Sinopfbd, 2025; 10(2): 439-449 https://doi.org/10.33484/sinopfbd.1643702

Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi
Sinop Uni J Nat Sci
E-ISSN: 2564-7873
https://dergipark.org.tr/tr/pub/sinopfbd

Hales-Jewett Teoremi ile Asalların Sonsuzluğu

Azem Berivan ADIBELLİ[1] ve Sadık EYİDOĞAN[2]

How to cite: Adıbelli, A. B., & Eyidoğan, S. (2025). Hales-Jewett Teoremi ile asalların sonsuzluğu. *Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, *10*(2), 439-449. https://doi.org/10.33484/sinopfbd.1643702

Araştırma Makalesi

Sorumlu Yazar
Azem Berivan ADIBELLİ
azemadibelli@gmail.com

Yazarlara ait ORCID
A.B.A: 0009-0005-7995-1769
S.E: 0000-0003-4324-9845

Received: 20.02.2025
Accepted: 08.09.2025

Öz

Bu çalışmada, asal sayıların sonsuzluğunu kanıtlamak için Hales–Jewett Teoremi kullanılarak farklı bir yol izlenmektedir. Bu yaklaşım, asal sayıların dağılımını incelerken, onların belirli kombinatoriyel yapılar içinde nasıl yer aldığını ortaya koyar. Böylece asal sayıların yalnızca klasik aritmetik yöntemlerle değil, aynı zamanda daha geniş yapısal çerçeveler içinde de ele alınabileceği gösterilmiş olur.

Anahtar Kelimeler: Asalların sonsuzluğu, Hales-Jewett Teoremi, Ramsey Teorisi

The Infinitude of the Primes via the Hales-Jewett Theorem

[1]Umeå Üniversitesi, Matematik ve Matematiksel İstatistik Bölümü, Umeå, İsveç

[2]Çukurova Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Adana, Türkiye

Abstract

We take a different approach to prove the infinitude of the prime numbers by utilizing the Hales–Jewett Theorem. This method allows us to examine the distribution of primes while observing how they are situated within specific combinatorial structures. In this way, we demonstrate that primes can be studied not only through classical arithmetic methods but also within broader structural frameworks.

Keywords: Infinitude of the prime numbers, Hales-Jewett Theorem, Ramsey Theory

Giriş

Ramsey teorisi, kümelerin parçalanması sırasında belirli özelliklerin nasıl korunduğunu inceleyen kombinatoriğin bir dalıdır. Ramsey teorisi, belirli bir S kümesi ve bir P özellliği için, S herhangi bir sonlu alt kümeye parçalandığında, alt kümelerden en az birinin P özelliğini koruyup koruyamayacağını araştırır. Ramsey teorisinin temelleri, Frank Ramsey tarafından atılmıştır. 1930 yılında yayınladığı, *On a Problem of Formal Logic* Ramsey [1] makalesinde, daha sonra Ramsey Teoremi olarak adlandırılacak önemli bir sonucu ortaya koymuştur.

Teorem 1 (İki renk için Ramsey Teoremi, Ramsey [1])**.** Eğer $s, t \geq 2$ pozitif tam sayılar ise, o zaman öyle R tam sayısı vardır ki, R köşeli tam çizge olan K_R'nin her ikili kenar-boyamasında (kırmızı ve mavi renkleriyle) ya kırmızı bir K_s alt çizgesi ya da mavi bir K_t alt çizgesi mevcuttur.

Literatürde, verilen $s, t \geq 2$ pozitif tam sayılarına karşılık iki renk için Ramsey teoremini sağlayan R değerleri arasındaki en küçük pozitif tam sayıya, s ve t'ye bağlı Ramsey sayısı denir ve $R(s, t)$ ile gösterilir. Ramsey teorisi, yalnızca kümelerin parçalanmasını incelemekle kalmaz, aynı zamanda bu yapıların içindeki belirli kombinatoriksel desenlerin varlığını da sorgular. Bu çerçevede Ramsey teorisi, belirli kümeler ve bu kümeler üzerinde tanımlı özellikler, matematiksel yapıları çözümlemek için güçlü bir araç sunar.
1916 yılında Issai Schur, Ramsey teorisinin en erken sonuçlarından birini ortaya koymuş ve bu sonuç Schur Teoremi olarak bilinmektedir.

Teorem 2 (Schur Teoremi, Schur [2])**.** Eğer pozitif tam sayılar sonlu sayıda renkle boyanırsa, her zaman $x + y = z$ denklemini sağlayan tek renkli bir çözüm vardır.

Tam sayı kümesi üzerinde aşikâr olmayan k-terimli bir aritmetik dizi, başlangıç değeri $a \in \mathbb{Z}$ ve ortak farkı $d \neq 0$ olmak üzere $a, a + d, \ldots, a + (k - 1)d$ şeklinde tanımlanır.
Bir S kümesinin r-renkli boyaması, S kümesine atanmış bir $\chi : S \to C$ fonksiyonudur ve burada $|C| = r$ özelliğini sağlar. Bu tür boyamalar altında belirli desenlerin korunup korunmadığını incelemek, Ramsey tipi problemlerin temelini oluşturur.
1927 yılında Hollandalı matematikçi Bartel Leendert van der Waerden, bu bağlamda aritmetik dizilerle ilgili Ramsey teorisinin en temel sonuçlarından birini ortaya koymuştur.

Teorem 3 (van der Waerden Teoremi, van der Waerden [3])**.** Her $k, r \in \mathbb{Z}^+$ için, öyle bir $W(k, r)$ tam sayısı vardır ki, $\{1, 2, \ldots, W(k, r)\}$ kümesinin herhangi bir r-renklendirmesi verildiğinde bu küme içerisinde tek renkli aşikar olmayan k-terimli bir aritmetik dizi mevcuttur.

Bu sonuç, aritmetik dizilerin kaçınılmaz biçimde ortaya çıktığını göstererek Ramsey teorisinin güçlü doğasını gözler önüne sermektedir.
Graham ve Rothschild'in Ramsey teorisinin incisi olduğunu iddia ettikleri Hales-Jewett teoremi, 1963 yılında Alfred W. Hales ve Robert I. Jewett tarafından [4] çalışmasında yayınlandı. Bu teorem, yalnızca renkli küme boyamalarında aşikar olmayan aritmetik desenlerin varlığını değil, aynı zamanda bu desenlerin nasıl ve ne zaman ortaya çıkacağını da belirler. Hales-Jewett teoremine göre, keyfi $t, r \in \mathbb{Z}^+$ tam sayıları için, öyle minimum bir $HJ(t, r)$ tam sayısı vardır ki, eğer $N \geq HJ(t, r)$ ve $[t]^N$ kümesi r renkle boyanmış ise o zaman $([t] \cup \{*\})^N$ içinde bir kök olan τ kelimesi bulunur ve bu kökle üretilmiş L_τ kombinatorik doğrusundaki tüm elemanlar aynı renkte olur.
Hales–Jewett teoremi, Ramsey teorisinin yapısal derinliğine ulaşan ve birçok sonuç için çerçeve sunan güçlü bir araçtır. Özellikle, van der Waerden teoremini kapsayan daha genel bir sonuç olması açısından dikkat çekicidir. Bu teoremi kullanarak van der Waerden teoreminin nasıl kanıtlanabileceğiyle ilgili olarak Näslund'un çalışmasına bakılabilir [5]. Hales–Jewett teoremini daha iyi kavrayabilmek için gerekli tanımlar ve araçlar bir sonraki bölümde sunulacaktır.
Erdős ve Turán, Ramsey teorisine yaptıkları önemli katkıların ardından 1936 yılında daha güçlü bir varsayım ileri sürmüştür. Bu varsayıma göre, pozitif üst yoğunluğa sahip pozitif tam sayıların herhangi bir alt kümesi, keyfi uzunlukta aşikar olmayan aritmetik diziler içermelidir (Erdős ve Turán [6]).

Tanım 1. $A \subseteq \mathbb{N}$ olsun. A kümesinin üst yoğunluğu şu şekilde tanımlanır ve $\overline{d}(A)$ ile gösterilir:

$$\overline{d}(A) = \limsup_{N\to\infty} \frac{|A \cap \{1, 2, \ldots, N\}|}{N}.$$

Ayrıca, $0 \leq \overline{d}(A) \leq 1$.

1953'te Klaus Roth [7], Fourier analizi kullanarak 3-terimli aritmetik diziler için Erdős-Turán varsayımının doğru olduğunu kanıtladı. Daha sonra, 1975'te Endre Szemerédi [8], kombinatorik şaheser olarak anılan bir kanıtla, varsayımı tamamen çözdü. Roth ve Szemerédi'nin teoremleri, toplamsal kombinatorikte çığır açan başarılar olarak kabul edilir.

Teorem 4 (Szemerédi Teoremi, Szemerédi [8])**.** Pozitif tam sayıların pozitif üst yoğunluğa sahip her alt kümesi, keyfi uzunlukta aşikar olmayan aritmetik diziler içerir.

Ramsey teorisi, matematikçiler tarafından çeşitli önemli teoremleri kanıtlamak için kullanılan güçlü bir araçtır. Örneğin, asal sayıların sonsuzluğunun çeşitli ispatları, Ramsey tipi teoremlerden faydalanılarak da elde edilmiştir.
2015 yılında Alpoge [9], tam sayıların toplamsal düzenliliği ile asal çarpanlarına ayrılmaları arasında ilginç bir bağlantı kurmuştur. Alpoge, çalışmasında van der Waerden teoremini kullanarak asal sayıların sonsuzluğunu göstermiştir. Toplamsal kombinatorik yoluyla elde ettiği bu ispat, toplamsal sayı teorisi ile çarpımsal sayı teorisi arasındaki derin bağı ortaya koymaktadır.
Alpoge'nin çalışmasının ardından, 2017 yılında Granville [10], asal sayıların sonsuzluğuna dair yeni bir ispat sunmuştur. İspatında van der Waerden teoremini ve ünlü Fermat teoremini kullanmıştır; bu teorem, tam kareler kümesinde dört terimli aritmetik dizilerin bulunmadığını ifade etmektedir.
2021 yılında Elsholtz [11], asal sayıların sonsuzluğunu toplamsal kombinatorik ve Ramsey kuramındaki önemli sonuçlarla ilişkilendirmiştir. Özellikle, Fermat'ın son teoremi ve Schur teoremini kullanarak asal sayıların sonsuzluğunu ispatlamıştır.
2023'te Göral ve ark. [12] genelleştirilmiş polinomsal van der Waerden teoremini kullanarak bazı birimli, sonsuz ve tek türlü çarpanlarına ayrılma bölgelerinde asal elemanların sonsuzluğunu kanıtlamıştır. Aynı yıl Gasarch [13], Fermat'ın son teoremine benzer bir denklemin çözümü olmaması durumunda, $\mathbb{Z}$'yi içeren bir atomik tamlık bölgesi D'nin sonsuz sayıda indirgenemez elemana sahip olacağını göstermiştir.
Okuyucular, asal sayıların sonsuzluğuna dair daha fazla ispat için Meštrović'in derlemesi [14] ile Göral [15] ve Göral ve Özcan [16] makalelerine bakabilirler. Ayrıca, toplamsal kombinatorik ile asal sayıların sonsuzluğu arasındaki bağlantılar için ise William Gasarch'ın bloğuna [17] başvurabilirler.
Bu çalışmada, asal sayıların sonsuzluğuna dair alternatif bir ispat sunacağız. İspatımız Hales-Jewett teoremine dayanacaktır. Böylece, toplamsal ve çarpımsal sayı teorisini birleştiren başka bir bakış açısı da göreceğiz.

Hales-Jewett Teoremi

Bu bölümde, Hales-Jewett teoremi ile ilgili temel kavramlar ele alınacak olup sonrasında Hales-Jewett teoremi detaylı bir şekilde açıklanacaktır.
Bölüm boyunca, $t \geq 1$ bir tam sayı olmak üzere $\{1, \ldots, t\}$ kümesi $[t]$ ile gösterilecektir. A kümesinin, t sembolden oluşan bir alfabe olduğunu kabul edelim, örneğin $A = [t]$. A kümesinden seçilen sonlu bir

sembol dizisi, bir *kelime* olarak tanımlanır ve kelimenin uzunluğu, dizideki sembollerin sayısıdır. A^n'yi, A'dan gelen n uzunluğundaki kelimeler kümesiyle özdeşleştirelim.

Örnek 1. $A = \{1, 2, 3\}$ kümesi, 3 sembolden oluşan bir alfabe olsun. Dört uzunluğunda bir kelimeye örnek olarak $w = 1212$ kelimesi verilebilir. Bu durumda, A'dan gelen 2 uzunluğundaki kelimeler kümesini aşağıdaki şekilde gösterebiliriz:

$$A^2 = \{11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33\}.$$

Tanım 2 (Näslund [5])**.** $t \geq 1$ bir tam sayı olmak üzere $[t]$ sembol kümesine $*$ karakteri eklenerek oluşturulan $[t] \cup \{*\}$ kümesine, genişletilmiş bir alfabe denir. $*$ karakterine, joker karakter (wildcard) adı verilir. Ayrıca, genişletilmiş bir alfabe üzerinde yazılmış kelimelere de değişken kelimeler denir.

Örnek 2. $A = \{1, 2, 3\}$'ün 3 sembolden oluşan bir alfabe olduğunu varsayalım. O zaman, A alfabesinin genişletilmiş bir alfabesi aşağıdaki şekildedir;

$$A \cup \{*\} = \{1, 2, 3, *\}.$$

Genişletilmiş bu alfabe üzerinde yazılı $\tau_1 = 233, \tau_2 = 1 * 123, \tau_3 = *1 * 23$ kelimeleri, sırasıyla 3,4 ve 5 uzunluklu değişken kelimelerdir.

Tanım 3 (Näslund [5])**.** $n \geq 1$ olmak üzere n uzunluğunda

$$\tau = x_1 \cdots x_n \in ([t] \cup \{*\})^n$$

bir değişken kelime verilsin. Eğer τ değişken kelimesindeki sembollerden en az biri $*$, yani $\exists i \in \{1, \ldots, n\}$ için $x_i = *$ ise τ kelimesine, *kök* denir.

τ kelimesine kök denmesinin sebebi, τ içerisinde yer alan $*$ karakteri yerine A kümesindeki herhangi bir a sembolü yazılarak kök τ'dan yeni bir kelime elde edilebilir olmasıdır. Elde edilen bu kelime $\tau(a)$ ile gösterilir.

Örnek 3. $A = \{1, 2, 3\}$ kümesi, 3 sembolden oluşan bir alfabe olsun. Bu durumda aşağıdaki kelimeler $A \cup \{*\}$ üzerinde yazılabilecek köklere örnek teşkil eder:

$$\tau_1 = 12 * 3$$
$$\tau_2 = *1$$
$$\tau_3 = 12 * 3 * 1.$$

Bu köklerden şöyle kelimeler elde edilebilir:

$$\tau_1(1) = 1213$$
$$\tau_2(1) = 11$$
$$\tau_3(1) = 121311.$$

Bu andan itibaren $A = [t]$ olarak kabul edelim.

Tanım 4 (Näslund [5]). $A \cup \{*\}$ üzerinde yazılmış herhangi bir kök τ için

$$L_\tau = \{\tau(1), \ldots, \tau(t)\}$$

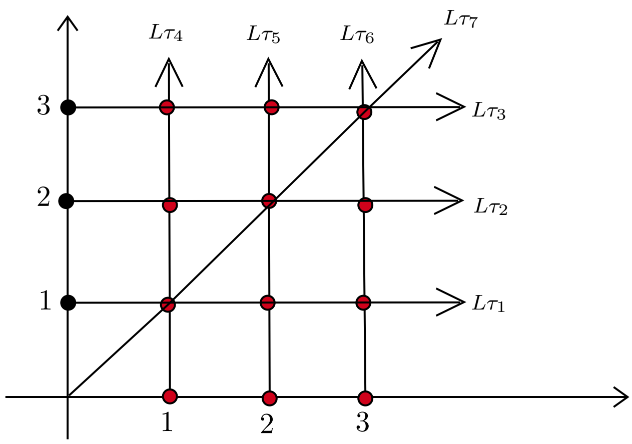
kümesine, kök τ'nun ürettiği kombinatorik doğru denir.

Örnek 4. $A = \{1, 2, 3\}$ ve $n = 2$ olsun. 2 uzunluğundaki olası tüm kökler aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\tau_1 = *1$$
$$\tau_2 = *2$$
$$\tau_3 = *3$$
$$\tau_4 = 1*$$
$$\tau_5 = 2*$$
$$\tau_6 = 3*$$
$$\tau_7 = **.$$

Yukarıdaki köklere göre tüm kombinatorik doğrular aşağıdaki gibi olur:

$$L_{\tau_1} = \{11, 21, 31\}$$
$$L_{\tau_2} = \{12, 22, 32\}$$
$$L_{\tau_3} = \{13, 23, 33\}$$
$$L_{\tau_4} = \{11, 12, 13\}$$
$$L_{\tau_5} = \{21, 22, 23\}$$
$$L_{\tau_6} = \{31, 32, 33\}$$
$$L_{\tau_7} = \{11, 22, 33\}.$$



Şekil 1. *A^3'te yukarıdaki kökler tarafından verilen kombinatorik doğrular.*

Artık Hales-Jewett teoremini ifade etmeye hazırız.

Teorem 5 (Hales-Jewett Teoremi, [18]). Keyfi $t, r \in \mathbb{Z}^+$ tam sayıları için, öyle minimum bir $HJ(t, r)$ tam sayısı vardır ki, eğer $N \geq HJ(t, r)$ ve $[t]^N$ kümesi r renkle boyanmış ise o zaman $([t] \cup \{*\})^N$ içinde bir kök olan τ kelimesi bulunur ve bu kökle üretilmiş L_τ kombinatorik doğrusundaki tüm elemanlar aynı renkte olur.

Hales-Jewett teoreminin bazı uygulamaları için Näslund [5] incelenebilir. Şimdi, Hales ve Jewett'in bu önemli teoremini kullanarak asal sayıların sonsuzluğunun başka bir kanıtını vereceğiz.

Hales-Jewett Teoremi ve Asalların Sonsuzluğu

Bu bölümde, asal sayıların sonsuzluğu Hales-Jewett teoremi kullanılarak kanıtlanacaktır. İlk olarak kanıtta boyama fonksiyonu tanımında önemli rol oynayacak olan p-sel değerleme kavramını hatırlatarak başlayalım.

Tanım 5 (p-sel değerleme, [19])**.** R tek türlü çarpanlarına ayrılan tamlık bölgesi (unique factorization domain) ve $a \in R \setminus \{0\}$ olsun. R'deki herhangi bir asal p elemanı verildiğinde, a'nın p-sel değerlemesi, p'nin a'yı bölen en büyük kuvvetidir ve bu da $\nu_p(a)$ ile gösterilir. Ayrıca, 0'ın p-sel değerlemesi ∞ olarak verilir.

R'deki herhangi iki a, b elemanı ve R'deki bir asal p elemanı için, p-sel değerleme aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$\nu_p(ab) = \nu_p(a) + \nu_p(b), \tag{1}$$

$$\nu_p(a+b) \geq \min\{\nu_p(a), \nu_p(b)\}. \tag{2}$$

Eğer $\nu_p(a) \neq \nu_p(b)$ ise o zaman

$$\nu_p(a+b) = \min\{\nu_p(a), \nu_p(b)\}. \tag{3}$$

Teorem 6. Asal sayılar sonsuzdur.

İspat. $\mathbb{Z}^+$'da yalnızca sonlu sayıda $p_1, \ldots, p_k$ asal sayısı olduğunu varsayalım. Bu durumda, $s = p_1 \cdots p_k$ değeri tanımlayalım ve s'den büyük olacak şekilde bir t pozitif tam sayısı seçelim.
Pozitif tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}^+$ üzerinde aşağıdaki gibi bir 4^k-renklendirmesi tanımlansın:

$$\chi : \mathbb{Z}^+ \to (\{0,1\} \times \{0,1\})^k$$

olmak üzere boyama fonksiyonu şu şekilde belirlensin

$$\chi(n) = ((a_1, b_1), \ldots, (a_k, b_k)).$$

Burada, a_i ve b_i değerleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$a_i = \begin{cases} 1, & \text{eğer } p_i | n, \\ 0, & \text{diğer durumda,} \end{cases}$$

ve

$$b_i \equiv \nu_{p_i}(n) \pmod 2.$$

Şimdi, $[t]^N$ kümesi ($[t]$ alfabesi üzerinde N uzunluklu tüm olası kelimelerin kümesi olduğu hatırlanarak) üzerinde aşağıdaki şekilde bir 4^k-renklendirmesi tanımlansın:

$$x_1 x_2 \cdots x_N \in [t]^N \text{ için } \quad \chi'(x_1 \cdots x_N) = \chi\left(x_1 + s \cdot \sum_{i=2}^{N} x_i\right).$$

$N \geq HJ(t, 4^k)$ için, Hales-Jewett teoremine göre, $([t] \cup \{*\})^N$ içinde öyle bir kök τ kelimesi bulunur ki bu kökle üretilmiş L_τ kombinatorik doğrusundaki tüm elemanlar aynı renkte boyanmıştır, yani χ' boyama fonksiyonu altında sabittir.

Burada iki farklı durum oluşabilir:

Durum 1. Kök τ'nun ilk bileşeni joker karakteri olsun:
Bu durumda, τ kökü $*x_2 \cdots x_N \in ([t] \cup \{*\})^N$ şeklinde olacaktır. Kök τ'da d tane $*$ olduğunu varsayalım ve $*$'dan farklı olan x_i'lerin toplamını B ile gösterelim ve burada $i \in \{2, \ldots, N\}$ olur.
Bu durumda, aşağıdaki ifadeler elde edilir;

$$\begin{aligned}
\chi'(\tau(1)) &= \chi(1 + s \cdot B + s \cdot (d-1)),\\
\chi'(\tau(2)) &= \chi(2 + s \cdot B + 2 \cdot s \cdot (d-1)),\\
&\ \ \vdots\\
\chi'(\tau(t)) &= \chi(t + s \cdot B + t \cdot s \cdot (d-1)).
\end{aligned}$$

L_τ kombinatorik doğrusundaki tüm elemanlar aynı renk ile boyanmış olduğundan

$$\chi'(\tau(1)) = \chi'(\tau(2)) = \cdots = \chi'(\tau(t))$$

eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla aşağıdaki eşitlik durumlarına ulaşılır

$$\chi(1 + s \cdot B + s \cdot (d-1)) = \cdots = \chi(t + s \cdot B + t \cdot s \cdot (d-1)).$$

$\tau(1)$ ve $\tau(2)$'yi düşünelim. Aynı renge sahip oldukları için,

$$1 + s \cdot B + s \cdot (d-1) \quad \text{ve} \quad 2 + s \cdot B + 2 \cdot s \cdot (d-1)$$

ortak p asal bölenlere sahiptir. Eğer p asalı, $1+s \cdot B+s \cdot (d-1)$ ve $2+s \cdot B+2 \cdot s \cdot (d-1)$'i bölüyorsa, o zaman p bu terimlerin farklarını da böler. Fakat bu durum bir çelişki yaratır çünkü bu sayılar arasındaki fark

$$1 + s \cdot (d-1) = 1 + p_1 \cdots p_k \cdot (d-1).$$

Durum 2. Kök τ'nun ilk bileşeninin joker karakteri olmadığını kabul edelim:
Bu durumda, $x_1 \neq *$ olmak üzere $\tau = x_1 x_2 \cdots x_N \in ([t] \cup \{*\})^N$ şeklinde olacaktır. Durum 1'deki gibi

B ve d değerleri tanımlanırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir;

$$\chi'(\tau(1)) = \chi(x_1 + s \cdot B + s \cdot d),$$
$$\chi'(\tau(2)) = \chi(x_1 + s \cdot B + 2 \cdot s \cdot d),$$
$$\vdots$$
$$\chi'(\tau(t)) = \chi(x_1 + s \cdot B + t \cdot s \cdot d).$$

L_τ kombinatorik doğrusundaki tüm elemanlar aynı renk ile boyanmış olduğundan

$$\chi'(\tau(1)) = \chi'(\tau(2)) = \cdots = \chi'(\tau(t))$$

eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla, bu sefer aşağıdaki eşitlik durumlarına ulaşılır;

$$\chi(x_1 + s \cdot B + s \cdot d) = \chi(x_1 + s \cdot B + 2 \cdot s \cdot d) = \cdots = \chi(x_1 + s \cdot B + t \cdot s \cdot d).$$

Böylece χ boyama fonksiyonuna göre aynı renge sahip bir aritmetik dizi elde edilmiş olur. Elde edilen aritmetik dizinin ilk terimi $a = x_1 + s \cdot B + s \cdot d$ ve ortak farkı $z = s \cdot d$ olur.
Basitleştirmek adına bu aritmetik dizi

$$a, a + z, \ldots, a + (t-1)z$$

şeklinde yeniden yazılabilir.
Şimdi, a'yı bölen bir p asalı seçelim. a ve $a + z$, χ boyamasına göre aynı renge sahip olduğundan, p ayrıca $a + z$'yi böler. Bu da p'nin z'yi böldüğü anlamına gelir.
$\nu_p(z) < \nu_p(a)$ olduğunu varsayalım. a ve $a + z$, aynı renge sahip olduğundan,

$$\nu_p(a) \equiv \nu_p(a + z) \pmod 2$$

denklik durumu elde edilir. $\nu_p(z) < \nu_p(a)$ olduğundan, (3) kullanılarak

$$\nu_p(a + z) = \nu_p(z)$$

eşitliği elde edilir. Böylece

$$\nu_p(a) \equiv \nu_p(z) \pmod 2 \tag{4}$$

denklik durumuna ulaşılır. Ayrıca, $\nu_p(z) < \nu_p(a)$ eşitsizliği mevcut olduğundan, (4) kullanılarak

$$\nu_p(z) \leq \nu_p(a) - 2$$

eşitsizliği elde edilir.
Öte yandan, $t > s$ olduğundan $a+z$ ve $a+sz$ değerleri de χ boyamasına göre aynı renge sahip olmalıdır.

E-ISSN: 2564-7873

Bu, şunu ifade eder;

$$\nu_p(a+z) \equiv \nu_p(a+sz) \pmod 2,$$
$$\nu_p(z) \equiv \nu_p(a+sz) \pmod 2.$$

$\nu_p(z) \leq \nu_p(a) - 2$ ve $s = p_1 \cdots p_k$ olduğundan

$$\nu_p(a+sz) = \nu_p(z) + 1$$

sonucu çıkarılır. Böylece,

$$\nu_p(z) \equiv \nu_p(z) + 1 \pmod 2$$

olduğu görülür ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, $\nu_p(a) \leq \nu_p(z)$ eşitsizliği geçerli olmalıdır. Bu ise $\nu_p(a) < \nu_p(sz)$ sonucunu verir. Elde edilen bu eşitsizlik ve (3) kullanılarak, herhangi bir p asal sayısı için $\nu_p(a) = \nu_p(a+sz)$ eşitliğinin sağlanması gerektiği sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla, aritmetiğin temel teoremine göre $a = a + sz$ olur ve bu da bir çelişki verir.
Sonuç olarak, pozitif tam sayılarda sonsuz sayıda asal sayı olduğu çelişki bulma kanıt yöntemiyle ispat edilmiş olur.

Sonuç

Bu çalışmada, asal sayıların sonsuzluğunu kanıtlamak için alışılmış aritmetik yaklaşımların ötesine geçilerek, Ramsey teorisinin temel taşlarından biri olan Hales–Jewett teoremi kullanılmıştır. Bu yöntem, asal sayıların dağılımının yalnızca sayılar teorisi bağlamında değil, aynı zamanda kombinatoriyel yapıların içinde nasıl yer aldığını da ortaya koymaktadır. Böylece asal sayıların sonsuzluğu, geniş yapısal bir perspektiften, renkli desenlerin zorunlu varlığına dayalı bir çerçevede ele alınmıştır.
Elde edilen sonuç, asal sayıların klasik aritmetik araçlara ek olarak, kombinatorik ve yapısal yöntemlerle de incelenebileceğini göstermektedir. Bu bakış açısı, sayıların düzeniyle ilgili derin bağlantıları ortaya koymakta ve Ramsey teorisinin temel ilkelerinin aritmetik problemlere uygulanabilirliğini örneklemektedir.

Teşekkür Yazarlar, yorumları ve önerileriyle bu makalenin geliştirilmesine ve netleştirilmesine katkıda bulunan hakemlere teşekkür eder. Ayrıca, bu çalışmanın dahil olduğu TÜBİTAK projesinin yürütücüsü Haydar GÖRAL'a desteklerinden dolayı teşekkür eder.

Fon/Finansman bilgileri Bu çalışma kısmen Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu tarafından TÜBİTAK-122F027 proje numarasıyla desteklenmiştir.

Etik Kurul Onayı ve İzinler Çalışma, etik kurul izni ve herhangi bir özel izin gerektirmemektedir.

Çıkar çatışmaları/Çatışan çıkarlar Yazarlar çıkar çatışması olmadığını beyan eder.

Yazarların Katkısı Tüm yazarlar eşit oranında katkı sağlamıştır. Tüm yazarlar makalenin son halini okumuş ve onaylamıştır.

Kaynaklar

[1] Ramsey, F. P. (1930). On a problem of formal logic. *Proceedings of the London Mathematical Society 30*, 264-286.

[2] Schur, I. (1916). Über die kongruenz $x^m + y^m \equiv z^m \pmod{p}$. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 25*.

[3] van der Waerden, B. L. (1927). Beweis einer baudetschen vermutung. *Nieuw Archief voor Wiskunde 15*, 212-216.

[4] Hales, A. W., & Jewett, R. I. (1963). Regularity and positional games. *Transactions of the American Mathematical Society 106*, 222–229.

[5] Näslund, M. (2013). The Hales-Jewett Theorem and its application to further generalizations of m, n, k-games.

[6] Erdős, P., & Turán, P. (1936). On some sequences of integers. *Journal of the London Mathematical Society 11*, 261–264. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-11.4.261

[7] Roth, K. F. (1953). On certain sets of integers. *Journal of the London Mathematical Society, 28*, 104–109. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-28.1.104

[8] Szemerédi, E. (1975). On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression. *Acta Arithmetica, 27*, 199–245.

[9] Alpoge, L. (2015). Van der Waerden and the primes. *American Mathematical Monthly 122*, 784–785. https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.122.8.784

[10] Granville, A. (2017). Squares in arithmetic progressions and infinitely many primes. *American Mathematical Monthly, 124*, 951–954. doi.org/10.4169/amer.math.monthly.124.10.951

[11] Elsholtz, C. (2020). Fermat's Last Theorem implies Euclid's infinitude of primes. *American Mathematical Monthly, 128*, 250–257. https://doi.org/10.1080/00029890.2021.1856544

[12] Göral, H., Özcan, H. B., & Sertbaş, D. C. (2022). The Green-Tao Theorem and the infinitude of primes in domains. *American Mathematical Monthly, 130*, 114–125.

[13] Gasarch, W. (2023). Fermat's Last Theorem, Schur's Theorem (in Ramsey theory), and the infinitude of the primes. *Discrete Mathematics, 346*. https://doi.org/10.1016/j.disc.2023.113877

[14] Meštrović, R. (2023). Euclid's Theorem on the infinitude of primes: a historical survey of its proofs (300 B.C.-2022). https://doi.org/10.48550/arXiv.1202.3670

[15] Göral, H. (2020). $p-$adic metrics and the infinitude of primes. *Mathematics Magazine 93*, 19–22.

[16] Göral, H., & Özcan, H. B. (2020). Several novel proofs of the infinitude of primes. *Mathematics Student 89*, 91–95.

[17] Gasarch, W. (2024). A webpage of papers that prove primes infinite using Ramsey Theory. Retrieved from https://www.cs.umd.edu/ gasarch/TOPICS/ramseyprimes/ramseyprimes.html

[18] Hales, A. W., & Jewett, R. I. (2009). Regularity and positional games. In Classic Papers in Combinatorics (pp. 320-327). Boston, MA: Birkhäuser Boston.

[19] Gouvêa, F. Q. (2020). *p-adic Numbers: An Introduction*. Third edition, Springer.