

**Atıf İçin:** Pasinlioğlu, Ş. (2025). Kuple Düzgünleştirilmiş Boussinesq Denklemlerinin Yalnız Dalga Çözümlerinin Kararlılığı Üzerine Sayısal Bir Çalışma. *İğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 15(3), 1089-1099.

**To Cite:** Pasinlioğlu, Ş. (2025). A Numerical Study on the Stability of Solitary Wave Solutions of the Coupled Improved Boussinesq Equations. *Journal of the Institute of Science and Technology*, 15(3), 1089-1099.

## Kuple Düzgünleştirilmiş Boussinesq Denklemlerinin Yalnız Dalga Çözümlerinin Kararlılığı Üzerine Sayısal Bir Çalışma

Şenay PASİNLİOĞLU<sup>1\*</sup>

### Öne Çıkanlar:

- Kuple düzgünleştirilmiş Boussinesq denklemleri
- Yalnız dalga çözümleri
- Uzun zaman davranışı

### ÖZET:

Bu çalışmada, kuple düzgünleştirilmiş Boussinesq denklemleri için yalnız (soliter) dalga çözümlerinin zaman evrimi ve küçük pertürbasyonlar altındaki kararlılık özellikleri sayısal olarak incelenmiştir. Yalnız dalgaların uzun zaman davranışlarını incelemek, doğrusal olmayan dalga dinamiklerini anlamak bakımından büyük önem taşımaktadır. Bu amaçla, uzay ayrıklaştırması için Fourier sözde (psödo)-spektral yöntemi ve zaman ayrıklaştırması için dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemini birleştiren bir sayısal şema kullanılarak yalnız dalga çözümlerinin dinamikleri araştırılmıştır. Önerilen yöntemin hem zaman hem de uzaydaki doğruluğunu ve etkinliğini göstermek için çeşitli sayısal deneyler gerçekleştirilmiştir. Başlangıçta uygulanan küçük pertürbasyonlar ile dalgaların uzun zaman davranışları gözlemlenmiş ve kararlılıkları incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar, kuple düzgünleştirilmiş Boussinesq denklemlerinin yalnız dalga çözümlerinin küçük pertürbasyonlar altında kararlı olduğunu göstermektedir.

### Anahtar Kelimeler:

- Kuple düzgünleştirilmiş Boussinesq denklemleri
- Zaman evrimi
- Kararlılık

## A Numerical Study on the Stability of Solitary Wave Solutions of the Coupled Improved Boussinesq Equations

### Highlights:

- Coupled improved Boussinesq equations
- Solitary wave solutions
- Long time behavior

### ABSTRACT:

In this study, the time evolution of solitary wave solutions to the coupled improved Boussinesq equations, and their stability properties under small perturbations are numerically investigated. Examining the long-term behavior of solitary waves is of great importance for understanding nonlinear wave dynamics. For this purpose, the dynamics of solitary wave solutions are examined using a numerical scheme that combines the Fourier pseudo-spectral method for spatial discretization and the fourth-order Runge-Kutta method for time discretization. Several numerical experiments are carried out to demonstrate the accuracy and efficiency of the proposed method in both time and space. The long-time behavior of the waves with initially applied small perturbations is observed, and their stability is examined. The obtained results indicate that the solitary wave solutions of the coupled improved Boussinesq equations are stable under small perturbations.

### Keywords:

- Coupled improved Boussinesq equations
- Time evolution
- Stability

<sup>1\*</sup>Şenay PASİNLİOĞLU (Orcid ID: 0000-0003-3151-5309), İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü, İstanbul, Türkiye

\*Sorumlu Yazar/Corresponding Author: Şenay PASİNLİOĞLU, e-mail: pasinliogl@itu.edu.tr

## GİRİŞ

Kuple düzgünleştirilmiş Boussinesq (cIBq) denklemleri, dispersif ve doğrusal olmayan sistemlerde dalga yayılımını tanımlamak için temel matematiksel modellerden biridir. Doğrusal olmayan dalga denklemleri, formunu değiştirmeden hareket eden ve yalnız dalga olarak adlandırılan kararlı çözümler üretir. Ancak, doğrusal olmayan sönüm veya dispersif süreçlerin bu kararlı yapılar üzerindeki zaman içindeki etkisi henüz tam olarak anlaşılmaş değildir. cIBq denklemleri, akışkanlar dinamiği, plazma fiziği ve uygulamalı matematiğin diğere alanlarında yaygın olarak kullanılır. Yalnız dalga çözümleri elde etmek ve çözümlerin uzun zaman davranışlarını incelemek, bu tür sistemlerin kararlılığını ve dinamiklerini anlamak için çok önemlidir.

Bu çalışmada,

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} = [au^2 + bv^2]_{xx}, \quad (1)$$

$$v_{tt} - v_{xx} - v_{xxtt} = [2buv]_{xx} \quad (2)$$

biçimindeki kuple düzgünleştirilmiş Boussinesq (cIBq) denklemleri ve

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad (3)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), \quad (4)$$

başlangıç koşulları göz önünde bulundurulmuştur. Burada  $u(x, t)$  ve  $v(x, t)$  bilinmeyen fonksiyonlar,  $x$  ve  $t$  alt indisleri kısmi türevleri ifade eder.  $u, v$  ve tüm türevleri  $x \rightarrow \pm\infty$  iken sıfıra yakınsar. Sistemin yalnız dalgalarının küçük pertürbasyonlar altındaki davranışı sayısal olarak incelenmiştir.

Literatürde farklı türde cIBq denklemleri ile ilgili birçok çalışma mevcuttur. cIBq sistemi, (Christiansen ve ark. 1991, Turitsyn, 1993)'de Toda kafes modelinde, (Wattis, 2001)'de iki atomlu bir kafeste, (Khusnutdinova ve ark., 2009)'da iki katmanlı bir kafes modelinde doğrusal olmayan dalgaların iki yönlü yayılımını tanımlamak için kullanılmıştır. cIBq sistemi için Cauchy problemi ile ilgili yapılan çalışmalar, genellikle yalnız dalga çözümlerinin varlığı, tekliği ve sonlu zamanda patlamaları ile ilgilidir. (Pego ve ark., 1995)'te kübik bir kafesteki zayıf doğrusal olmayan titreşimleri modelleyen sistemin yalnız dalga çözümlerinin kararlılığı incelenmiştir. cIBq denklem sistemi için Cauchy problemine ait çözümlerin sonlu zamanda patlaması (De Godefroy, 1998)'de incelenmiştir. (Chen ve ark., 2009; Wang ve Li, 2009; Guo ve Chen, 2013)'te, cIBq denklemlerinin global çözümlerinin varlık ve tekliği gösterilmiş, çözümlerin sonlu zamanda patlaması için yeterli koşullar verilmiştir. Boussinesq tipi denklem sistemleri için yalnız dalga çözümlerinin kararlılığı üzerine yapılan bazı çalışmalar ise (Li, 2002; Dougalis ve ark., 2007; Grimshaw ve ark., 2017; Bona ve ark., 2023; Dougalis, 2023) biçimindedir. (Pasinlioglu, 2024)'te (1)-(2) sisteminin yalnız dalga çözümleri analitik olarak elde edilmiştir. Yapılan diğere çalışmalar arasında (Chen ve Zhang, 2004; Gozukizil ve Akcagil, 2014; Wang ve Tian, 2019) gösterilebilir. Bildiğimiz kadarıyla literatürde (1)-(2) cIBq sisteminin yalnız dalga çözümlerinin kararlılığı ile ilgili herhangi bir çalışma bulunmamaktadır. Bu çalışmada, cIBq sisteminin yalnız dalga çözümlerinin uzun zaman davranışı ve çözümlerin kararlılığı sayısal olarak incelenecektir.

Sunulan makale şu şekilde düzenlenmiştir: ilk bölümde, (1)-(2) cIBq denklem sisteminin analitik olarak elde yalnız dalga çözümlerinin uzun zaman dinamiklerini incelemek için, uzayda Fourier sözde-spektral yöntemi ve zamanda dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemini birleştiren sayısal bir yöntem geliştirilmiştir. Sonraki bölümde, önerilen yöntemin etkinliğini göstermek için çeşitli sayısal deneyler gerçekleştirilmiş, sistemin yalnız dalga çözümlerinin küçük pertürbasyonlar altındaki kararlılığı sayısal olarak incelenmiştir. Elde edilen bulgular son bölümde sunulmuştur.

## MATERYAL VE METOT

### Yalnız Dalga Çözümleri

(1)-(2) kuple düzgülendirilmiş Boussinesq denklemlerinin yalnız dalga çözümleri, ansatz yöntemi kullanılarak analitik olarak elde edilebilir. Bunun için (1)-(2) cIBq sisteminin çözümleri

$$u(x, t) = \phi(\xi), \quad v(x, t) = \psi(\xi), \quad \xi = x - ct - x_0, \quad (5)$$

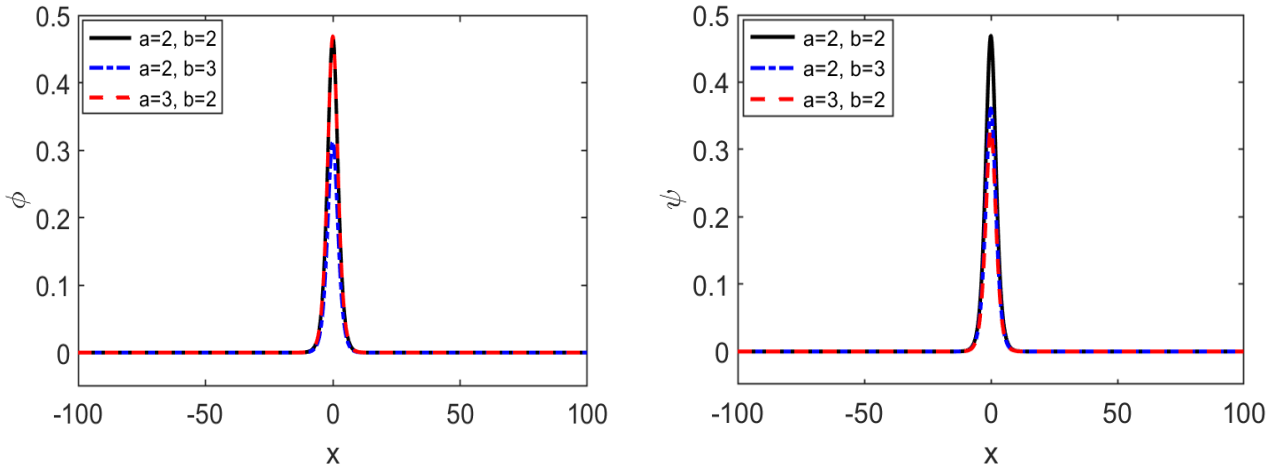
biçiminde ifade edilerek asimptotik sınır koşulları kullanılırsa, yalnız dalga çözümleri  $c^2 > 1$  olmak üzere

$$\phi(\xi) = \frac{3(c^2-1)}{4b} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c^2-1}}{2c}\xi\right) \quad (6)$$

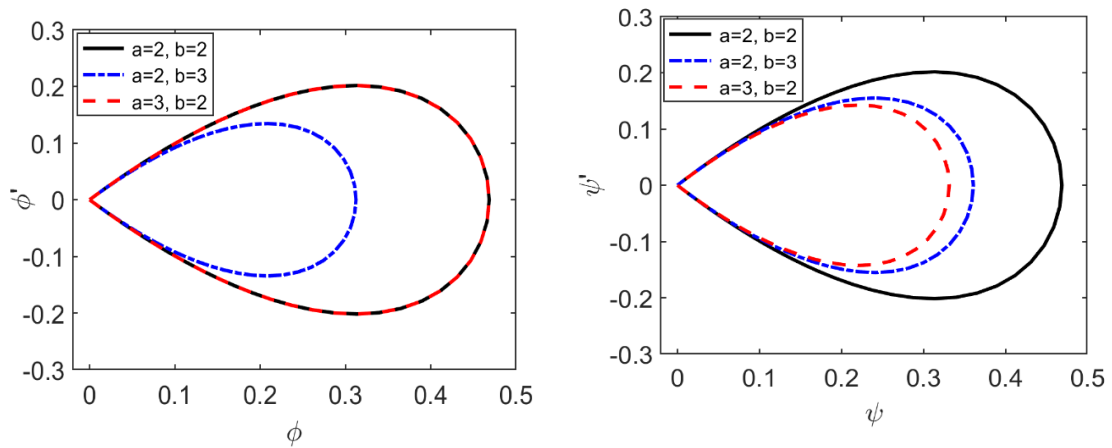
$$\psi(\xi) = \frac{3(c^2-1)\sqrt{2b-a}}{4b^{\frac{3}{2}}} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c^2-1}}{2c}\xi\right), \quad (7)$$

biçiminde elde edilir (Pasinlioğlu, 2024).

(1)-(2) cIBq denklemlerinin farklı  $a$  ve  $b$  değerleri için yalnız dalga profilleri Şekil 1'de gösterilmiştir. cIBq sistemi için yalnız dalga çözümlerinin faz profilleri ise Şekil 2'de gösterilmiştir. Yörüngelerin orijine düzgün bir şekilde yaklaştığı görülmektedir.



Şekil 1.  $c = 1.5$  için (1)-(2) cIBq denklemlerinin yalnız dalga profilleri



Şekil 2. (1)-(2) cIBq denklemlerinin  $\phi$  ve  $\psi$  çözümleri için elde edilen faz profilleri

### Yalnız Dalgaların Uzun Zaman Davranışı

Bu bölümde, (1)–(2) cIBq sistemi için yalnız dalga çözümlerinin uzun zaman davranışlarını incelemek için sayısal bir şema kullanılmıştır. Uzay ayrıklaştırması için Fourier sözde-spektral yöntemi ile zaman ayrıklaştırması için dördüncü mertebeden Runge–Kutta şeması birleştirilerek sistemin çözümlerinin zaman evrimi sayısal olarak incelenmiştir.

İlk olarak, (1)–(4) sisteminin Fourier dönüşümü alınarak aşağıdaki sistem elde edilmiştir:

$$\hat{u}_{tt} + k^2\hat{u} + k^2\hat{u}_{tt} = -k^2[a\hat{u}^2 + b\hat{v}^2], \quad (8)$$

$$\hat{v}_{tt} + k^2\hat{v} + k^2\hat{v}_{tt} = -k^2[2b\hat{u}\hat{v}], \quad (9)$$

$$\hat{u}(k, 0) = \hat{u}_0(k), \quad \hat{u}_t(k, 0) = \hat{u}_1(k), \quad (10)$$

$$\hat{v}(k, 0) = \hat{v}_0(k), \quad \hat{v}_t(k, 0) = \hat{v}_1(k). \quad (11)$$

(8)-(9) sistemi,

$$\hat{u}_{tt} = -\frac{k^2}{1+k^2}[a\hat{u}^2 + b\hat{v}^2 + \hat{u}] \quad (12)$$

$$\hat{v}_{tt} = -\frac{k^2}{1+k^2}[2b\hat{u}\hat{v} + \hat{v}] \quad (13)$$

biçiminde yazılabilir.  $\hat{y} = \hat{u}_t$  ve  $\hat{z} = \hat{v}_t$  seçilerek

$$\hat{u}_t = \hat{y}$$

$$\hat{v}_t = \hat{z}$$

$$\hat{y}_t = -\frac{k^2}{1+k^2}[a\hat{u}^2 + b\hat{v}^2 + \hat{u}] \quad (14)$$

$$\hat{z}_t = -\frac{k^2}{1+k^2}[2b\hat{u}\hat{v} + \hat{v}]$$

sistemi elde edilir. (14) sistemi,

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} \hat{y} \\ \hat{z} \\ -\frac{k^2}{1+k^2}[a\hat{u}^2 + b\hat{v}^2 + \hat{u}] \\ -\frac{k^2}{1+k^2}[2b\hat{u}\hat{v} + \hat{v}] \end{pmatrix}, \quad \hat{W} = \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix}, \quad \hat{W}_0 = \begin{pmatrix} \hat{u}_0 \\ \hat{v}_0 \\ \hat{y}_0 \\ \hat{z}_0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

olmak üzere

$$\frac{d\hat{W}}{dt} = \hat{F}, \quad \hat{W}(k, 0) = \hat{W}_0 \quad (16)$$

matris formunda yazılabilir. Elde edilen (16) diferansiyel denklem sistemi, zamanda dördüncü mertebeden Runge–Kutta yöntemi kullanılarak çözülmüş ve ardından ters Fourier dönüşümü uygulanmıştır. Önerilen yöntemin hem zamanda hem de uzayda yakınsama oranını bulmak için

$$\text{yakınsama oranı} \approx \frac{\ln[E(M_{j+1})/E(M_j)]}{\ln(M_j/M_{j+1})} \quad (17)$$

bağıntısı kullanılmıştır. Burada  $M_j$ , zaman aralığındaki alt aralıkları ifade eder.  $E(M_j)$ ,

$$L_\infty \text{-hatası} = \max_i |u_i - U_i| \quad (18)$$

olarak tanımlanan  $L_\infty$  -hatalarını,  $u_i$  ve  $U_i$ ,  $(x_i, t)$  noktasındaki sırasıyla analitik ve sayısal çözümleri temsil etmektedir.

## BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, önce (1)-(2) cIBq denklemlerinin yalnız dalga çözümlerinin zamana göre evrimi ve bu çözümlerin küçük pertürbasyonlar altındaki uzun zaman davranışı sayısal olarak incelenmiştir. Sistemin yalnız dalga çözümlerine karşılık gelen başlangıç koşulları,

$$\phi_0(x) = \frac{3(c^2-1)}{4b} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c^2-1}}{2c} x\right) \quad (19)$$

$$\psi_0(x) = \frac{3(c^2-1)\sqrt{2b-a}}{4b^{\frac{3}{2}}} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c^2-1}}{2c} x\right) \quad (20)$$

ve

$$\phi_1(x) = \frac{3(c^2-1)^{\frac{3}{2}}}{4b} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c^2-1}}{2c} x\right) \tanh\left(\frac{\sqrt{c^2-1}}{2c} x\right) \quad (21)$$

$$\psi_1(x) = \frac{3(c^2-1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2b-a}}{4b^{\frac{3}{2}}} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c^2-1}}{2c} x\right) \tanh\left(\frac{\sqrt{c^2-1}}{2c} x\right) \quad (22)$$

olarak alınmıştır.

Sayısal deneyler,  $a = 2$ ,  $b = 3$  durumu için gerçekleştirilmiştir. Tüm hesaplamalar Matlab kullanılarak yapılmıştır. Önce  $t = 0$  ile  $t = 50$  zaman aralığında, zaman grid noktası sayısı  $M = 10.000$  ve uzay grid noktası sayısı  $N = 2^{14}$  alınmıştır. Yakınsama oranları ve ilgili hata normları Çizelge 1 ve Çizelge 2'de sunulmuştur. Kullanılan sayısal yöntemin zamanla yakınsaklığını göstermek için, sabit bir ( $N = 2^{14}$ ) uzay grid noktası sayısı alınmış ve çeşitli  $\Delta t$  zaman adımları kullanılarak sayısal deneyler gerçekleştirilmiştir. Çizelge 1,  $t = 50$  bitiş zamanı için  $L_\infty$  -normlarından hesaplanan sayısal hataları ve zamana göre yakınsama oranlarını göstermektedir. Elde edilen sonuçlarda, zaman adımı  $\Delta t$  azaldıkça ( $M$  zaman grid sayısı arttıkça) hataların azaldığını görülmektedir. Bu sonuçlar, önerilen yöntemin zamanla dördüncü mertebede yakınsadığını göstermektedir.

**Çizelge 1.** (1)-(2) denklemlerinin  $c = 1.5$ ,  $t = 50$ ,  $L = 200$  ve  $N = 2^{14}$  için hesaplanan  $L_\infty$  - hataları ve zamana göre yakınsama mertebeleri

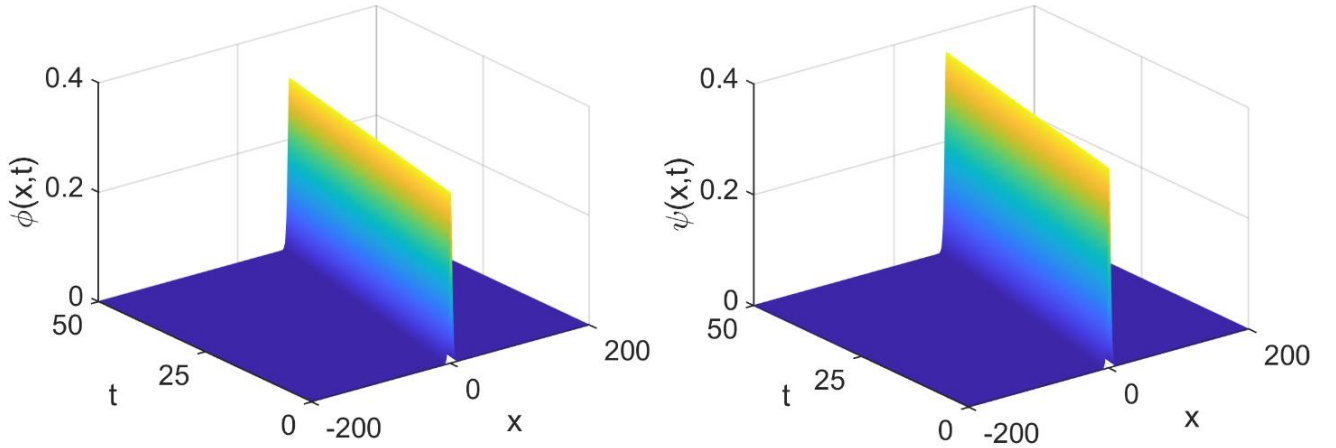
M	u-hatası	Mertebe	v-hatası	Mertebe
30	2.088723E-01	-	2.411849e-01	-
50	9.470267E-02	1.548436158	1.093532e-01	1.548436124
75	2.273873E-02	3.518607465	2.625642e-02	3.518607277
150	1.119649E-03	4.344033243	1.292859e-03	4.344033374
300	5.250465E-05	4.414457522	6.062715e-05	4.414457127
500	6.100635E-06	4.213784064	7.044406e-06	4.213784285
750	1.131687E-06	4.154940562	1.306760e-06	4.154939604
1500	6.600875E-08	4.099673907	7.622033e-08	4.099674535

Fourier sözde-spektral yönteminin uzaydaki yakınsama oranlarını belirlemek için,  $N$  değerleri değiştirilerek ve sabit bir zaman grid noktası ( $M = 10000$ ) kullanılarak çeşitli sayısal deneyler gerçekleştirilmiştir. Çizelge 2,  $t = 50$  bitiş zamanı için uzaydaki  $L_\infty$  -normlarından hesaplanan sayısal hataları ve yakınsama oranlarını sunmaktadır. Hesaplanan yakınsama oranları, önerilen şema kullanılarak elde edilen sayısal çözümlerin uzayda doğru çözüme üstel olarak yaklaştığını göstermektedir.

**Çizelge 2.** (1)–(2) denklemlerinin  $c = 1.5$ ,  $t = 50$ ,  $L = 200$  ve  $M = 10.000$  için hesaplanan  $L_\infty$  –hataları ve uzaydaki yakınsama mertebeleri

N	u-hatası	Mertebe	v-hatası	Mertebe
16	1.675385E-01	-	1.934568E-01	-
32	2.254752E-01	-0.428476098	2.603564E-01	-0.428476431
64	2.649446E-01	-0.232721963	3.059317E-01	-0.232721733
128	5.535085E-02	2.259013346	6.391366E-02	2.259013393
256	1.296693E-04	8.737624709	1.497292E-04	8.737624894
512	1.026706E-08	13.62452621	1.185538E-08	13.62452607

Şekil 3'te (1)-(2) cIBq denklemlerinin yalnız dalga çözümlerinin  $t = 50$  için zaman evrimi gösterilmiştir. Burada  $c = 1.5$ ,  $M = 1000$ ,  $N = 1024$  olarak alınmıştır. Yalnız dalgaların şeklinde herhangi bir değişiklik olmadan ilerlediği görülmektedir.



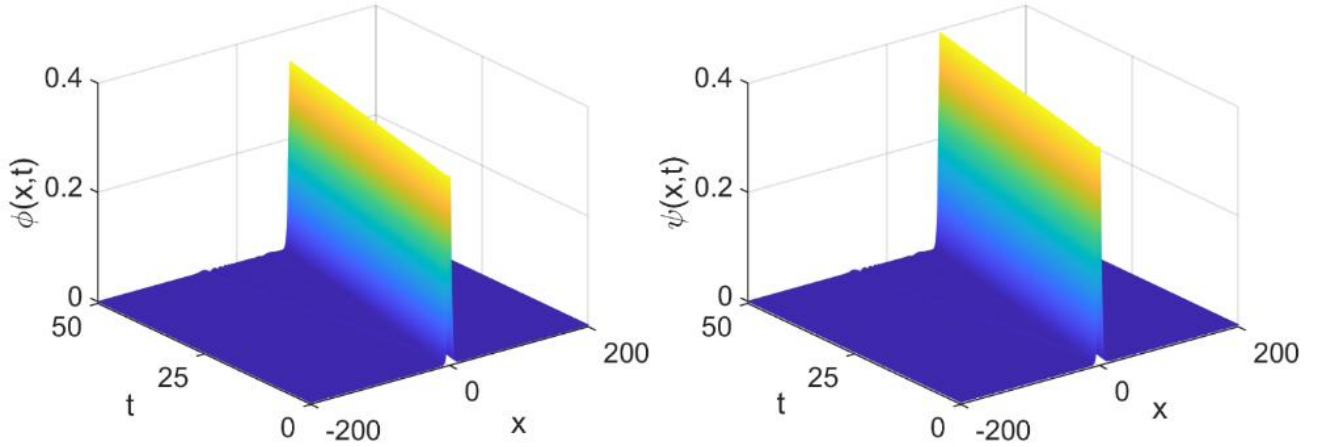
Şekil 3. (1)-(2) sisteminin  $a = 2$ ,  $b = 3$  için yalnız dalga çözümlerinin evrimi

### Çözümlerin Kararlılığı

Bu bölümde (1)-(2) cIBq denklem sisteminin yalnız dalga çözümlerinin kararlılığı sayısal olarak araştırılmıştır. Sistemin yalnız dalga çözümlerinin dinamiklerini incelemek için önce çözümlere başlangıçta küçük genlikli pertürbasyonlar uygulanmıştır. Daha sonra, uygulanan pertürbasyonların etkisini incelemek için pertürbe edilen profiller başlangıç koşulları olarak kullanılmış ve elde edilen çözümlerin zamanla değişimi incelenmiştir. Burada yapılan tüm hesaplamalarda  $a = 2$ ,  $b = 3$ ,  $c = 1.5$ ,  $N = 2^{14}$  ve  $M = 1000$  olarak alınmıştır. Pertürbasyonlar iki farklı şekilde yapılmıştır. İlk olarak (19)-(20) başlangıç koşulları bir  $\alpha > 0$  sabiti ile çarpılarak, (1)-(2) cIBq sisteminin

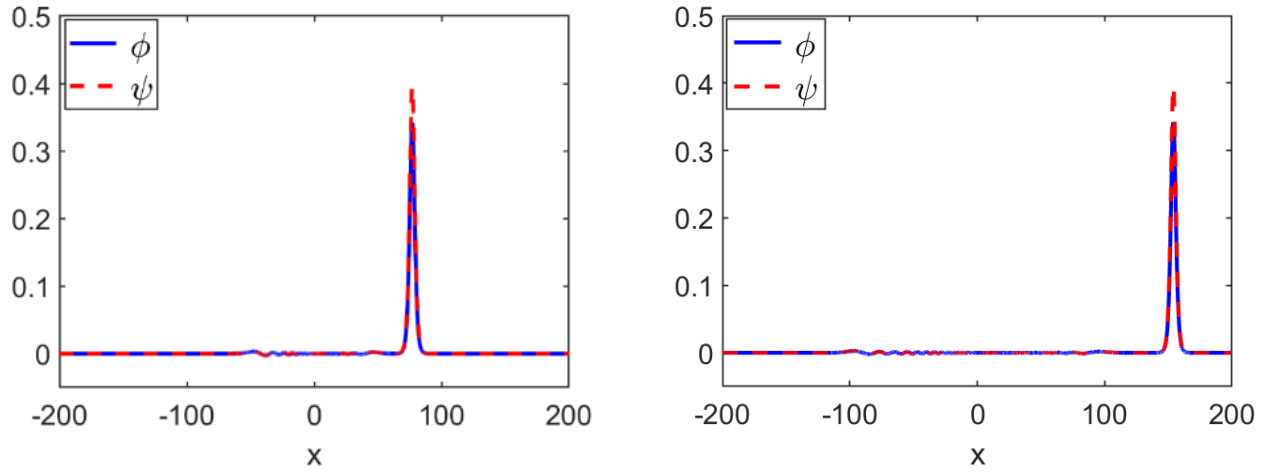
$$u(x, 0) = \alpha \phi_0(x), \quad v(x, 0) = \alpha \psi_0(x) \quad (23)$$

başlangıç koşulları altında elde edilen yalnız dalga çözümlerinin zamanla evrimi incelenmiştir. (1)-(2) sisteminin  $\alpha = 1.1$  için (23) başlangıç koşulları altındaki çözümlerinin zamana göre değişimi Şekil 4'te verilmiştir.

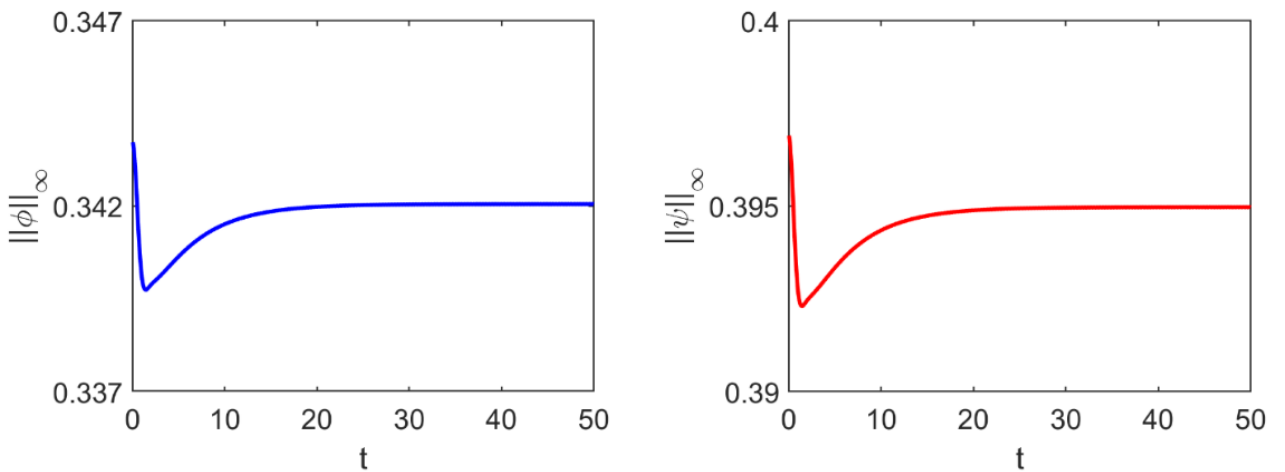


Şekil 4.  $a = 2$ ,  $b = 3$  için (1)-(2) sisteminin  $\alpha = 1.1$  ile pertürbe edilen yalnız dalga çözümlerinin zamanla evrimi

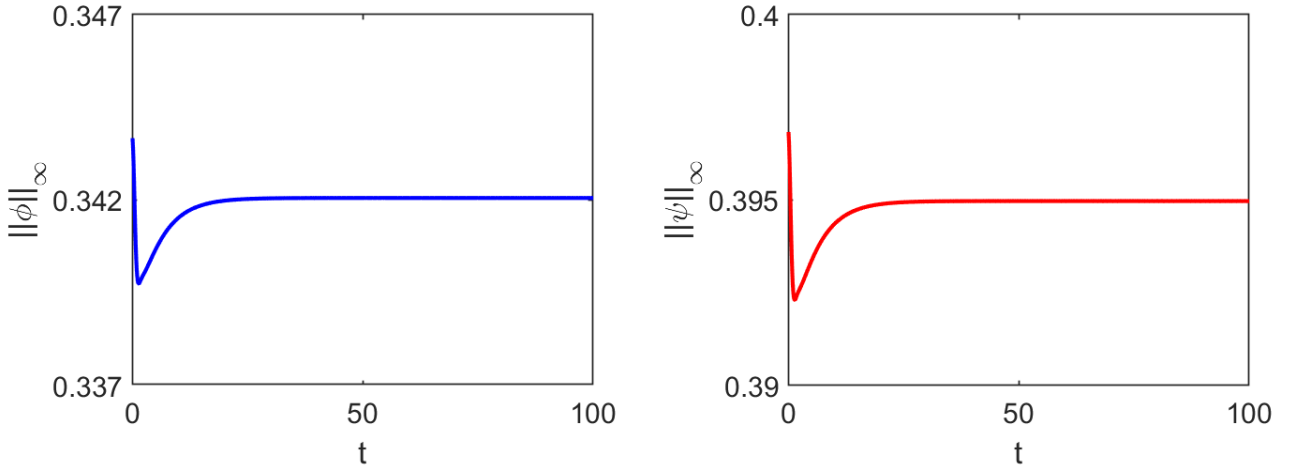
$\alpha = 1.1$  ile pertürbe edilen çözümlerin  $t = 50$  (sol) ve  $t = 100$  (sağ) final anındaki yalnız dalga profilleri Şekil 5'te gösterilmiştir. Şekillerden görüldüğü gibi dispersif kuyruk gözlemlenmiş ve yalnız dalganın şeklinde herhangi bir değişiklik olmadan ilerlediği görülmüştür.



Şekil 5.  $a = 2$ ,  $b = 3$  için (1)-(2) sisteminin  $\alpha = 1.1$  ile pertürbe edilen çözümlerinin  $t = 50$  (solda) ve  $t = 100$  (sağda) anındaki yalnız dalga profilleri



Şekil 6.  $t = 50$  için  $\alpha = 1.1$  ile pertürbe edilen yalnız dalga çözümlerinin  $L_\infty$  normlarının zamana göre değişimi



Şekil 7.  $t = 100$  için  $\alpha = 1.1$  ile pertürbe edilen yalnız dalga çözümlerinin  $L_\infty$  normlarının zamana göre değişimi

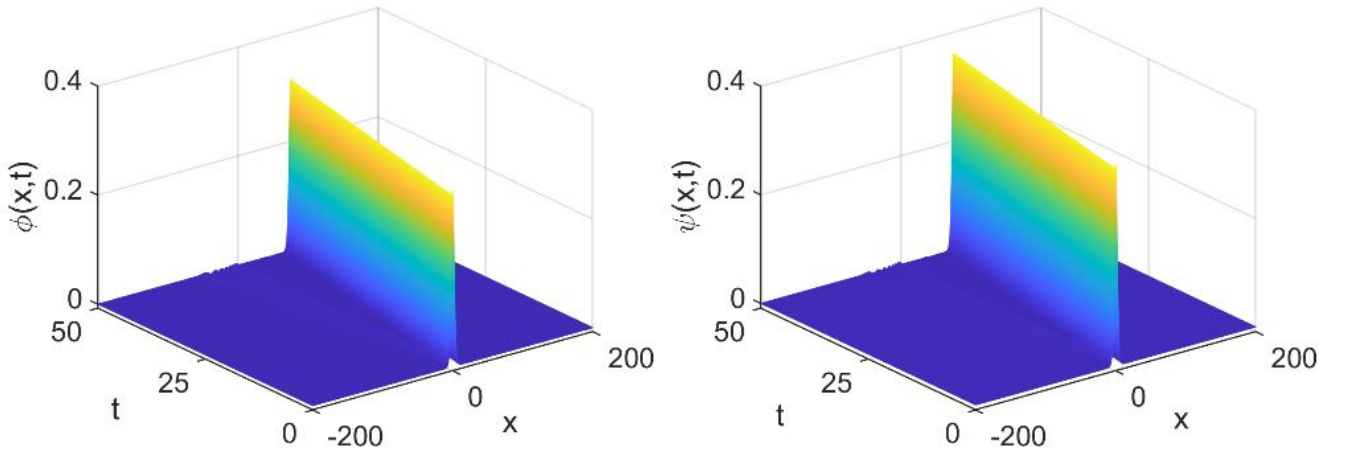
Pertürbe edilmiş çözümlerin  $L_\infty$  -normlarının zamana göre değişimi ise Şekil 6 ( $t = 50$ ) ve Şekil 7'de ( $t = 100$ ) sunulmuştur.

(1)-(2) cIBq sisteminin çözümlerinin kararlılığını incelemek için farklı bir pertürbasyon daha kullanılmıştır. Bu amaçla, (19)-(20) başlangıç koşulları,  $\beta$  bir reel sabit olmak üzere

$$u(x, 0) = \phi_0(x) + \beta e^{-x^2}, \quad v(x, 0) = \psi_0(x) + \beta e^{-x^2} \quad (24)$$

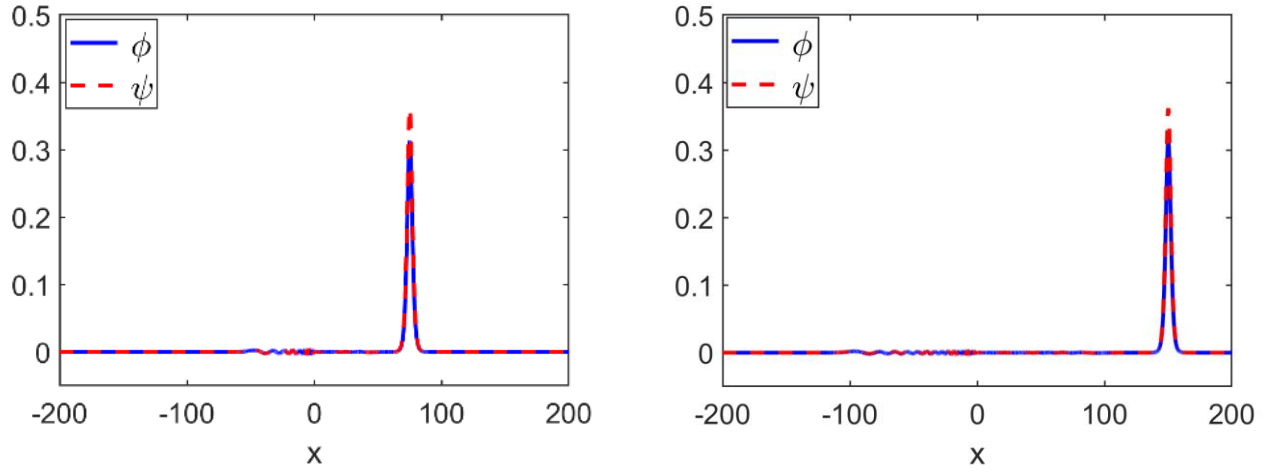
biçiminde pertürbe edilerek (1)-(2) cIBq sisteminin yalnız dalga çözümlerinin zamanla evrimi incelenmiştir. Pertürbe edilen çözümlerin zamanla değişimi Şekil 8'de gösterilmektedir.

$t = 50$  ve  $t = 100$  bitiş zamanları için, (1)-(2) cIBq sisteminin  $\beta = 0.01$  alınarak (24) başlangıç koşulları altındaki yalnız dalga profilleri Şekil 9'da ve  $L_\infty$  -normlarının zamanla değişimleri ise sırasıyla Şekil 10 ve Şekil 11'de sunulmuştur.

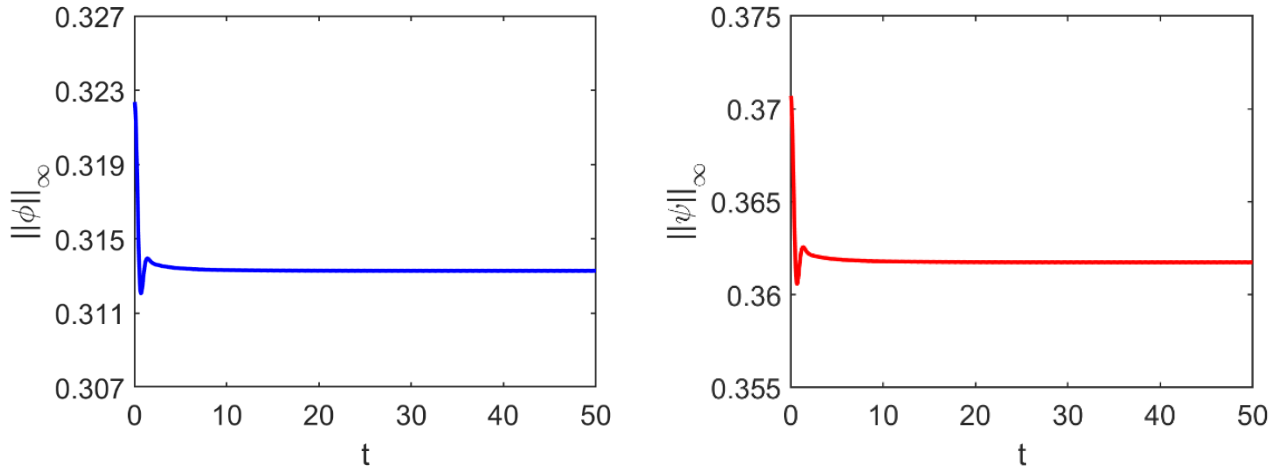


Şekil 8.  $a = 2$ ,  $b = 3$  ve  $\beta = 0.01$  için (1)-(2) sisteminin (24) başlangıç koşulları altındaki yalnız dalga çözümlerinin evrimi

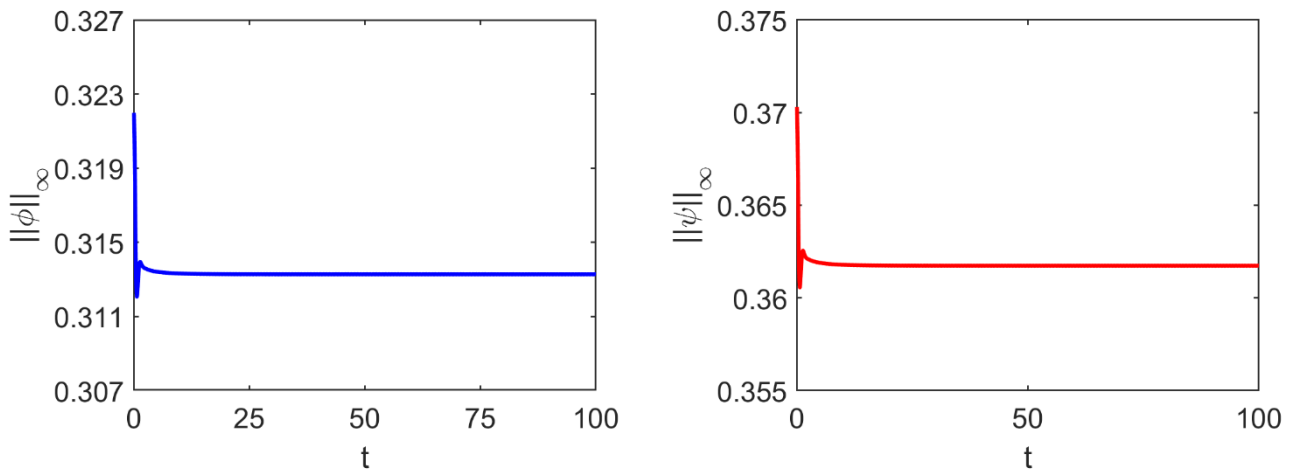




Şekil 9. (1)-(2) sisteminin  $a = 2$ ,  $b = 3$  ve  $\beta = 0.01$  için (24) başlangıç koşulları altında  $t = 50$  (solda) ve  $t = 100$  (sağda) anındaki yalnız dalga profilleri



Şekil 10.  $t = 50$  için  $\beta = 0.01$  ile pertürbe edilen yalnız dalga çözümlerinin  $L_\infty$  normlarının zamana göre değişimi



Şekil 11.  $t = 100$  için  $\beta = 0.01$  ile pertürbe edilen yalnız dalga çözümlerinin  $L_\infty$  normlarının zamana göre değişimi

Şekillerden görüldüğü üzere, çözümlerin  $L_\infty$  –normları küçük pertürbasyonlar altında sınırlı kalmaktadır. Sonuçlar, çözümlerin küçük pertürbasyonlar altında sınırlı kaldığını ve bu durumun çözümlerin kararlılıklarını gösterdiğini ortaya koymaktadır.

## SONUÇ

Bu çalışmada, kuple düzgünleştirilmiş Boussinesq denklemlerinin yalnız dalga çözümlerinin zaman içindeki evrimi ve kararlılık özellikleri sayısal olarak araştırılmıştır. Çözümlerin zaman evrimini incelemek için Fourier sözde-spektral ve dördüncü mertebeye Runge–Kutta yöntemlerini birleştiren bir sayısal şema kullanılmıştır. Çeşitli sayısal deneyler yapılarak, kullanılan yöntemin zamanda dördüncü mertebeden ve uzayda üstel mertebeden yakınsadığı gösterilmiştir. Sistemin yalnız dalga çözümlerinin küçük pertürbasyonlar altında kararlılığı sayısal olarak incelenmiştir. Çözümlerin kararlılığı, belirli parametreler altında test edilerek şekillerle desteklenmiştir. Yapılan sayısal deneyler, kuple düzgünleştirilmiş Boussinesq denklemlerinin yalnız dalga çözümlerinin küçük pertürbasyonlar altında kararlı olduğunu göstermektedir. Elde edilen bulgular, cIBq sisteminin çözümlerinin dinamikleri ve uzun zaman davranışlarını anlamak açısından önemli bir katkı sunmaktadır.

## Çıkar Çatışması

Makale yazarı herhangi bir çıkar çatışması olmadığını beyan eder.

## Yazar Katkısı

Yazar makalenin tamamına katkı sağladığını beyan eder.

## KAYNAKLAR

- Bona, J., Durán, A., & Mitsotakis, D. (2023). Solitary-wave solutions of Benjamin–Ono and other systems for internal waves: II. Dynamics. *Water Waves*, 5, 161–190. doi:10.1007/s42286-023-00076-w
- Chen, G., Guo, H., & Zhang, H. (2009). Global existence of solutions of Cauchy problem for generalized system of nonlinear evolution equations arising from DNA. *Journal of Mathematical Physics*, 50(8), 083514. doi:10.1063/1.3191683
- Chen, G., & Zhang, H. (2004). Initial boundary value problem for a system of generalized IMBq equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 27(5), 497–518. doi:10.1002/mma.444
- Christiansen, P. L., Lomdahl, P. S., & Muto, V. (1991). On a Toda lattice model with a transversal degree of freedom. *Nonlinearity*, 4(2), 477–501. doi:10.1088/0951-7715/4/2/012
- De Godefroy, A. (1998). Blow up of solutions of a generalized Boussinesq equation. *IMA Journal of Applied Mathematics (Institute of Mathematics & Its Applications)*, 60(2), 123–138. doi:10.1093/imamat/60.2.123
- Dougalis, V. A., Durán, A., López-Marcos, M. A., & Mitsotakis, D. E. (2007). A numerical study of the stability of solitary waves of the Bona–Smith family of Boussinesq systems. *Journal of Nonlinear Science*, 17(6), 569–607. doi:10.1007/s00332-007-9004-8
- Dougalis, Vassilios A., Duran, A., & Saridaki, L. (2023). On the numerical approximation of Boussinesq/Boussinesq systems for internal waves. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 39(5), 3677–3704. doi:10.1002/num.23021
- Gozukizil, O. F., & Akcagil, S. (2014). Travelling wave solutions for the coupled IBq equations by using the tanh-coth method. *Journal of Applied Mathematics*, 2014, 1–14. doi:10.1155/2014/486269
- Grimshaw, R. H. J., Khusnutdinova, K. R., & Moore, K. R. (2017). Radiating solitary waves in coupled Boussinesq equations. *IMA Journal of Applied Mathematics (Institute of Mathematics & Its Applications)*, 82(4), 802–820. doi:10.1093/imamat/hxx014

- Guo, H., & Chen, G. (2013). A note on the Cauchy problem for coupled imbq equations. *Acta Mathematica Scientia. Series B. English Edition*, 33(2), 375–392.  
doi:10.1016/s0252-9602(13)60005-3
- Khusnutdinova, K. R., Samsonov, A. M., & Zakharov, A. S. (2009). Nonlinear layered lattice model and generalized solitary waves in imperfectly bonded structures. *Physical Review. E, Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 79(5 Pt 2), 056606. doi:10.1103/PhysRevE.79.056606
- Li, Y. A. (2002). Hamiltonian structure and linear stability of solitary waves of the Green-naghdi equations. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 9(Supplement 1), 99-105.  
doi:10.2991/jnmp.2002.9.s1.9
- Pasinlioğlu, Ş. (2024). Long-time behavior of solutions to the general class of coupled nonlocal nonlinear wave equations. *Zeitschrift Fuer Angewandte Mathematik Und Physik*, 75(6).  
doi:10.1007/s00033-024-02342-4
- Pego, R. L., Smereka, P., & Weinstein, M. I. (1995). Oscillatory instability of solitary waves in a continuum model of lattice vibrations. *Nonlinearity*, 8(6), 921–941.  
doi:10.1088/0951-7715/8/6/003
- Turitsyn, S. K. (1993). On a Toda lattice model with a transversal degree of freedom. Sufficient criterion of blow-up in the continuum limit. *Physics Letters. A*, 173(3), 267–269. doi:10.1016/0375-9601(93)90276-6
- Wang, S., & Li, M. (2009). The Cauchy problem for coupled IMBq equations. *IMA Journal of Applied Mathematics (Institute of Mathematics & Its Applications)*, 74(5), 726–740.  
doi:10.1093/imamat/hxp024
- Wang, Y., & Tian, N. (2019). On the Cauchy problem for IMBq system arising from DNA. *Acta Mathematica Scientia. Series B. English Edition*, 39(4), 1136–1148.  
doi:10.1007/s10473-019-0416-y
- Wattis, J. A. D. (2001). Solitary waves in a diatomic lattice: analytic approximations for a wide range of speeds by quasi-continuum methods. *Physics Letters. A*, 284(1), 16–22. doi:10.1016/s0375-9601(01)00277-8