Erzincan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
2018, (11), 1
ISSN: 1307-9085, e-ISSN: 2149-4584

Erzincan University
Journal of Science and Technology
2018, (11), 1
DOI: 10.18185/erzifbed.350318

8-Boyutlu Oktoniyon Uzayında Reel Oktoniyonları Kullanarak Oktoniyonik Rektifiyan, Oskülatör ve Normal Eğrilerin Özelliklerinin Belirlenmesi

Özcan BEKTAŞ*[1], Salim YÜCE[2]

[1]Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Rize, Türkiye

[2] Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, İstanbul, Türkiye

Geliş / Received: 09/11/2017, Kabul / Accepted: 05/02/2018

Öz
Bu çalışmada, 8-boyutlu oktoniyon uzayda, reel oktoniyonlarla, oktoniyonik rektifiyan, oskülatör ve normal eğrilerin özelliklerinin nasıl belirlenebileceği konusu üzerine odaklanılmıştır. Öncelikle, oktoniyonlar cebirleri ve 8-boyutlu oktoniyon uzayında oktoniyonik eğriler hakkında bazı bilgiler verilmiştir. Daha sonra 8-boyutlu oktoniyon uzayda oktoniyonik rektifiyan, oskülatör ve normal eğrileri tanımlanmıştır. Son olarak, oktoniyonik rektifiyan, oskülatör ve normal eğrilerin bazı karakterizasyonları elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Oktoniyonik rektifiyan eğri, Oktoniyonik oskülatör eğri, Oktoniyonik normal eğri Oktoniyon uzay

Determination of Properties of Octonionic Rectifying, Osculating and Normal Curves Using Real Octonions in 8-Dimensional Octonion Space

Abctract
In this study, we focus on the issue of how to determine properties of octonionic rectifying, osculating and normal curves by means of real octonions in 8-dimensional octonion space. Firstly, we give some informations about octonion algebras, and octonionic curves in 8-dimensional octonion space. After that, we define octonionic rectifying, osculating and normal curves in 8-dimensional octonion space. Finally, we obtain some characterizations of the octonionic rectifying, osculating and normal curves.

Keywords: Octonionic rectifying curve, Octonionic osculating curve, Octonionic normal curve, Octonion space

1. Giriş

Diferensiyel geometrinin en dikkat çekici konularının başında eğriler teorisi gelmektedir. Özellikle, farklı cebirsel yapıların diferensiyel geometriye uygulanabilirliğiyle beraber, bazı özel eğriler, önemli problemlerin cevaplanmasında belirleyici rol oynamaktadır. Bu özel eğrilerden bazıları rektifiyan, oskülatör ve normal eğrilerdir. Bir uzaysal eğrinin pozisyon (yer) vektörünün hangi durumlarda daima yer vektörünün rektifiyan düzleminde yattığı sorusuna cevap olarak, rektifiyan eğrisi tanımlamıştır (Chen, 2003). Tanımlanan ve karakterizasyonları incelenen rektifiyan eğrilerinin 3 boyutlu Minkowski uzayındaki tanımı ve karakterizasyonları da çalışılmıştır (Ilarslan vd., 2003). Rektifiyan eğrileri farklı bir bakış açısıyla geniş bir alanda incelenmiştir (Chen ve Dillen, 2005). Yine bu alanda elde edilen tanım, teorem ve sonuçların karşılıkları 3 boyutlu Minkowski uzayında bulunmuştur (Ilarslan ve Nesovic, 2007). Diğer taraftan rektifiyan eğrilerinin farklı boyutlarda tanımları da verilmiştir. Rektifiyan eğrilerinin bazı temel özellikleri 4 boyutlu Öklid uzayında incelenmiştir (Ilarslan ve Nesovic, 2008a). Bunun yanında, rektifiyan eğrileri n boyutlu Öklid uzayında da tanımlanmıştır (Cambie vd., 2016). Diğer taraftan, oskülatör ve normal eğri kavramı rektifiyan eğri tanımına benzer olarak verilmiştir (Ilarslan ve Nesovic, 2008b).

*Correspondence to: ozcan.bektas@erdogan.edu.tr

Bu çalışmayla beraber oskülatör eğrilerin bazı karakteristik özellikleri 3 ve 4 boyutlu Öklid uzayında incelenmiştir (Ilarslan ve Nesovic, 2008b). Kuaterniyonlar cebiri Hamilton tarafından tanımlanmıştır (Hamilton, 1866). Kuaterniyonlar, diferensiyel geometride özellikle eğriler teorisinde bir çok başlık altında incelenmiştir. Diferensiyel geometride oldukça popüler olan Serret Frenet formülleri kuaterniyonlar yardımıyla 3 ve 4 boyutlu Öklid uzayında, yeniden hesaplanmıştır (Bharathi ve Nagaraj, 1987). Kuaterniyonik eğriler için yapılan bu hesaplamalar kullanılarak, kuaterniyonik rektifiyan eğrileri (Gungor ve Tosun, 2011), kuaterniyonik oskülatör eğrileri (Bektas vd., 2016) ve kuaterniyonik normal eğrileri verilmiştir (Yıldız ve Ozkaldı Karakus, 2013). Oktonionlar araştırmacıların çalıştığı bir diğer cebirsel yapıdır. Oktoniyonlar değişmeli ve birleşmeli olmayan, fakat normlu bir bölüm cebiri olan cebirsel yapılardır. Oktoniyonlar Graves ve Cayley tarafından bağımsız olarak keşfedilmiştir. Oktoniyonların cebirsel ve geometrik özellikleriyle ilgili geniş bilgiler mevcuttur (Dray ve Manogue, 2015; Baez, 2002). Oktoniyonik eğriler için Serret Frenet formülleri 7 ve 8 boyutlu Öklid uzayında verilmiştir (Bektas ve Yuce, 2014 ve 2020). Biz bu çalışmamızda, oktoniyonik rektifiyan, oskülatör ve normal eğrileri reel oktoniyonlar yardımıyla 8 boyutlu oktoniyon uzayında tanımlayacağız. Daha sonra bu özel oktoniyonik eğrilerin bazı karakteristik özelliklerini inceleyeceğiz.

2. Temel Kavramlar

Bu bölümde, ilk olarak reel oktoniyonlarla ilgili temel bilgilere yer verilecektir. Daha sonra, oktoniyonik eğrilerin Serret Frenet formülleri 8 boyutlu Öklid uzayında verilecektir.

2.1. Oktoniyonlar

Bir reel oktoniyon veya kısaca oktoniyon, A_i $(i=0,1,2,...,7)$ terimleri birer reel sayı, $e_0=1$ skaler eleman ve e_i $(i=1,2,...,7)$ ler de standart birim baz elemanları olmak üzere, $A=\sum_{i=0}^{7} A_i e_i$ şeklinde tanımlanır. Birim oktoniyon baz elemanlarının çarpım tablosu Tablo 1 ile verilebilir.

Tablo 1 Birim oktoniyon baz elemanlarının çarpımı

$\times$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_3$	$-e_0$	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	$-e_0$	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	$-e_0$	e_1	e_2	e_3
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	$-e_0$	$-e_3$	e_2
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	$-e_0$	$-e_1$
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	$-e_0$

O, oktoniyonların kümesi, δ_{ij} Kronecker deltası, $e_0=+1$ çarpımsal birim, ε_{ijk} tamamen antisimetrik tensör ve $\forall(ijk)=(123)$, (145), (176), (246), (257), (347), (365) için $\varepsilon_{ijk}=+1$ olmak üzere

$$O=\{A=\sum_{i=0}^{7} A_i e_i \mid A_i \in \mathbb{R}\ ,\ \ e_0 e_i = e_i e_0 = e_i\ ,\ e_0 e_0 = e_0\ ,\ \ e_i e_j = -\delta_{ij} e_0 + \varepsilon_{ijk} e_k\ \}$$

ile tanımlanır.

O kümesi üzerinde toplama işlemi herhangi iki $A=\sum_{i=0}^{7} A_i e_i$ ve $B=\sum_{i=0}^{7} B_i e_i$ oktoniyonları için $A+B=\sum_{i=0}^{7}(A_i+B_i)e_i$ şeklinde tanımlıdır.

$\varphi : O \to E^8$,

$$A \to \varphi\left(\sum_{i=0}^{7} a_i e_i\right)=\left(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7\right)$$

dönüşümü bir lineer izomorfizm olduğundan dolayı, O, oktoniyonların kümesi, E^8 8 boyutlu Öklid uzayına izomorftur. $A=\sum_{i=0}^{7} A_i e_i$ oktoniyonunun eşleniği $\overline{A}=A_0-\sum_{i=1}^{7} A_i e_i$ ile tanımlanır.

$S_A = A_0$ ve $V_A=\sum_{i=1}^{7} A_i e_i$ ile gösterilirse, $A=S_A+V_A$ şeklinde ifade edilebilir. Burada $S_A=A_0$ reel sayısına A oktoniyonunun reel kısmı ve $V_A=\sum_{i=1}^{7} A_i e_i$ vektörüne de A oktoniyonunun uzaysal kısmı (vektörel veya pure kısmı) denir.

İki oktoniyonun çarpımı $A\times B = S_A S_B - \langle V_A, V_B\rangle + S_A V_B + S_B V_A + V_A \wedge V_B$ ifadesi ile tanımlıdır. Burada $\langle\, ,\rangle$ ve $\wedge$ işlemleri E^7 Öklid uzayında, sırasıyla, iç çarpım ve vektörel çarpımdır. Simetrik, non-dejenere reel değerli g bilineer formu

$$g : O\times O \to \mathbb{R}\,,\; g\left(A,B\right)=\frac{1}{2}\left(A\times\overline{B}+B\times\overline{A}\right)$$

şeklinde tanımlıdır. g oktoniyonik iç çarpım olarak isimlendirilir ve $g\left(A,B\right)=\sum_{i=1}^{7} A_i B_i$ şeklinde hesaplanır. Eğer $A+\overline{A}=0$ ise bu durumda A oktoniyonu uzaysal oktoniyon olarak adlandırılır. Uzaysal oktoniyonların kümesi, δ_{ij} Kronecker deltası, ε_{ijk}, tamamen antisimetrik tensör ve $\forall(ijk)=(123)$, (145), (176), (246), (257), (347), (365) için $\varepsilon_{ijk}=+1$ olmak üzere

$$O_S=\{A=\sum_{i=1}^{7} A_i e_i \mid A_i\in\mathbb{R}\,,\; e_i e_j = -\delta_{ij} e_0 + \varepsilon_{ijk} e_k\}$$

ile tanımlanır. Ayrıca uzaysal oktoniyonların kümesi, E^7 7 boyutlu Öklid uzayına izomorftur.

$A=\sum_{i=0}^{7} A_i e_i$ oktoniyonunun normu $\|A\|=\sqrt{A\times\overline{A}}=\sqrt{\sum_{i=0}^{7} A_i^2}$ şeklinde hesaplanır. Eğer $\|A\|=1$ ise A oktoniyonu birim oktoniyon olarak isimlendirilir.

$A=\sum_{i=0}^{7} A_i e_i$ oktoniyonunun tersi $A^{-1}=\dfrac{\overline{A}}{\|A\|^2}$ ile tanımlanır.

A, B iki uzaysal (pure) oktoniyon olsun. Bu durumda, $B\times\left(A^{-1}\times A\right)=B$ ve $A^{-1}\times\left(A\times B\right)=B$ özellikleri sağlanır (Ward, 1997). Ayrıca, A ve B uzaysal oktoniyonlarının birim oktoniyon olması durumunda norm tanımı da göz önüne alınırsa $B\times\left(A\times A\right)=B$ ve $A\times\left(A\times B\right)=B$ özellikleri elde edilir.

Bu özelliklerin yanında, A ve B oktoniyonları için aşağıdaki oktoniyon çarpımlar tanımlıdır:

1) $A\times\left(A\times B\right)=\left(A\times A\right)\times B$,

2) $\left(A\times B\right)\times B = A\times\left(B\times B\right)$,

3) $\left(A\times B\right)\times A = A\times\left(B\times A\right)$,

(Ward, 1997).

2.2 Serret Frenet Formülleri

$\Gamma : I\subset\mathbb{R}\to E^8$, 8 boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir eğri ve $\{U_j\}$, $1\le j\le 8$ elemanları da Γ eğrisinin Serret Frenet çatı elemanları olsun.

Bu durumda $\Gamma : I\subset\mathbb{R}\to E^8$ eğrisinin Serret Frenet türev formülleri

$U_1'(s)=k_1(s)U_2(s)$,

$U_m'(s)=-k_{m-1}(s)U_{m-1}(s)+k_m(s)U_{m+1}(s),\ 2\le m\le 7$

$,U_8'(s)=-k_7(s)U_7(s)$

şeklinde verilir (Gluck, 1966).

Bu formüller oktoniyonik eğriler tanımlandıktan sonra aşağıdaki gibi verilmiştir.

Tanım 2.1 E^7**,** 7 boyutlu Öklid uzayı ile $O_S=\left\{\gamma\in O \middle| \gamma+\overline{\gamma}=0\right\}$ uzaysal oktoniyonların kümesi özdeş olmak üzere $\gamma: I\subset ¡ \to O_S$, $\gamma(s)=\sum_{i=1}^{7}\gamma_i(s)e_i$ eğrisi uzaysal reel oktoniyonik eğri (UROE) olarak tanımlanır (Bektas ve Yuce, 2014 ve 2020).

Teorem 2.1 γ birim hızlı uzaysal reel oktoniyonik eğri (BHUROE) ve $\{V_j\}$, $0\le j\le 6$ elemanları da E^7**,** 7 boyutlu Öklid uzayında BHUROE'nin Serret Frenet çatısı olsun. Bu durumda, BHUROE'nin Serret-Frenet denklemleri

$$
\begin{aligned}
&V_0'(s)=k_1(s)V_1(s),\\
&V_m'(s)=-k_{m-1}(s)V_{m-1}(s)\\
&\qquad +k_m(s)V_{m+1}(s),\\
&\qquad 2\le m\le 7\\
&V_6'(s)=-k_6(s)V_5(s)
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

şeklindedir. Burada k_i, $1\le i\le 6$ ler eğrilik fonksiyonlarıdır. (2.1) denklemi BHUROE'nin Serret Frenet formülleri olarak adlandırılır. (Bektas ve Yuce, 2014 ve 2020).

Tanım 2.2 E^8**,** 8 boyutlu Öklid uzayı ile O oktoniyonların kümesi özdeş olmak üzere üzere $\beta: I\subset ¡ \to O$, $\beta(s)=\sum_{i=0}^{7}\beta_i(s)e_i$ eğrisi reel oktoniyonik eğri (ROE) olarak isimlendirilir (Bektas ve Yuce, 2014 ve 2020).

Teorem 2.2 β birim hızlı reel oktoniyonik eğri (BHROE) ve $\{W_j\}$, $0\le j\le 7$ elemanları da E^8**,** 8 boyutlu Öklid uzayında BHROE'nin Serret Frenet çatısı olsun. Bu durumda BHROE'nin Serret-Frenet denklemleri

$$
\begin{aligned}
&W_0'(s)=\kappa(s)W_1(s),\\
&W_1'(s)=-\kappa(s)W_0(s)+k_1(s)W_2(s),\\
&W_2'(s)=-k_1(s)W_1(s)+(k_2-\kappa)(s)W_3(s),\\
&W_3'(s)=-(k_2-\kappa)(s)W_2(s)\\
&\qquad +k_3(s)W_4(s),\\
&W_4'(s)=-k_3(s)W_3(s)+(k_4-\kappa)(s)W_5(s),\\
&W_5'(s)=-(k_4-\kappa)(s)W_4(s)+k_5(s)W_6(s),\\
&W_6'(s)=-k_5(s)W_5(s)+(k_6+\kappa)(s)W_7(s),\\
&W_7'(s)=-(k_6+\kappa)(s)W_6(s)
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

dir. Burada $W_1=V_0\times W_0$, $W_2=V_1\times W_0$, $W_3=V_2\times W_0$, $W_4=V_3\times W_0$, $W_5=V_4\times W_0$, $W_6=V_5\times W_0$, $W_7=V_6\times W_0$ $\kappa(s)=\left\|W_0'\right\|$ dır (Bektas ve Yuce, 2014 ve 2020).

2.2 Öklidyen Uzayda Rektifiyan, Oskülatör ve Normal Eğriler

Tanım 2.3 3 boyutlu Öklid uzayında, orijinden geçen bir α rektifiyan eğrisi T birim teğet vektör alanı ve B birim binormal vektör alanı olmak üzere

$\alpha(s)=\lambda(s)T(s)+\eta(s)B(s)$

şeklinde tanımlıdır. Burada s yay parametresi olmak üzere $\lambda(s)$ ve $\eta(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlardır (Chen, 2003).

Tanım 2.4 3 boyutlu Öklid uzayında**,** orijinden geçen bir α oskülatör eğrisi T birim teğet vektör alanı ve N birim asli normal vektör alanı olmak üzere

$\alpha(s)=\lambda(s)T(s)+\eta(s)N(s)$

şeklinde tanımlıdır.

Burada s yay parametresi olmak üzere $\lambda(s)$ ve $\eta(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlardır (Ilarslan ve Nesovic, 2008b).

Tanım 2.5 3 boyutlu Öklid uzayında**,** orijinden geçen bir α normal eğrisi N birim asli normal vektör alanı ve B birim binormal vektör alanı olmak üzere

$$\alpha(s)=\lambda(s)N(s)+\eta(s)B(s)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada s yay parametresi olmak üzere $\lambda(s)$ ve $\eta(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlardır (Ilarslan ve Nesovic, 2008b).

Tanım 2.6 $\alpha: I \to E^4$ eğrisi ve $\{T,N,B_1,B_2\}$ çatısı verilsin. N birim asli normal vektör alanının ortogonal komplemanı $N^{\perp}$, s yay parametresi, $\lambda(s)$, $\eta_1(s)$ ve $\eta_2(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere $N^{\perp}$ dik tamlayanının üzerinde yatan

$$\alpha(s)=\lambda(s)T(s)+\eta_1(s)B_1(s)+\eta_2(s)B_2(s)$$

eğrisi E^4, 4 boyutlu Öklid uzayında, orijinden geçen bir rektifiyan eğri olarak tanımlanır (Ilarslan ve Nesovic, 2008a).

Tanım 2.7 $\alpha: I \to E^4$ eğrisi ve $\{T,N,B_1,B_2\}$ çatısı verilsin. B_1 birim binormal vektör alanının ortogonal komplemanı $B_1^{\perp}$, s yay parametresi, $\lambda(s)$, $\eta_1(s)$ ve $\eta_2(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere $B_1^{\perp}$ dik tamlayanının üzerinde yatan

$$\alpha(s)=\lambda(s)T(s)+\eta_1(s)N(s)+\eta_2(s)B_2(s)$$

eğrisi E^4, 4 boyutlu Öklid uzayında, orijinden geçen bir oskülatör eğri olarak tanımlanır (Ilarslan ve Nesovic, 2008b).

Tanım 2.8 $\alpha: I \to E^4$ eğrisi ve $\{T,N,B_1,B_2\}$ çatısı verilsin. T teğet vektör alanının ortogonal komplemanı $T^{\perp}$, s yay parametresi, $\lambda(s)$, $\eta_1(s)$ ve $\eta_2(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere $T^{\perp}$ dik tamlayanının üzerinde yatan

$$\alpha(s)=\lambda(s)N(s)+\eta_1(s)B_1(s)+\eta_2(s)B_2(s)$$

eğrisi E^4, 4 boyutlu Öklid uzayında, orijinden geçen bir normal eğri olarak tanımlanır (Ilarslan ve Nesovic, 2008 a ve b; Yıldız ve Ozkaldı Karakuş 2013 ve 2016).

Tanım 2.9 $\{T,N,B_1,B_2,\ldots,B_{n-2}\}$**,** $\alpha: I \to E^n$ eğrisinin Serret Frenet n-çatısı olsun. $\alpha(s)=\lambda(s)T(s)+\sum_{i=1}^{n-2}\eta_i(s)B_i(s)$ eğrisine E^n Öklid uzayında rektifiyan eğri denir. Burada, s yay parametresi, $\lambda(s)$, $\eta_1(s),\eta_2(s),\ldots,\eta_{n-2}(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlardır (Cambie vd., 2016).

Son tanım dikkate alınırsa n boyutlu Öklid uzayında rektifiyan eğriler tanımlanmış ve rektifiyan eğrilerle ilgili bazı karakterizasyonlar elde edilmiştir (Cambie, vd., 2016).

3. Oktoniyonik Rektifiyan, Oskülatör ve Normal Eğriler

Bu bölümde, 8 boyutlu Öklid uzayındaki rektifiyan, oskülatör ve normal eğrileri, oktoniyon cebiri kullanılarak, sırasıyla, oktoniyonik rektifiyan, oktoniyonik oskülatör ve oktoniyonik normal eğrisi olarak tanımlanacaktır. Daha sonra, oktoniyonik eğrilerin eğriliklerinin hangi bağıntıları sağladığı gösterilecektir. Ayrıca, oktoniyonik bir eğrinin oktoniyonik rektifiyan, oskülatör ve normal eğri olması için gerek ve yeter şartlar elde edilecektir.

Tanım 3.1 $\beta : I \to O$ oktoniyonik eğrisi verilsin. $\{W_0,W_1,W_2,W_3,W_4,W_5,W_6,W_7\}$ kümesi β oktoniyonik eğrisinin Serret Frenet çatı alanı ve

$$W_1^{\perp}=\left\{U\in O : U\times\overline{W_1}=-\left(W_1\times\overline{U}\right)\right\} \tag{3.1}$$

ifadesi de W_1 birim asli normal vektör alanının ortogonal komplemanı olsun.

Bu durumda oktoniyon uzayın başlangıç $0=\sum_{i=0}^{7}0e_i$ noktasındaki oktoniyonik rektifiyan eğrisi

$$\beta(s)=\lambda(s)W_0(s)+\sum_{i=1}^{6}\eta_i(s)W_{i+1}(s) \qquad (3.2)$$

bağıntısı ile tanımlanır. Burada $\lambda(s)$, $\eta_1(s)$, $\eta_2(s)$,..., $\eta_6(s)$ birer diferensiyellenebilir fonksiyon, s de yay uzunluğu parametresidir.

Tanım 3.2 $\beta\ :I\to O$ oktoniyonik eğrisi verilsin. $\{W_0,W_1,W_2,W_3,W_4,W_5,W_6,W_7\}$ kümesi β oktoniyonik eğrisinin Serret Frenet çatı alanı ve

$$W_2^{\perp}=\left\{U\in O:U\times\overline{W_2}=-\left(W_2\times\overline{U}\right)\right\}$$

ifadesi de W_2 birinci birim binormal vektör alanının ortogonal komplemanı olsun. Bu durumda oktoniyon uzayın başlangıç $0=\sum_{i=0}^{7}0e_i$ noktasındaki oktoniyonik oskülatör eğrisi

$$\beta(s)=\lambda(s)W_0(s)+\eta_1(s)W_1(s)+\sum_{i=2}^{6}\eta_i(s)W_{i+1}(s)$$

bağıntısı ile tanımlanır. Burada $\eta_1(s),\eta_2(s)$,..., $\eta_6(s)$ birer diferensiyellenebilir fonksiyon, s de yay uzunluğu parametresidir.

Tanım 3.3 $\beta\ :I\to O$ oktoniyonik eğrisi verilsin. $\{W_0,W_1,W_2,W_3,W_4,W_5,W_6,W_7\}$ kümesi β oktoniyonik eğrisinin Serret Frenet çatı alanı ve

$$W_0^{\perp}=\left\{U\in O:U\times\overline{W_0}=-\left(W_0\times\overline{U}\right)\right\}$$

ifadesi de W_0 birim teğet vektör alanının ortogonal komplemanı olsun. Bu durumda oktoniyon uzayın başlangıç $0=\sum_{i=0}^{7}0e_i$ noktasındaki oktoniyonik normal eğrisi $\beta(s)=\sum_{i=1}^{7}\eta_i(s)W_i(s)$ bağıntısı ile tanımlanır. Burada $\lambda(s)$, $\eta_1(s),\eta_2(s),\ldots,$ $\eta_6(s)$ birer diferensiyellenebilir fonksiyon, s de yay uzunluğu parametresidir.

Şimdi oktoniyonik uzayda, oktoniyonik rektifiyan eğrinin oktoniyonik bir eğrinin eğrilikleri cinsinden karakterizasyonunu aşağıdaki teorem ile verelim.

Teorem 3.1 $\beta\ :I\to O$ **,** 8-boyutlu oktoniyon uzayında birim hızlı bir oktoniyonik eğri ve $\kappa(s)$, $k_1(s)$, $(k_2-\kappa)(s)$, $k_3(s)$, $(k_4-\kappa)(s),k_5(s)$, $(k_6+\kappa)(s)$ de eğrinin eğrilikleri olsun. Bu durumda β oktoniyonik eğrisinin bir oktoniyonik rektifiyan eğriye eşlenik olması için gerek ve yeter şart

$$\left(\sum_{i=1}^{6}r_i(s)\left(\frac{\kappa(s)}{k_1(s)}\right)^{(i-1)}\right)'+ \qquad (3.3)$$
$$\left((k_6+\kappa)(s)\right)\sum_{i=1}^{5}p_i(s)\left(\frac{\kappa(s)}{k_1(s)}\right)^{(i-1)}=0$$

olmasıdır.

İspat $\beta\ :I\to O$**,** 8-boyutlu oktoniyon uzayında birim hızlı bir oktoniyonik eğri olsun. Bu durumda (3.2) ifadesinin her iki tarafının s yay uzunluğu parametresine göre türevi alınırsa,

$$W_0(s)=\lambda'(s)W_0(s)+\lambda(s)W_0'(s)+$$
$$\sum_{i=1}^{6}\left(\eta_i'(s)W_{i+1}(s)+\eta_i(s)W_{i+1}'(s)\right)$$

elde edilir. Oktoniyonik eğrinin (2.2) ile verilen oktoniyonik Serret Frenet formülleri kullanılırsa,

$$W_0(s)=\lambda'(s)W_0(s)+$$
$$\left(\lambda(s)\kappa(s)-\eta_1(s)k_1(s)\right)W_1(s)+$$
$$\left(\eta_1'(s)-\eta_2(s)(k_2-\kappa)(s)\right)W_2(s)+$$
$$\left(\eta_2'(s)+\eta_1(s)(k_2-\kappa)(s)-\eta_3(s)k_3(s)\right)W_3(s)+$$
$$\left(\eta_3'(s)+\eta_2(s)k_3(s)-\eta_4(s)(k_4-\kappa)(s)\right)W_4(s)+$$
$$\left(\eta_4'(s)+\eta_3(s)(k_4-\kappa)(s)-\eta_5(s)k_5(s)\right)W_5(s)+$$
$$\left(\eta_5'(s)+\eta_4(s)k_5(s)-\eta_6(s)(k_6+\kappa)(s)\right)W_6(s)+$$
$$\left(\eta_6'(s)+\eta_5(s)(k_6+\kappa)(s)\right)W_7(s)$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikte karşılıklı katsayılar eşitlendiğinde aşağıdaki ifade bulunur.

$$\lambda'(s)=1,$$

$$\lambda(s)\kappa(s)-\eta_1(s)k_1(s)=0,$$

$$\eta_1'(s)-\eta_2(s)(k_2-\kappa)(s)=0, \tag{3.4}$$

$$\eta_2'(s)+\eta_1(s)(k_2-\kappa)(s)-\eta_3(s)k_3(s)=0,$$

$$\eta_3'(s)+\eta_2(s)k_3(s)-\eta_4(s)(k_4-\kappa)(s)=0,$$

$$\eta_4'(s)+\eta_3(s)(k_4-\kappa)(s)-\eta_5(s)k_5(s)=0,$$

$$\eta_5'(s)+\eta_4(s)k_5(s)-\eta_6(s)(k_6+\kappa)(s)=0,$$

$$\eta_6'(s)+\eta_5(s)(k_6+\kappa)(s)=0.$$

Yukarıdaki eşitlikler kullanılıp, integral işlemi uygulanırsa diferensiyellenebilir fonksiyonlardan $\lambda(s),\eta_1(s),\eta_2(s)$

$$\lambda(s)=s+c$$

$$\eta_1(s)=(s+c)\left(\frac{\kappa(s)}{k_1(s)}\right) \tag{3.5}$$

$$\eta_2(s)=\frac{1}{(k_2-\kappa)(s)}\left(\frac{\kappa(s)}{k_1(s)}\right)+\frac{(s+c)}{(k_2-\kappa)(s)}\left(\frac{\kappa(s)}{k_1(s)}\right)' \tag{3.6}$$

şeklinde bulunur. Diğer diferensiyellenebilir fonksiyonlar aşağıdaki gibi verilebilir. Öncelikle $\eta_3(s)$ fonksiyonunu bulalım:

$$\eta_3(s)=\left[\frac{1}{k_3(s)}\left(\frac{1}{(k_2-\kappa)(s)}\right)'+\frac{(k_2-\kappa)(s)}{k_3(s)}(s+c)\right]\left(\frac{\kappa(s)}{k_1(s)}\right)+$$
$$\left\{\frac{1}{k_3(s)}\left[\frac{1}{(k_2-\kappa)(s)}+\left(\frac{(s+c)}{(k_2-\kappa)(s)}\right)'\right]\right\}\left(\frac{\kappa(s)}{k_1(s)}\right)'+$$
$$\left(\frac{1}{k_3(s)}\frac{(s+c)}{(k_2-\kappa)(s)}\right)\left(\frac{\kappa(s)}{k_1(s)}\right)'' \tag{3.7}$$

dir. Burada

$$m_1(s)=\frac{1}{k_3(s)}\left(\frac{1}{(k_2-\kappa)(s)}\right)'+\frac{(k_2-\kappa)(s)}{k_3(s)}(s+c)$$

$$m_2(s)=\frac{1}{k_3(s)}\left[\frac{1}{(k_2-\kappa)(s)}+\left(\frac{(s+c)}{(k_2-\kappa)(s)}\right)'\right]$$

$$m_3(s)=\frac{1}{k_3(s)}\frac{(s+c)}{(k_2-\kappa)(s)}$$

olmak üzere $\eta_3(s)=\sum_{i=1}^{3}m_i(s)\left(\frac{\kappa(s)}{k_1(s)}\right)^{(i-1)}$

elde edilir. Diğer taraftan $\eta_4(s)$

$$\eta_4(s)=\left(\frac{m_1'(s)(k_2-\kappa)(s)+k_3(s)}{(k_2-\kappa)(s)(k_4-\kappa)(s)}\right)\left(\frac{\kappa(s)}{k_1(s)}\right)+$$
$$\left(\frac{\left(m_1(s)+m_2'(s)\right)(k_2-\kappa)(s)+k_3(s)(s+c)}{(k_2-\kappa)(s)(k_4-\kappa)(s)}\right)\left(\frac{\kappa(s)}{k_1(s)}\right)'+$$
$$\left(\frac{m_2(s)+m_3'(s)}{(k_4-\kappa)(s)}\right)\left(\frac{\kappa(s)}{k_1(s)}\right)''+\left(\frac{m_3(s)}{(k_4-\kappa)(s)}\right)\left(\frac{\kappa(s)}{k_1(s)}\right)'''$$

dir.

Burada

$$n_1(s)=\frac{m_1'(s)(k_2-\kappa)(s)+k_3(s)}{(k_2-\kappa)(s)(k_4-\kappa)(s)},$$

$$n_2(s)=\frac{\left(m_1(s)+m_2'(s)\right)(k_2-\kappa)(s)+k_3(s)(s+c)}{(k_2-\kappa)(s)(k_4-\kappa)(s)},$$

$$n_3(s)=\frac{m_2(s)+m_3'(s)}{(k_4-\kappa)(s)},$$

$$n_4(s)=\frac{m_3(s)}{(k_4-\kappa)(s)}$$ olmak üzere

$$\eta_4(s)=\sum_{i=1}^{4}n_i(s)\left(\frac{\kappa(s)}{k_1(s)}\right)^{(i-1)} \tag{3.8}$$

şeklinde bulunur. $\eta_5(s)$ diferensiyel fonksiyonu

$$\eta_5(s)=\left(\frac{n_1'(s)+(k_4-\kappa)(s)m_1(s)}{k_5(s)}\right)\left(\frac{\kappa(s)}{k_1(s)}\right)+$$

$$\left(\frac{n_1(s)+n_2'(s)+(k_4-\kappa)(s)m_2(s)}{k_5(s)}\right)\left(\frac{\kappa(s)}{k_1(s)}\right)'+$$

$$\left(\frac{n_2(s)+n_3'(s)+(k_4-\kappa)(s)m_3(s)}{k_5(s)}\right)\left(\frac{\kappa(s)}{k_1(s)}\right)''+$$

$$\left(\frac{n_3(s)+n_4'(s)}{k_5(s)}\right)\left(\frac{\kappa(s)}{k_1(s)}\right)'''+$$

$$\left(\frac{n_4(s)}{k_5(s)}\right)\left(\frac{\kappa(s)}{k_1(s)}\right)^{(4)} \tag{3.9}$$

dir.

Burada

$$p_1(s)=\frac{n_1'(s)+(k_4-\kappa)(s)m_1(s)}{k_5(s)},$$

$$p_2(s)=\frac{n_1(s)+n_2'(s)+(k_4-\kappa)(s)m_2(s)}{k_5(s)},$$

$$p_3(s)=\frac{n_2(s)+n_3'(s)+(k_4-\kappa)(s)m_3(s)}{k_5(s)},$$

$$p_4(s)=\frac{n_3(s)+n_4'(s)}{k_5(s)},$$

$$p_5(s)=\frac{n_4(s)}{k_5(s)}$$ olmak üzere

$$\eta_5(s)=\sum_{i=1}^{5}p_i(s)\left(\frac{\kappa(s)}{k_1(s)}\right)^{(i-1)}$$ dir. Son olarak $\eta_6(s)$ diferensiyel fonksiyonu

$$\eta_6(s)=\left(\frac{p_1'(s)+k_5(s)n_1(s)}{(k_6+\kappa)(s)}\right)\left(\frac{\kappa(s)}{k_1(s)}\right)+$$

$$\left(\frac{p_1(s)+p_2'(s)+k_5(s)n_2(s)}{(k_6+\kappa)(s)}\right)\left(\frac{\kappa(s)}{k_1(s)}\right)'+$$

$$\left(\frac{p_2(s)+p_3'(s)+k_5(s)n_3(s)}{(k_6+\kappa)(s)}\right)\left(\frac{\kappa(s)}{k_1(s)}\right)''+$$

$$\left(\frac{p_3(s)+p_4'(s)+k_5(s)n_4(s)}{(k_6+\kappa)(s)}\right)\left(\frac{\kappa(s)}{k_1(s)}\right)'''+$$

$$\left(\frac{p_4(s)+p_5'(s)}{(k_6+\kappa)(s)}\right)\left(\frac{\kappa(s)}{k_1(s)}\right)^{(4)}+\left(\frac{p_5(s)}{(k_6+\kappa)(s)}\right)\left(\frac{\kappa(s)}{k_1(s)}\right)^{(5)}$$

dir.

Burada

$$r_1(s)=\frac{p_1'(s)+k_5(s)n_1(s)}{(k_6+\kappa)(s)},$$

$$r_2(s)=\frac{p_1(s)+p_2'(s)+k_5(s)n_2(s)}{(k_6+\kappa)(s)},$$

$$r_3(s)=\frac{p_2(s)+p_3'(s)+k_5(s)n_3(s)}{(k_6+\kappa)(s)},$$

$$r_4(s)=\frac{p_3(s)+p_4'(s)+k_5(s)n_4(s)}{(k_6+\kappa)(s)},$$

$$r_5(s)=\frac{p_4(s)+p_5'(s)}{(k_6+\kappa)(s)},$$

$r_6(s)=\dfrac{p_5(s)}{(k_6+\kappa)(s)}$ olmak üzere

$$\eta_6(s)=\sum_{i=1}^{6}r_i(s)\left(\frac{\kappa(s)}{k_1(s)}\right)^{(i-1)} \tag{3.10}$$

dir. Bulunan bu ifadelerden $\eta_6(s)$ ve $\eta_5(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonları $\eta_6'(s)+\eta_5(s)(k_6+\kappa)(s)=0$ eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\left(\sum_{i=1}^{6}r_i(s)\left(\frac{\kappa(s)}{k_1(s)}\right)^{(i-1)}\right)'+\left((k_6+\kappa)(s)\right)\sum_{i=1}^{5}p_i(s)\left(\frac{\kappa(s)}{k_1(s)}\right)^{(i-1)}=0$$

elde edilir.

Tersine, (3.3) denkleminin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda, oktoniyon uzayında bir oktoniyon

$$A(s)=\beta(s)-\lambda(s)W_0(s)-\sum_{i=1}^{6}\eta_i(s)W_{i+1}(s)$$

şeklinde yazılabilir. Burada gerekli işlemler yapıldığında $A'(s)=0$ elde edilir. Bu durumda $A(s)$ oktoniyonu sabit bir oktoniyondur. Böylece β oktoniyonik eğrisi bir oktoniyonik rektifiyan eğriye eşleniktir.

Teorem 3.2 Tamamen O oktoniyon uzayda yatan, sıfırdan farklı ve sabit $\kappa(s)$, $k_1(s)$, $(k_2-\kappa)(s)$, $k_3(s)$, $(k_4-\kappa)(s)$, $k_5(s)$, $(k_6+\kappa)(s)$ oktoniyonik eğriliklerine sahip bir oktoniyonik rektifiyan eğri yoktur.

İspat Kabul edelim ki, $\kappa(s)$, $k_1(s)$, $(k_2-\kappa)(s)$, $k_3(s)$, $(k_4-\kappa)(s)$, $k_5(s)$, $(k_6+\kappa)(s)$ oktoniyonik eğrilikleri sıfırdan farklı ve sabit olan tamamen O oktoniyon uzayda yatan, β oktoniyonik rektifiyan eğrisi tanımlanabilsin. Bu durumda

$$\left(\sum_{i=1}^{6}r_i(s)\left(\frac{\kappa(s)}{k_1(s)}\right)^{(i-1)}\right)'+\left((k_6+\kappa)(s)\right)\sum_{i=1}^{5}p_i(s)\left(\frac{\kappa(s)}{k_1(s)}\right)^{(i-1)}=0$$

eşitliği sağlanır. Buradan, oktoniyonik eğriliklerin sabit oldukları kullanılırsa $\left(r_1'(s)+(k_6+\kappa)(s)\,p_1(s)\right)\left(\dfrac{\kappa(s)}{k_1(s)}\right)=0$ elde edilir. Bu ifade de

$r_1'(s)=\left(\dfrac{p_1'(s)+k_5(s)n_1(s)}{(k_6+\kappa)(s)}\right)'$ ve

$p_1(s)=\dfrac{n_1'(s)+(k_4-\kappa)(s)m_1(s)}{k_5(s)}$ eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$\kappa(s)(k_2-\kappa)(s)(k_4-\kappa)(s)(k_6+\kappa)(s)=0$ elde edilir. Bu eşitlik $(k_2-\kappa)(s)$, $(k_4-\kappa)(s)$, $(k_6+\kappa)(s)$, $\kappa(s)$ oktoniyonik eğriliklerinden en az birinin sıfır olmasını gerektirir. Bu durum $\kappa(s)$, $k_1(s)$, $(k_2-\kappa)(s)$, $k_3(s)$, $(k_4-\kappa)(s)$, $k_5(s)$, $(k_6+\kappa)(s)$ oktoniyonik eğriliklerin sıfırdan farklı olmasıyla çelişir. Böylece kabulümüz yanlıştır. Bu durumda ispat tamamlanır.

Teorem 3.3 $\beta\ :I\to O$ **,** 8-boyutlu oktoniyon uzayında birim hızlı bir oktoniyonik eğri olsun.

$0<\kappa(s)$, $k_1(s)$, $(k_2-\kappa)(s)$, $k_3(s)$, $(k_4-\kappa)(s), k_5(s)$ sıfırdan farklı sabitler ve

$$(k_6+\kappa)(s)=$$
$$\int \frac{(k_2-\kappa)^2(s)(k_4-\kappa)^2(s)}{(k_2-\kappa)^2(s)(k_4-\kappa)^2(s)+(k_2-\kappa)^2(s)k_5^2(s)+k_3^2(s)k_5^2(s)}ds$$

şeklinde s'e bağlı sabit olmayan bir fonksiyon olarak elde ediliyor ise β oktoniyonik eğrisi bir oktoniyonik rektifiyan eğriye eşleniktir.

İspat β birim hızlı bir oktoniyonik eğri ve $0<\kappa(s)$, $k_1(s)$, $(k_2-\kappa)(s)$, $k_3(s)$, $(k_4-\kappa)(s)$, $k_5(s)$ sıfırdan farklı sabitler olsun. Bu durumda (3.3) eşitliğinde $\dfrac{\kappa(s)}{k_1(s)}$ sabit terimi göz önüne alındığında $\left(r_1'(s)+(k_6+\kappa)(s)\,p_1(s)\right)\left(\dfrac{\kappa(s)}{k_1(s)}\right)=0$ elde edilir. Burada $(k_6+\kappa)(s)$ sabit olmayan bir fonksiyon olmak üzere

$$r_1'(s)=-\frac{\left(p_1'(s)+k_5(s)n_1(s)\right)(k_6+\kappa)'(s)}{(k_6+\kappa)^2(s)}$$

ve

$$p_1(s)=\frac{(k_4-\kappa)(s)m_1(s)}{k_5(s)}$$

ifadeleri yukarıdaki eşitlikte yerlerine yazılırsa,

$$(k_6+\kappa)'(s)[(k_2-\kappa)^2(s)(k_4-\kappa)^2(s)+$$
$$(k_2-\kappa)^2(s)k_5^2(s)+k_3^2(s)k_5^2(s)]=$$
$$(k_2-\kappa)^2(s)(k_4-\kappa)^2(s)$$

bulunur. Buradan

$$(k_6+\kappa)(s)=$$
$$\int \frac{(k_2-\kappa)^2(s)(k_4-\kappa)^2(s)}{(k_2-\kappa)^2(s)(k_4-\kappa)^2(s)+(k_2-\kappa)^2(s)k_5^2(s)+k_3^2(s)k_5^2(s)}ds$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. Bu teoreme benzer olarak

$\kappa(s)$ sabit fakat diğer oktoniyonik eğriliklerin sıfırdan farklı sabit olduğu,

$k_1(s)$, sabit fakat diğer oktoniyonik eğriliklerin sıfırdan farklı sabit olduğu,

Böyle devam edilerek son olarak

$k_5(s)$ sabit fakat diğer oktoniyonik eğriliklerin sıfırdan farklı sabit olduğu durumlar incelendiğinde benzer sonuçlar elde edilebilir.

Teorem 3.4 β O, 8-boyutlu oktoniyon uzayda yay uzunluğu parametresine sahip bir oktoniyonik rektifiyan eğri ve $\kappa(s), k_1(s)$, $(k_2-\kappa)(s), k_3(s), (k_4-\kappa)(s), k_5(s)$ ve $(k_6+\kappa)(s)$ sıfırdan farklı oktoniyonik eğrilikler olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

a) $d(s)$ uzunluk fonksiyonu $d(s)=\|\beta(s)\|=\sqrt{(s+c)^2+a^2}$ dir.

b) Eğrinin yer vektörünün teğetsel bileşeni

$g(\beta(s),W_O(s))=s+c$, $c\in\mathbb{R}$ şeklinde tanımlanır.

c) Eğrinin yer vektörünün $\beta^{W_1}(s)$ normal elemanı sabit uzunluğa sahiptir ve $d(s)$ uzaklık fonksiyonu sabit değildir.

d) Eğrinin yer vektörünün binormal vektör alanları sırasıyla,

$$g(\beta(s),W_{i+1}(s))=\eta_i(s),\quad 1\le i\le 6 \qquad (3.11)$$

dir. Burada $\eta_i(s)$, $1\le i\le 6$ (3.5), (3.6), (3.7), (3.8), (3.9) ve (3.10) ile verilir.

İspat β birim hızlı oktoniyonik rektifiyan eğrisi verilsin. β eğrisinin durum vektörü (3.2) ile verilmiştir. Bu eşitlikte $\lambda(s)$ ve $\eta_i(s)$, $1\le i\le 6$ fonksiyonları (3.4) eşitlikleriyle verilir. (3.4) eşitliğinin 3., 4., 5., 6., 7. ve 8. eşitlikleri sırasıyla $\eta_1(s)$, $\eta_2(s)$, $\eta_3(s)$, $\eta_4(s)$, $\eta_5(s)$ ve $\eta_6(s)$ ile çarpılır ve toplanırsa

$$\sum_{i=1}^{6}\eta_i(s)\eta_i'(s)=0$$

bulunur. Bu son eşitliğin her iki tarafının integrali alınırsa,

$$\sum_{i=1}^{6}\eta_i^2(s)=a^2$$

elde edilir. (3.2) eşitliği kendisiyle iç çarpılırsa, $g(\beta(s),\beta(s))=\lambda^2(s)+\sum_{i=1}^{6}\eta_i^2(s)$ eşitliği bulunur. Buradan da $g(\beta(s),\beta(s))=(s+c)^2+a^2$ elde edilir. Uzaklık fonksiyonu $d(s)$ olmak üzere $d(s)=\|\beta(s)\|=\sqrt{(s+c)^2+a^2}$ elde edilir.

Tersine, kabul edelim ki $d(s)=\|\beta(s)\|=\sqrt{(s+c)^2+a^2}$ olsun. Bu durumda, $g(\beta(s),\beta(s))=(s+c)^2+a^2$ elde edilir. Bu ifadenin üst üste iki kere s ye göre türevi alınır ve (2.2) ile verilen oktoniyonik eğri için türev formülleri kullanılırsa $g(\beta(s),W_1(s))=0$ bulunur. Böylece β oktoniyonik eğrisi W_1 oktoniyonik vektör alanının ortogonal komplemanının elemanı olduğu için bir oktoniyonik rektifiyan eğridir.

b) β birim hızlı oktoniyonik rektifiyan eğrisi verilsin. (3.2) eşitliğinin her iki tarafı $W_0(s)$ ile oktoniyonik iç çarpılırsa $g(\beta(s),W_0(s))=\lambda(s)=s+c$ elde edilir. Bu durumda istenen elde edilir.

Tersine, eğrinin yer vektörünün teğetsel bileşeni $g(\beta(s),W_O(s))=s+c$, $c\in\mathbb{R}$ şeklinde tanımlansın. Bu son ifadenin türevi alındığında $g(\beta(s),W_1(s))=0$ bulunur. Böylece β bir oktoniyonik rektifiyan eğridir.

c) O oktoniyon uzayda, herhangi bir β eğrisinin yer vektörü, $\lambda(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyon ve $\beta^{W_1}(s)$ yer vektörünün normal bileşeni olmak üzere $\beta(s)=\lambda(s)W_O(s)+\beta^{W_1}(s)$ şeklinde yazılır. Burada $\beta^{W_1}(s)=\sum_{i=1}^{6}\eta_i(s)W_{i+1}(s)$ dir. Diğer taraftan, oktoniyonik iç çarpım gereği

$$g(\beta^{W_1}(s),\beta^{W_1}(s))=\sum_{i=1}^{6}\eta_i^2(s)=a^2$$

şeklindedir. Böylece $\beta^{W_1}(s)$ normal elemanı sabit uzunluğa sahiptir. Ayrıca, $d(s)=\|\beta(s)\|=\sqrt{(s+c)^2+a^2}$ olduğundan uzaklık fonksiyonu sabit değildir.

Tersine, eğrinin yer vektörünün $\beta^{W_1}(s)$ normal elemanı sabit uzunluğa sahip olsun fakat $d(s)$ uzaklık fonksiyonu sabit olmasın. Bu durumda $\beta(s)=\lambda(s)W_O(s)+\beta^{W_1}(s)$, $g(\beta^{W_1}(s),\beta^{W_1}(s))=a^2$ sabit bunun yanında $d(s)=\sqrt{g(\beta_O(s),\beta_O(s))}$ sabit olmamak üzere

$$g(\beta^{W_1}(s),\beta^{W_1}(s))=g(\beta(s),\beta(s))-g^2(\beta(s),W_O(s))$$

elde edilir. Bu son eşitliğin türevi alınırsa, $\kappa(s)g(\beta(s),W_O(s))g(\beta(s),W_1(s))=0$ elde edilir. Böylece $d^2(s)=g(\beta(s),\beta(s))$ sabit olmadığından $g(\beta(s),W_O(s))$ sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla, $g(\beta(s),W_1(s))=0$ olur. Bu durumda β bir oktoniyonik rektifiyan eğriye eşleniktir.

d) β birim hızlı oktoniyonik rektifiyan eğrisi verilsin. Bu durumda (3.2) eşitliği ile (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) ve (3.9) eşitlikleri göz önüne alınırsa $g(\beta(s),W_{i+1}(s))=\eta_i(s)$, $1\le i\le 6$ elde edilir.

Tersine, eğrinin yer vektörünün binormal vektör alanları sırasıyla,

$g(\beta(s), W_{i+1}(s)) = \eta_i(s), \quad 1 \le i \le 6$ olsun.

$g(\beta(s), W_2(s)) = \eta_1(s)$ ifadesinin türevi alınıp (2.2) oktoniyonik eğrilerin türev formülleri, (3.4) ve (3.11) eşitliği kullanılırsa,

$$-k_1(s)\,g(\beta(s), W_1(s)) + (k_2-\kappa)(s)\eta_2(s) = (k_2-\kappa)(s)\eta_2(s)$$

elde edilir. Böylece $g(\beta(s), W_1(s)) = 0$ olur. Bu durumda $\beta(s)$ oktoniyonik rektifiyan bir eğriye eşdeğerdir.

Oktoniyonik rektifiyan eğriler için incelenen karakterizasyonlar yukarıdaki ispat yöntemleri kullanılarak, oktoniyonik oskülatör ve normal eğriler için benzer şekilde aşağıdaki teoremlerle verilebilir.

Oktoniyonik uzayda, bir oktoniyonik oskülatör eğrisinin oktoniyonik eğrinin eğrilikleri cinsinden karakterizasyonunu aşağıdaki teorem ile verelim.

Teorem 3.5 $\beta : I \to O$ **,** 8-boyutlu oktoniyon uzayında birim hızlı bir oktoniyonik eğri ve $\kappa(s)$, $k_1(s)$, $(k_2-\kappa)(s)$, $k_3(s)$, $(k_4-\kappa)(s)$, $k_5(s)$, $(k_6+\kappa)(s)$ de eğrinin eğrilikleri olsun. Bu durumda β oktoniyonik eğrisinin bir oktoniyonik oskülatör eğriye eşlenik olması için gerek ve yeter şart

$$\eta_1(s)\kappa^2(s) + \eta_1(s)\kappa'(s) - \eta_1''(s)\kappa(s) - \kappa^2(s) = 0$$

ve

$$\frac{(k_6+\kappa)(s)}{k_5(s)}\left(\frac{k_1(s)k_3(s)}{(k_2-\kappa)(s)(k_4-\kappa)(s)}\eta_1(s)\right)' +$$

$$\frac{(k_6+\kappa)(s)}{k_5(s)}\left(\frac{1}{(k_4-\kappa)(s)}\left(\frac{1}{k_3(s)}\left(\frac{k_1(s)}{(k_2-\kappa)(s)}\eta_1(s)\right)'\right)'\right)' +$$

$$\frac{(k_4-\kappa)(s)(k_6+\kappa)(s)}{k_5(s)}\left(\frac{1}{k_3(s)}\left(\frac{k_1(s)}{(k_2-\kappa)(s)}\eta_1(s)\right)'\right)' +$$

$$\left(\frac{1}{(k_6+\kappa)(s)}\left(\frac{1}{k_5(s)}\left(\frac{k_1(s)k_3(s)}{(k_2-\kappa)(s)(k_4-\kappa)(s)}\eta_1(s)\right)'\right)'\right)' +$$

$$\left(\frac{1}{(k_6+\kappa)(s)}\left(\frac{1}{k_5(s)}\left(\frac{1}{(k_4-\kappa)(s)}\left(\frac{1}{k_3(s)}\left(\frac{k_1(s)}{(k_2-\kappa)(s)}\eta_1(s)\right)'\right)'\right)'\right)'\right)' +$$

$$\left(\frac{1}{(k_6+\kappa)(s)}\left(\frac{(k_4-\kappa)(s)}{k_5(s)}\left(\frac{1}{k_3(s)}\left(\frac{k_1(s)}{(k_2-\kappa)(s)}\eta_1(s)\right)'\right)\right)'\right)' +$$

$$\left(\frac{k_1(s)k_3(s)k_5(s)}{(k_2-\kappa)(s)(k_4-\kappa)(s)(k_6+\kappa)(s)}\eta_1(s)\right)' +$$

$$\left(\frac{k_5(s)}{(k_4-\kappa)(s)(k_6+\kappa)(s)}\left(\frac{1}{k_3(s)}\left(\frac{k_1(s)}{(k_2-\kappa)(s)}\eta_1(s)\right)'\right)'\right)' = 0$$

olmasıdır.

Son olarak, oktoniyonik uzayda, bir oktoniyonik normal eğrinin oktoniyonik eğrinin eğrilikleri cinsinden karakterizasyonunu aşağıdaki teoremler ile verelim.

Teorem 3.6 $\beta : I \to O$ **,** 8-boyutlu oktoniyon uzayında birim hızlı bir oktoniyonik eğri ve $\kappa(s) = \kappa$, $k_1(s) = k_1$, $(k_2-\kappa)(s) = (k_2-\kappa)$, $k_3(s) = k_3$, $(k_4-\kappa)(s) = (k_4-\kappa)$, $k_5(s) = k_5$,

$\left(k_6+\kappa\right)\left(s\right)=\left(k_6+\kappa\right)$ de eğrinin eğrilikleri olsun. Bu durumda β oktoniyonik eğrisinin bir oktoniyonik normal eğriye eşlenik olması için gerek ve yeter şart

$$\left(\frac{1}{k_6+\kappa}\left(\frac{1}{k_5}\left(\frac{1}{k_4-\kappa}\left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{k_2-\kappa}\left(\frac{1}{k_1}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)\right)'\right)'\right)'\right)'\right)'\right)'+$$

$$\left(\frac{1}{k_6+\kappa}\left(\frac{1}{k_5}\left(\frac{1}{k_4-\kappa}\left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{k_2-\kappa}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)\right)'\right)'\right)'\right)'\right)'+$$

$$\left(\frac{1}{k_6+\kappa}\left(\frac{1}{k_5}\left(\frac{1}{k_4-\kappa}\left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{k_1}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)\right)\right)'\right)'\right)'\right)'+$$

$$\left(\frac{1}{k_6+\kappa}\left(\frac{1}{k_5}\left(\frac{k_3}{\left(k_2-\kappa\right)\left(k_4-\kappa\right)}\left(\frac{1}{k_1}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)'\right)'\right)'\right)\right)'+$$

$$\left(\frac{1}{k_6+\kappa}\left(\frac{1}{k_5}\left(\frac{k_1k_3}{\left(k_2-\kappa\right)\left(k_4-\kappa\right)}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)\right)'\right)'\right)'+$$

$$\left(\frac{1}{k_6+\kappa}\left(\frac{k_4-\kappa}{k_5}\left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{k_2-\kappa}\left(\frac{1}{k_1}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)'\right)'\right)'\right)\right)'\right)'+$$

$$\left(\frac{1}{k_6+\kappa}\left(\frac{k_4-\kappa}{k_3k_5}\left(\frac{k_1}{k_2-\kappa}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)\right)'\right)'\right)'+$$

$$\left(\frac{1}{k_6+\kappa}\left(\frac{\left(k_2-\kappa\right)\left(k_4-\kappa\right)}{k_3k_5}\left(\frac{1}{k_1}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)'\right)\right)'\right)'+$$

$$\left(\frac{k_5}{\left(k_4-\kappa\right)\left(k_6+\kappa\right)}\left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{k_2-\kappa}\left(\frac{1}{k_1}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)'\right)'\right)'\right)'\right)'+$$

$$\left(\frac{k_5}{\left(k_4-\kappa\right)\left(k_6+\kappa\right)}\left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{k_2-\kappa}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)\right)'\right)'\right)'+$$

$$\left(\frac{k_5}{\left(k_4-\kappa\right)\left(k_6+\kappa\right)}\left(\frac{k_2-\kappa}{k_3}\left(\frac{1}{k_1}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)'\right)\right)'\right)'+$$

$$\left(\frac{k_3k_5}{\left(k_2-\kappa\right)\left(k_4-\kappa\right)\left(k_6+\kappa\right)}\left(\frac{1}{k_1}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)'\right)'\right)'+$$

$$\left(\frac{k_1k_3k_5}{\left(k_2-\kappa\right)\left(k_4-\kappa\right)\left(k_6+\kappa\right)}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)\right)'+$$

$$\frac{k_6+\kappa}{k_5}\left(\frac{1}{k_4-\kappa}\left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{k_2-\kappa}\left(\frac{1}{k_1}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)'\right)'\right)'\right)'\right)'+$$

$$\frac{k_6+\kappa}{k_5}\left(\frac{1}{k_4-\kappa}\left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{k_2-\kappa}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)\right)'\right)'\right)'+$$

$$\frac{k_6+\kappa}{k_5}\left(\frac{1}{k_4-\kappa}\left(\frac{k_2-\kappa}{k_3}\left(\frac{1}{k_1}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)'\right)\right)'\right)'+$$

$$\frac{k_6+\kappa}{k_5}\left(\frac{k_3}{\left(k_2-\kappa\right)\left(k_4-\kappa\right)}\left(\frac{1}{k_1}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)'\right)'\right)'+$$

$$\frac{k_6+\kappa}{k_5}\left(\frac{k_1k_3}{\left(k_2-\kappa\right)\left(k_4-\kappa\right)}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)\right)'+$$

$$\frac{(k_6+\kappa)(k_4-\kappa)}{k_5}\left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{k_2-\kappa}\left(\frac{1}{k_1}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)'\right)'\right)'\right)+$$

$$\frac{(k_6+\kappa)(k_4-\kappa)}{k_3k_5}\left(\frac{k_1}{k_2-\kappa}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)\right)'+$$

$$\frac{(k_6+\kappa)(k_2-\kappa)(k_4-\kappa)}{k_3k_5}\left(\frac{1}{k_1}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)'\right)=0$$

olmasıdır.

Teorem 3.7 $\beta\ :I\to O$, 8-boyutlu oktoniyon uzayında birim hızlı bir oktoniyonik eğri ve $\kappa(s)=\kappa$, $k_1(s)=k_1$, $(k_2-\kappa)(s)=(k_2-\kappa)$, $k_3(s)=k_3$, $(k_4-\kappa)(s)=(k_4-\kappa), k_5(s)=k_5$, $(k_6+\kappa)(s)=(k_6+\kappa)$ de eğrinin eğrilikleri olsun. Bu durumda β oktoniyonik eğrisinin bir oktoniyonik normal eğri ise

$$g(\beta(s),W_1(s))=-\frac{1}{\kappa},$$

$$g(\beta(s),W_2(s))=\frac{1}{k_1}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)',$$

$$g(\beta(s),W_3(s))=\frac{1}{k_2-\kappa}\left(\frac{1}{k_1}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)'\right)'+\frac{k_1}{k_2-\kappa}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)$$

$$g(\beta(s),W_4(s))=\frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{k_2-\kappa}\left(\frac{1}{k_1}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)'\right)'\right)'+$$

$$\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2-\kappa}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)\right)'+\frac{k_2-\kappa}{k_3}\left(\frac{1}{k_1}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)'\right),$$

$$g(\beta(s),W_5(s))=\frac{1}{k_4-\kappa}\left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{k_2-\kappa}\left(\frac{1}{k_1}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)'\right)'\right)'\right)'+$$

$$\frac{1}{k_4-\kappa}\left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2-\kappa}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)\right)'\right)'+$$

$$\frac{1}{k_4-\kappa}\left(\frac{k_2-\kappa}{k_3}\left(\frac{1}{k_1}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)'\right)\right)'+$$

$$\frac{k_3}{(k_2-\kappa)(k_4-\kappa)}\left(\frac{1}{k_1}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)'\right)'+$$

$$\frac{k_1k_3}{(k_2-\kappa)(k_4-\kappa)}\left(-\frac{1}{\kappa}\right),$$

$$g(\beta(s),W_6(s))=\frac{1}{k_5}\left(\frac{1}{k_4-\kappa}\left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{k_2-\kappa}\left(\frac{1}{k_1}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)'\right)'\right)'\right)'\right)'+$$

$$\frac{1}{k_5}\left(\frac{1}{k_4-\kappa}\left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{k_2-\kappa}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)\right)'\right)'\right)'+$$

$$\frac{1}{k_5}\left(\frac{1}{k_4-\kappa}\left(\frac{k_2-\kappa}{k_3}\left(\frac{1}{k_1}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)'\right)\right)'\right)'+$$

$$\frac{1}{k_5}\left(\frac{k_3}{(k_2-\kappa)(k_4-\kappa)}\left(\frac{1}{k_1}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)'\right)'\right)'+$$

$$\frac{1}{k_5}\left(\frac{k_1k_3}{(k_2-\kappa)(k_4-\kappa)}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)\right)'+$$

$$\frac{k_4-\kappa}{k_5}\left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{k_2-\kappa}\left(\frac{1}{k_1}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)'\right)'\right)'\right)+$$

$$\frac{k_4-\kappa}{k_3k_5}\left(\frac{k_1}{k_2-\kappa}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)\right)'+$$

$$\frac{(k_2-\kappa)(k_4-\kappa)}{k_3k_5}\left(\frac{1}{k_1}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)'\right)$$

ve

$$g\left(\beta(s),W_7(s)\right)=$$

$$\frac{1}{k_6+\kappa}\left(\frac{1}{k_5}\left(\frac{1}{k_4-\kappa}\left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{k_2-\kappa}\left(\frac{1}{k_1}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)\right)'\right)'\right)'\right)'\right)'+$$

$$\frac{1}{k_6+\kappa}\left(\frac{1}{k_5}\left(\frac{1}{k_4-\kappa}\left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{k_2-\kappa}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)\right)'\right)'\right)'\right)'+$$

$$\frac{1}{k_6+\kappa}\left(\frac{1}{k_5}\left(\frac{1}{k_4-\kappa}\left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{k_1}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)\right)\right)'\right)'\right)'+$$

$$\frac{1}{k_6+\kappa}\left(\frac{1}{k_5}\left(\frac{k_3}{(k_2-\kappa)(k_4-\kappa)}\left(\frac{1}{k_1}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)'\right)'\right)'\right)'+$$

$$\frac{1}{k_6+\kappa}\left(\frac{1}{k_5}\left(\frac{k_1k_3}{(k_2-\kappa)(k_4-\kappa)}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)\right)'\right)'+$$

$$\frac{1}{k_6+\kappa}\left(\frac{k_4-\kappa}{k_5}\left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{k_2-\kappa}\left(\frac{1}{k_1}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)'\right)'\right)'\right)\right)'+$$

$$\frac{1}{k_6+\kappa}\left(\frac{k_4-\kappa}{k_3k_5}\left(\frac{k_1}{k_2-\kappa}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)\right)'\right)'+$$

$$\frac{1}{k_6+\kappa}\left(\frac{(k_2-\kappa)(k_4-\kappa)}{k_3k_5}\left(\frac{1}{k_1}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)'\right)\right)'+$$

$$\frac{k_5}{(k_4-\kappa)(k_6+\kappa)}\left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{k_2-\kappa}\left(\frac{1}{k_1}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)'\right)'\right)'\right)'+$$

$$\frac{k_5}{(k_4-\kappa)(k_6+\kappa)}\left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{k_2-\kappa}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)\right)'\right)'+$$

$$\left(\frac{k_5}{(k_4-\kappa)(k_6+\kappa)}\left(\frac{k_2-\kappa}{k_3}\left(\frac{1}{k_1}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)'\right)\right)'\right)'+$$

$$\frac{k_3k_5}{(k_2-\kappa)(k_4-\kappa)(k_6+\kappa)}\left(\frac{1}{k_1}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)'\right)'+$$

$$\frac{k_1k_3k_5}{(k_2-\kappa)(k_4-\kappa)(k_6+\kappa)}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)$$

dir.

4. Sonuçlar

Biz bu çalışmamızda, 8 boyutlu Öklid uzayındaki rektifiyan, oskülatör ve normal eğrileri, oktoniyonları kullanarak 8 boyutlu oktoniyon uzayında tanımladık. Ayrıca oktoniyonik rektifiyan, oskülatör ve normal eğriler için verilen karakterizasyonların oktoniyonların kullanılması durumunda değişimini inceledik.

5. Kaynaklar

Baez, J.C. 2002. The Octonions. Bulletin of the American Mathematical Society, 39(2), 145-205.

Bektas, O., Gurses (Bayrak), N., Yuce, S. 2016. Quaternionic osculating curves in Euclidean and Semi-Euclidean space. Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories, 14(1), 65-84.

Bektas, O., Yuce, S. 2014. Real Variable Serret Frenet Formulae of an Octonion Valued Function (Octonionic Curves). Colloquium on Combinatorics, Ilmenau, 5.

Bektas, O., Yuce, S. 2020. Serret Frenet formulas for octonionic curves. Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica, doi:10.5269/bspm.v38i3.34780 (Baskıda).

Bharathi, K., Nagaraj, M. 1987. Quaternion valued function of a real variable Serret-Frenet formulae. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 18(6), 507-511.

Cambie, S., Goemans, W., Van Den Bussche, I. 2016. Rectifying curves in the n-dimensional Euclidean space. Turkish Journal of Mathematics, 40, 210-223.

Chen, BY. 2003. When does the position vector of a space curve always lie in its rectifying plane? The American Mathematical Monthly, 110, 147-152.

Chen, B.Y., Dillen, F. 2005. Rectifying curves as centrodes and extremal curves. Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica, 33(2), 77-90.

Dray, T., Manogue, C. 2015. The Geometry of octonions, World Scientific, New Jersey, 15-42.

Gluck, H. 1966. Higher curvatures of curves in Euclidean space. The American Mathematical Monthly, 73(7), 699-704.

Gungor, M.A., Tosun, M. 2011. Some characterizations of quaternionic rectifying curves. Differential Geometry Dynamical Systems, 13, 89-100.

Hamilton, W.R. 1866. Elements of quaternions, Longmans, Green, & Co, London, 150-250.

Ilarslan, K., Nesovic, E. Petrovic-Torgasev, M. 2003. Some characterizations of rectifying curves in the Minkowski 3-space. Novi Sad Journal of Mathematic, 33(2), 23-32.

Ilarslan, K., Nesovic, E. 2007. On rectifying curves as centrodes and extremal curves in Minkowski 3-space. Novi Sad Journal of Mathematics, 37(1), 53-64.

Ilarslan, K., Nesovic, E. 2008a. Some characterizations of rectifying curves in the Euclidean space E^4. Turkish Journal of Mathematics, 32(1), 21-30.

Ilarslan, K., Nesovic, E. 2008b. Some characterizations of osculating curves in the Euclidean spaces. Demonstratio Mathematica, XLI(4), 931-939.

Ward, J.P. 1997. Quaternions and Cayley numbers algebra and applications, Kluwer Academic Publishers, London, 155-295.

Yıldız, O.G., Ozkaldı Karakus, S. 2013. "On the quaternionic normal curves in the Euclidean space". 2nd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2013), Bosna Hersek.

Yıldız, O.G., Ozkaldı Karakus, S. 2016. On the quaternionic normal curves in the semi Euclidean space E_2^4. International Journal of Mathematical Combinatoric, 3, 68-76.