiset dizilerinin λ -istatistiksel yakınsaklığı bir $\lambda = (\lambda_n)$ dizisi kullanılarak elde edilecek ve önemli bazı sonuçlar ortaya konacaktır.
Anahtar Kelimeler: İstatistiksel yakınsaklık, Multiset dizileri, Multiset kümeleri.	

λ -Statistical Convergence of Multiset Sequences

Article Info	ABSTRACT
Received: 05.02.2025 Accepted: 13.11.2025 Published: 31.12.2025	In this study, the idea of statistical convergence within multiset sequences has been examined, and the fundamental definitions, properties, and theorems in this context have been addressed. In the study, the statistical convergence of multiset sequences is introduced, and the similarities and differences with classical set sequences are revealed. Furthermore, strong Cesàro summability and other types of convergence are examined, and the applicability of these concepts to multiset sequences is demonstrated. The results obtained contribute to the consideration of multiset sequences from a more general perspective. In this study, the λ -statistical convergence of multiset sequences will be obtained using a $\lambda = (\lambda_n)$ sequence and some important results will be presented.
Keywords: Statistical convergence, Multiset sequences, Multisets.	

Bu makaleye atıfta bulunmak için:

Demir, N. & Gümüş, H. (2025). Multiset dizilerinin λ -istatistiksel yakınsaklığı. *Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 7(3), 503-511. <https://doi.org/10.47112/neufmbd.2026.110>

*Sorumlu Yazar: Hafize Gümüş, hgumus@erbakan.edu.tr



This article is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

GİRİŞ (INTRODUCTION)

Kümeler teorisinin önemli özelliklerinden birisi, bir elemanın kümede yalnızca bir kez yazılmasıdır. Bunun yanında multiset kümelerin kabul ettiği temel felsefe, elemanların birden fazla kez yazılmasına izin vermesidir. Bu kabulün temel nedeni, bu örneklerin günlük hayatta oldukça fazla görülmesidir. 111100010... şeklinde kullanılan bilgisayar kodları, 0 535 767... şeklinde yazılan telefon numaraları, H₂O su molekülü ve çakışık köklere sahip olan $(x - 5)^2 = 0$ denklemi gibi durumlar multiset kümelerin örnekleridir. Her bir örnekte görüldüğü üzere, aynı elemanlar birden fazla kez yazılmasına rağmen farklı görevler üstlenmektedir. Bu sayılar birden çok kez yerine bir kez kullanılırsa, sorun çıkacağı açıktır. Fiziksel sistemlerin ve verilerin incelenmesi, çoklu olasılıkların ve seçeneklerin ifade edilmesi, tekrarlayan ilişkilerin ve yapıların analiz edilmesi gibi konularda multiset kümeleri; matematik, fizik, felsefe, mantık, dilbilim ve bilgisayar bilimi gibi alanlarda oldukça önemli bir yere sahip olup geniş bir uygulama alanı sunmaktadır. Bu da multisetslerin esnek ve işlevsel yapısını ortaya koymaktadır. Literatürde, multiset kümelerinin son yıllarda farklı adlar altında birçok alanda incelendiği görülmektedir. 1970'lerden bu yana, Bender [1], Blizard [2], Lake [3], Hickman [4], Meyer [5], Monro [6], Knuth [7] ve Syropoulos [8] multiset kümelerin bazı önemli özelliklerini araştırmıştır. Yine multiset dizileri günlük hayatta birçok yerde hayatımızda yer aldığı için özellikle matematiksel alanlarda ve mühendislik alanlarında dikkat çekmektedir [9], [10], [11], [12], [13], [14].

Multiset küme teorisinde, $[a, a, a, b, c, c]$ bir multiset kümesini temsil eder ve bu kümede a elemanı üç kez, b elemanı bir kez ve c elemanı iki kez tekrarlanır. Elemanların sıralaması ise dikkate alınmaz. Dolayısıyla, $[a, c, b, a, a, c]$ ya da $[c, a, b, a, c, a]$ multiset kümeleri, yukarıda belirtilen multiset ile eşdeğer olan kümeyi ifade eder. Aynı zamanda bu multiset kümeleri kısaca ifade edilmek istendiğinde $[a, b, c]_{3,2,1}$ veya $\{a/3, b/2, c/1\}$ şeklinde gösterilirler.

Multiset kümeleri üzerine yapılan bu çalışmalardan sonra, multiset dizileri ve yakınsaklık özellikleri araştırma konusu olmaya başlamıştır. Multiset dizilerinin bilinen yakınsaklığı 2021'de Pachilangode ve John [14] tarafından incelenmiş Gümüş, Güleç ve Demir lacunary dizilerini kullanarak multiset küme dizilerinin istatistiksel yakınsaklığına farklı bir bakış açısı getirmişlerdir [15]. Son yıllarda, bilinen yakınsaklık ve istatistiksel yakınsaklığın genelleştirilmesi olarak tanımlanan bazı yakınsaklık türlerinin multiset dizileri için çalışılmasıyla elde edilen sonuçlar incelenmiştir [16], [17], [18].

Tanım 1.1. [14] $\mathbb{N}_0$ kümesi negatif olmayan tamsayılar kümesi olsun.

$$m\mathbb{R} = \{mx = x_i/c_i, \quad x_i \in \mathbb{R}, c_i \in \mathbb{N}\}$$

kümesi reel sayıların multiset kümesi olarak adlandırılır.

Tanım 1.2. [14] $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi olsun. Tüm elemanları multiset küme olan dizilere multiset dizileri denir. Herhangi bir $x = (x_i)$ dizisi için bir multiset küme dizisi

$$mx = \{x_i/c_i, \quad x_i \in \mathbb{R}, c_i \in \mathbb{N}_0\}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 1.3. [14] $N_i = \{1/1, 2/2, \dots, i/i\}$ olsun. O halde $\{N_i\}$ dizisi n . terimi $\frac{n(n+1)}{2}$ elemana sahip olan bir multiset dizisidir.

Tanım 1.4. Bir multiset dizisi olan $mx = (x_i/c_i)$ 'in sınırlı olma şartı $\forall i \in \mathbb{N}$ için

$$\sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \leq B$$

şeklinde B sayısının var olmasıdır.

Çalışmanın önemli diğer bir kavramı olan istatistiksel yakınsaklık kavramı, 1951 yılında Fast [19] ve Steinhaus [20] tarafından ayrı ayrı tanımlanmış bilinen yakınsaklığı da kapsayan bir yakınsama türüdür. İstatistiksel yakınsaklık, uygulama alanı olarak geniş bir alana sahip olduğu için tanımlanmasından bu yana birçok araştırmacı tarafından farklı alanlarda çalışılmıştır [21], [22], [23], [24], [25], [26].

Tanım 1.5. [19] Reel sayılar kümesinin bir dizisi $x = (x_i)$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{i \leq n: |x_i - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olması durumunda $x = (x_i)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır ve bu halde $x_i \rightarrow L(S)$ yazılır. İstatistiksel yakınsak olan tüm dizilerin kümesi S sembolü ile ifade edilir. Burada $|\cdot|$ ifadesi, yer aldığı kümenin eleman sayısını belirtmektedir.

Bu yakınsama türünün farklı dizilerle çalışıldığı farklı yakınsaklık türleri de bulunmaktadır. Bu dizilerden birisi $\lambda = (\lambda_n)$ dizileridir. λ -istatistiksel yakınsaklık Mursaleen tarafından 2000 yılında tanımlanmıştır [27].

Tanım 1.6. Pozitif sayıların azalmayan bir $\lambda = (\lambda_n)$ dizisi $n \rightarrow \infty$ için $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1$, $\lambda_1 = 1$ şartlarını sağlayan bir dizidir. Burada I_n aralığı $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olarak tanımlanır. Bu diziler yardımıyla tanımlanan genelleştirilmiş de la Valée-Pousin ifadesi

$$t_i(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} x_i ,$$

şeklinde ve eğer $n \rightarrow \infty$ için $t_n(x) \rightarrow L$ oluyorsa $x = (x_i)$ dizisi L sayısına (V, λ) –toplanabilir denir. Buna göre kuvvetli Cesàro toplanabilir diziler kümesi ve kuvvetli $[V, \lambda]$ –toplanabilir diziler kümesi sırasıyla

$$[C, 1] = \left\{ x = (x_i): \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - L| = 0 \right\}$$

ve

$$[V, \lambda] = \left\{ x = (x_i): \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} |x_i - L| = 0 \right\}$$

şeklinde ve Bu kümelere ait diziler ise $x_i \rightarrow L[C, 1]$ ve $x_i \rightarrow L[V, \lambda]$ ile gösterilir.

Bu şartları sağlayan tüm $\lambda = (\lambda_n)$ dizilerinin kümesi Λ sembolü ile gösterilir.

Tanım 1.7. [27] Reel sayılar kümesinin bir $x = (x_i)$ dizisi verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{i \in I_n: |x_i - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa $x = (x_i)$ dizisinin L sayısına λ –istatistiksel yakınsak olduğu ifade edilir. Bu halde $x_i \rightarrow L(S_\lambda)$ yazılır ve λ –istatistiksel yakınsak olan tüm dizilerin kümesi S_λ ile gösterilir.

Bütün bu çalışmalardan sonra multiset kümelerin istatistiksel yakınsaklığı Debnath ve Debnath tarafından tanımlanmıştır [28].

Tanım 1.8. [19] $x = (x_i)$ dizisi reel sayıların bir dizisi ve $c = (c_i) \in \mathbb{N}_0$ olsun. $m\mathbb{R}$ kümesinin bir

$mx = (x_i/c_i)$ dizisi için her $\varepsilon > 0$ olduğunda,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \{i \leq n : \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \geq \varepsilon\} \right| = 0$$

oluyorsa mx dizisi $l/c \in m\mathbb{R}$ sayısına istatistiksel yakınsaktır. Bu halde $mx \rightarrow l/c(S)$ yazılır.

BULGULAR (RESULTS)

Bu bölümde, reel sayılardaki multiset dizilerinin λ –istatistiksel yakınsaklığına ilişkin tanımlar yapılmış, bu konuyla ilgili bazı özellikler ele alınmış ve ilgili teoremler sunulmuştur.

Tanım 2.1. $m\mathbb{R}$ multiset kümesinin bir $mx = (x_i/c_i)$ dizisi verilsin ve aynı zamanda $l/c \in m\mathbb{R}$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \left| \{i \in I_n : \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \geq \varepsilon\} \right| = 0$$

oluyorsa $mx = (x_i/c_i)$ dizisi l/c sayısına λ –istatistiksel yakınsaktır denir ve $mx \rightarrow l/c(S_\lambda)$ veya $S_\lambda \lim mx = l/c$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2. $m\mathbb{R}$ multiset kümesinin bir $mx = (x_i/c_i)$ dizisi verilsin ve aynı zamanda $l/c \in m\mathbb{R}$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} = 0$$

oluyorsa $mx = (x_i/c_i)$ dizisinin l/c sayısına kuvvetli Cesàro toplanabilir olduğu ifade edilir. Bu durum $mx \rightarrow l/c(\sigma)$ ile gösterilir.

Tanım 2.3. $m\mathbb{R}$ multiset kümesinin bir $mx = (x_i/c_i)$ dizisi verilsin. $\forall \varepsilon > 0$ olduğunda,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} = 0$$

oluyorsa $mx = (x_i/c_i)$ dizisi $l/c \in m\mathbb{R}$ sayısına kuvvetli (V, λ) -toplanabilirdir denir ve bu hal $mx \rightarrow l/c(V_\lambda)$ ile gösterilir.

Aşağıdaki teorem S_λ ve V_λ kümelerinin elemanları arasındaki ilişkileri incelemektedir.

Teorem 2.1. $\lambda_n \in \Lambda$ ve $mx = (x_i/c_i)$ multiset dizisi verilmiş olsun.

- i) Eğer $mx \rightarrow l/c(V_\lambda)$ ise bu durumda $mx \rightarrow l/c(S_\lambda)$ dir.
- ii) Eğer $mx \rightarrow l/c(S_\lambda)$ ve mx dizisi sınırlı ise $mx \rightarrow l/c(V_\lambda)$ dir.
- iii) l_∞ sınırlı küme dizilerini göstermek üzere, $S_\lambda \cap l_\infty = [V, \lambda] \cap l_\infty$ dir.

İspat:

i) Kabul edelim ki $\varepsilon > 0$ ve $mx \rightarrow l/c(V_\lambda)$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_n} \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} &\geq \sum_{\substack{i \in I_n \\ \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \geq \varepsilon}} \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \\ &\geq \varepsilon \left| \{i \in I_n : \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \geq \varepsilon\} \right| \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli işlemler her iki taraf için uygulandığında,

$$\frac{1}{\varepsilon} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \left| \{i \in I_n : \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \geq \varepsilon\} \right| \geq 0$$

bulunur. Tanımdan dolayı,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \{i \in I_n : \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \geq \varepsilon\} \right| = 0$$

olur ki buradan $mx \rightarrow l/c(S_\lambda)$ elde edilir.

ii) $mx \rightarrow l/c(V_\lambda)$ ve $mx = (x_i/c_i)$ multiset dizisi sınırlı olsun. O halde sınırlılık tanımından $\left| \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \right| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır.

Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} &= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{\substack{i \in I_n \\ \left| \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \right| \geq \varepsilon}} \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \\ &+ \frac{1}{\lambda_n} \sum_{\substack{i \in I_n \\ \left| \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \right| < \varepsilon}} \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \end{aligned}$$

$\left| \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \right| \geq \varepsilon$ elemanları yerine M sayısı; $\left| \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \right| < \varepsilon$ ifadesi yerine ε yazılırsa,

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \geq \frac{M}{\lambda_n} \left| \{i \in I_n : \left| \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \right| \geq \varepsilon\} \right| + \varepsilon$$

bulunur. Teoremin ifadesinden dolayı eşitsizliğin sol tarafının limiti 0 olduğundan sağ tarafın limiti de 0'dır. Dolayısıyla $mx \rightarrow l/c(V_\lambda)$ elde edilir.

iii) i ve ii şıklarından yararlanıldığında ispat açıktır.

Bir sonraki teorem S ve S_λ kümeleri arasındaki ilişki incelemektedir.

Teorem 2.2. $\lambda_n \in \Lambda$ ve $mx = (x_i/c_i)$ multiset dizisi verilmiş olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{\lambda_n}{n} > 0$ olduğunda $mx \rightarrow l/c(S)$ ise $mx \rightarrow l/c(S_\lambda)$ dir.

İspat: Farz edelim ki $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{\lambda_n}{n} > 0$ olsun. Böylece yeterince büyük n doğal sayıları için $\frac{\lambda_n}{n} \geq \delta$ koşulunu sağlayan bir $\delta > 0$ sayısı bulunmaktadır. Her $\varepsilon > 0$ için I_n aralığının tanımından,

$$\frac{1}{n} \left| \{i \leq n : \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \geq \varepsilon\} \right| \geq \frac{1}{n} \left| \{i \in I_n : \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \geq \varepsilon\} \right|$$

$$= \frac{\lambda_n}{n} \frac{1}{\lambda_n} \left| \{i \in I_n : \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \geq \varepsilon\} \right|$$

$$\geq \delta \frac{1}{\lambda_n} \left| \{i \in I_n : \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \geq \varepsilon\} \right|$$

olur. Her iki tarafın limiti alınır,

$$\frac{1}{\delta} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ i \leq n : \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ i \in I_n : \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \geq \varepsilon \right\} \right| \geq 0$$

ve dolayısıyla, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ i \in I_n : \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$ yani $mx \rightarrow l/c(S_\lambda)$ elde edilir.

Teorem 2.3. $\lambda_n \in \Lambda$ ve $mx = (x_i/c_i)$ multiset dizisi verilmiş olsun. Eğer $mx \rightarrow l/c(V_\lambda)$ ise bu durumda $mx \rightarrow l/c(\sigma)$ dır.

İspat: $mx \rightarrow l/c(V_\lambda)$ olsun. Tanımdan, $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} = 0$$

olduğu açıktır. $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ aralığı ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n < n$ oluşu göz önüne alındığında,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-\lambda_n} \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} + \frac{1}{n} \sum_{i \in I_n} \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \\ &\leq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i=1}^{n-\lambda_n} \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} + \frac{1}{n} \sum_{i \in I_n} \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \\ &\leq \frac{2}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \end{aligned}$$

ve dolayısıyla,

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \leq 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2}$$

istenen sonuç elde edilir.

TARTIŞMA VE SONUÇLAR (DISCUSSION AND CONCLUSIONS)

Multiset dizileri için bilinen yakınsaklık kavramı, verilen bir ε komşuluğu dışında dizinin sonlu tane elemanı bulunması olarak ifade edilir. Bunun yanında istatistiksel yakınsaklık dizinin komşuluğu dışında sonsuz eleman kalması fakat bu elemanların doğal yoğunluğunun sıfır olması ile tanımlanır. Her iki tanıma bakıldığında istatistiksel yakınsak bir dizinin yakınsak olduğu fakat yakınsak bir dizinin istatistiksel yakınsak olamayabileceği görülür.

Multiset dizileri için çalışılmış olan yakınsaklık türlerinin bazı özel diziler veya özel fonksiyonlar kullanılarak özelleştirilmesi toplanabilme teorisinde oldukça tercih edilen çalışmalar arasındadır. Bu diziler arasında en önemlilerinden birisi de $\lambda = (\lambda_n)$ dizileridir. Bu dizilerin sahip olduğu temel özellikler elde edilen sonuçlarda farklılıklar oluşturmaktadır. Bu nedenle λ – istatistiksel yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişkiler önemlidir. Bu çalışmada bu ilişkisel teoremler incelenmiştir.

Ethical Statement

The present study is an original research article designed and developed by the authors.

Author Contributions

Research Design (CRediT 1) N. D. S. (%50) – H.G. (%50)

Data Collection (CRediT 2) N. D. S. (%70) – H.G. (%30)

Research - Data Analysis – Validation (CRediT 3-4-6-11) N. D. S. (%40) – H.G. (%60)

Writing the Article (CRediT 12-13) N. D. S. (%90) – H.G. (%10)

Revision and Improvement of the Text (CRediT 14) N. D. S. (%50) – H.G. (%50)

Financing

This research did not receive any specific grant from funding agencies in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

Conflict of Interest

The authors declare that they have no conflict of interest.

Sustainable Development Goals (SDG)

Sustainable Development Goals: Not supported.

KAYNAKÇA (REFERENCES)

- [1] E. A. Bender, Partitions of multisets, *Discrete Mathematics*. (1974), 301-311.
- [2] W. D. Blizard, The development of multiset theory, *Modern Logic*. 1 (1991), 319-352.
- [3] J. Lake, Sets, fuzzy sets, multisets and functions, *Journal of the London Mathematical Society*. 2(12) (1976), 323-326.
- [4] J. L. Hickman, A note on the concept of multiset, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*. 22 (1980), 211-217.
- [5] R. K. Meyer, M. A. McRobbie, Multisets and relevant implication I and II, *Australasian Journal of Philosophy*. 60(2) (1982), 107-139.
- [6] G. P. Monro, The concept of multiset, *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*. 33(8) (1987), 171-178.
- [7] D. Knuth, The Art of computer programming, Seminumerical Algorithms, *Second edition*, Addison-Wesley Reading, Massachusetts, 1981.
- [8] A. Syropoulos, Mathematics of multisets, in: *Lecture notes in computer science*, 2001: pp. 347–358. doi:10.1007/3-540-45523-x_17
- [9] Ö. Ak Gümüş, Analyzing a mathematical model of the COVID-19 pandemic with the impact symptomatic and asymptomatic transmissions, *Necmettin Erbakan University Journal of Science and Engineering*. 6(3) (2024), 543-556. doi:10.47112/neufmbd.2024.64
- [10] M. Erdoğan, A. Yavuz, Geometric analysis of the NLS surface with the Pseudo null Darboux frame of spacelike curve, *Necmettin Erbakan University Journal of Science and Engineering*. 6(1) (2024), 88-198. doi: 10.47112/neufmbd.2024.42
- [11] N. Akgüneş, B. Aydın, Harary index for an algebraic graph, *Necmettin Erbakan University Journal of Science and Engineering*. 5(1) (2023), 9-13.
- [12] A.T. Karasahin, Performance evaluation of a genetically tuned LQR controller for an aerial robot, *Necmettin Erbakan University Journal of Science and Engineering*. 6(3) (2024), 468-482. doi: 10.47112/neufmbd.2024.59.
- [13] F. Bahadır, F.S. Balık, H.S. Yalçınkaya, The impact of COVID-19 on the financial structure of the construction industry in Turkey, *Necmettin Erbakan University Journal of Science and Engineering*. 5(2) (2023), 173-188. doi: 10.47112/neufmbd.2023.17.
- [14] Güleç, H. H., Aktaş, İ., Coefficient estimate problems for a new subclass of bi-univalent functions linked with the generalized bivariate Fibonacci-like polynomial, *Journal of Engineering Technology and Applied Sciences*. 9(2) (2024), 71-84.
- [15] S. Pachilangode, S. C. John, Convergence of Multiset Sequences, *Journal of New Theory*. 34 (2021), 20-27.
- [16] H. Gümüş, H. H. Güleç, N. Demir, A Study on lacunary statistical convergence of multiset sequences, *Kragujevac Journal of Mathematics*. 50(4) (2026), 567–578.
- [17] N. Demir, H. Gümüş, Ideal convergence of multiset sequences, *Filomat*. 37(30) (2023), 10199-10207.
- [18] N. Demir, H. Gümüş, A study on I – lacunary statistical convergence of multiset sequences, *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*. 42(5) (2024), 1575-1580.
- [19] H. Gümüş, N. Demir, I – limit points and I – cluster points of multiset sequences, *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica*. 28(2) (2024), 197-208.
- [20] H. Fast, Sur la convergence statistique, *Colloquium Mathematicum*. 2 (1951), 241-244.

- [21] H. Steinhaus, Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, *Colloquium Mathematicum*. 2 (1951), 73-84.
- [22] A. Zygmund, Trigonometric Series, *Cambridge University Press*, Cambridge, UK., 1979.
- [23] J. Schoenberg, The integrability of certain functions and related summability methods, *American Mathematical Monthly*. 66 (1959), 361-375.
- [24] P. Erdős, G. Tenenbaum, Sur les densités de certaines suites d'entiers, *Proceedings of the London Mathematical Society*. 59(3) (1989), 417-438.
- [25] A. R. Freedman, J.J. Sember, Densities and summability, *Pacific Journal of Mathematics*. 95 (1981), 293-305.
- [26] J. A. Fridy, On statistical convergence, *Colloquium Mathematicum*. 2 (1951), 241-244.
- [27] H. Gümüş, Lacunary weak statistical convergence, *General Mathematics Notes*. 28(1) (2015), 50-58.
- [28] M. Mursaleen, λ -statistical convergence, *Mathematica Slovaca*. 50(1) (2000), 111-115.
- [29] S. Debnath, A. Debnath, Statistical convergence of multisequences on $\mathbb{R}$, *Applied Sciences*. 23 (2021), 17-28.