İstatistikçiler Dergisi: İstatistik & Aktüerya

Journal of Statisticians: Statistics and Actuarial Sciences

IDIA 10, 2017, 1, 40-48

Geliş/Received:13.04.2017, Kabul/Accepted: 24.05.2017

www.istatistikciler.org

Derleme / Review

Pareto Dağılımının Koşullu Sıra İstatistiklerinin Momentleri

Fahrettin Özbey
Bitlis Eren Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü
13000 Bitlis, Türkiye
fozbey2023@gmail.com

Öz

Bu çalışmada, Pareto dağılımının bazı özellikleri ifade edildikten sonra sıra istatistikleri incelendi. Pareto dağılımının momentleri, Pareto dağılımının sıra istatistiklerinin momentleri ve Pareto dağılımının koşullu sıra istatistiklerinin momentleri araştırıldı. Sonuç olarak bu momentlerin bazı nümerik değerleri karşılaştırıldı.

Anahtar sözcükler: Sıra İstatistikleri; Pareto Dağılımı; Momentler.

Abstract

Moments of Conditional Order Statistics of Pareto Distribution

In this study, some properties of Pareto distribution are expressed, then, order statistics of this distribution are examined. The moments of Pareto distribution, moments of order statistics of Pareto distribution and moments of conditional order statistics of Pareto distribution are investigated. Consequently, some numerical values of these moments are compared.

Keywords: *Order Statistics; Pareto Distributions; Moments.*

1. Giriş

Pareto dağılımı ilk olarak İsviçreli ekonomist Vilfredo Pareto tarafından İsviçre'nin gelir dağılımını modellemek için kullanıldı [14]. Pareto dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu, sırasıyla,

$$f(x) = \frac{\alpha c^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}, \qquad \alpha > 0, \quad c > 0, \quad x > c \tag{1}$$

ve

$$F(x) = 1 - \left(\frac{c}{x}\right)^{\alpha} \tag{2}$$

şeklindedir. Pareto dağılımının sıfıra göre *t*-inci momenti,

$$E(X^t) = \frac{\alpha}{\alpha - t} c^t , \qquad \alpha > t \tag{3}$$

eşitliği ile tanımlanır. (3) ifadesinde $t = 1$ alınırsa,

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha - 1} c , \qquad \alpha > 1 \tag{4}$$

Pareto dağılımının ortalaması elde edilir [2]. Ortalamaya göre *t*-inci moment,

$$E\left[(X - \mu)^t\right] = c^t \sum_{i=0}^{t} \binom{t}{i} (-1)^{t-i} \frac{\alpha^{t-i+1}}{(\alpha - 1)^{t-i} \ (\alpha - i)} , \qquad \alpha > t \tag{5}$$

şeklinde ifade edilir ve $t = 2$ için Pareto dağılımının varyansı,

$$Var(X) = \frac{\alpha}{(\alpha - 1)^2 \ (\alpha - 2)} c^2 , \qquad \alpha > 2 \tag{6}$$

şeklinde elde edilir [11].

2. Pareto Dağılımının Sıra İstatistikleri ve Momentleri

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ tesadüfi değişkenleri; olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ ve dağılım fonksiyonu $F(x)$'e sahip bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli tesadüfi değişkenler olsun. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tesadüfi değişkenleri büyüklük sırası bakımından ele alınmasıyla elde edilen $X_{1:n} \le X_{2:n} \le \ldots \le X_{n:n}$ tesadüfi değişkenleri; sıra istatistikleri olarak ifade edilir. Bu sıralı tesadüfi değişkenlerin *r*-inci sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu, sırasıyla,

$$f_{r:n}(x) = r \binom{n}{r} [F(x)]^{r-1} \ f(x) \ [1 - F(x)]^{n-r} , \qquad 1 \le r \le n \tag{7}$$

ve

$$F_{r:n}(x) = \sum_{i=r}^{n} \binom{n}{r} [F(x)]^{i} \ [1 - F(x)]^{n-i} \tag{8}$$

şeklinde ifade edilir. Bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli bir ana kütleden gelen $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$'in ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu, $1 \le r \le s \le n$ ve $-\infty \le x \le y \le \infty$ olmak üzere,

$$f_{r,s:n}(x, y) = \frac{n!}{(r-1)! \ (s-r-1)! \ (n-s)!} [F(x)]^{r-1} \ f(x) \ [F(y) - F(x)]^{s-r-1} \ f(y) \ [1 - F(y)]^{n-s} \tag{9}$$

şeklinde verilir [6].

Sıra istatistiklerinin dağılımları, momentleri ve bu momentler arasında ilişler literatürde bir çok çalışmaya konu olmuştur [4, 6, 10, 12, 15]. Bu çalışmaların Pareto dağılımına bir uygulaması niteliği taşıyan çalışmalar da mevcuttur [1, 3, 5, 7, 8, 9]. Bu çalışmalar genel olarak göz önüne alındığında sıfıra göre momentler hesaplanmış ve bu momentler için yinelenen ilişkiler elde edilmiştir. Bu bölümde, ilk olarak önceki çalışmaların kısa bir özeti olarak Pareto dağılımının sıra istatistikleri ve sıfıra göre momentlere yer verilecek ve daha sonra Pareto dağılımının ortalamaya göre momentleri elde edilecektir.

(1) ve (2) ifadeleri (7)'de yazılırsa; Pareto dağılımının r-inci sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{r:n}(x)=\sum_{i=0}^{r-1}\left(\frac{n!}{(n-r)!\,(r-1-i)!\,i!}\right)(-1)^i\,\frac{\alpha}{x^{\alpha(n-r+i+1)+1}}\,c^{\alpha(n-r+i+1)},\quad 1\le r\le n,\quad c<x \tag{10}$$

olarak elde edilir [8].

(10) ifadesinden Pareto dağılımının r-inci sıra istatistiğinin sıfıra göre t-inci momenti,

$$E\left[(X_{r:n})^t\right]=\sum_{i=0}^{r-1}\left(\frac{n!}{(n-r)!\,(r-1-i)!\,i!}\right)(-1)^i\,\frac{\alpha}{\alpha(n-r+i+1)-t}\,c^t\ ,\qquad t<\alpha(n+1-r) \tag{11}$$

şeklinde elde edilir. (11)'de $t=1$ alınırsa Pareto dağılımının sıra istatistiklerinin ortalaması,

$$\mu_{r:n}=\sum_{i=0}^{r-1}\left(\frac{n!}{(n-r)!\,(r-1-i)!\,i!}\right)(-1)^i\,\frac{\alpha}{\alpha(n-r+i+1)-1}\,c\ ,\qquad 1<\alpha(n+1-r) \tag{12}$$

şeklinde ifade edilir [9].

Teorem 2.1. Pareto dağılımının sıra istatistiklerinin ortalamaya göre t-inci momenti,

$$E\left[(X_{r:n}-\mu_{r:n})^t\right]=\sum_{\ell=0}^{t}\sum_{i=0}^{r-1}\left(\frac{t!\,n!}{(t-\ell)!\,\ell!\,(n-r)!\,(r-1-i)!\,i!}\right)\frac{(-1)^{i+t-\ell}(\mu_{r:n})^{t-\ell}\alpha\,c^{\ell}}{\alpha(n-r+i+1)-\ell},\quad t<\alpha(n+1-r) \tag{13}$$

şeklindedir. Burada $\mu_{r:n}$, (12)' de ifade edilmiştir.

İspat. Moment tanımından

$$E\left[(X_{r:n}-\mu_{r:n})^t\right]=\int_c^{\infty}(x-\mu_{r:n})^t\,f_{r:n}(x)\,dx \tag{14}$$

yazılabilir. (10) ifadesi (14)'de yazılırsa,

$$E\left[(X_{r:n}-\mu_{r:n})^t\right]=\int_c^{\infty}(x-\mu_{r:n})^t\sum_{i=0}^{r-1}\left(\frac{n!}{(n-r)!\,(r-1-i)!\,i!}\right)(-1)^i\,\frac{\alpha}{x^{\alpha(n-r+i+1)+1}}\,c^{\alpha(n-r+i+1)}\,dx \tag{15}$$

eşitliği elde edilir. Burada $(x-\mu_{r:n})^t$ ifadesi binoma açılırsa,

$$E\left[(X_{r:n}-\mu_{r:n})^t\right]=\int_c^{\infty}\sum_{\ell=0}^{t}\binom{t}{\ell}x^{\ell}\,(-1)^{t-\ell}\,(\mu_{r:n})^{t-\ell}\sum_{i=0}^{r-1}\left(\frac{n!}{(n-r)!\,(r-1-i)!\,i!}\right)(-1)^i\,\frac{\alpha}{x^{\alpha(n-r+i+1)+1}}\;c^{\alpha(n-r+i+1)}\,dx$$

$$=\sum_{\ell=0}^{t}\sum_{i=0}^{r-1}\binom{t}{\ell}\left(\frac{n!}{(n-r)!\,(r-1-i)!\,i!}\right)(-1)^{i+t-\ell}\,(\mu_{r:n})^{t-\ell}\,\alpha\,c^{\alpha(n-r+i+1)}\int_c^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha(n-r+i+1)+1-\ell}}\,dx \tag{16}$$

ifadesi elde edilir. Yukarıdaki integral alınırsa,

$$E\left[(X_{r:n}-\mu_{r:n})^t\right]=\sum_{\ell=0}^{t}\sum_{i=0}^{r-1}\binom{t}{\ell}\left(\frac{n!}{(n-r)!\,(r-1-i)!\,i!}\right)(-1)^{i+t-\ell}\,(\mu_{r:n})^{t-\ell}\,\alpha\,c^{\alpha(n-r+i+1)}$$
$$\times\left(\frac{1}{(\ell-\alpha(n-r+i+1))\,x^{\alpha(n-r+i+1)-\ell}}\,\Bigg|_c^{\infty}\right) \tag{17}$$

eşitliği elde edilir. Sınır değerleri yazılır gerekli işlemler yapılırsa ispat tamamlanmış olur.

Ortalamaya göre ikinci moment varyansı verdiğinden; (13)'de $t=2$ alınırsa,

$$E\left[(X_{r:n}-\mu_{r:n})^2\right]=Var(X_{r:n})=\sum_{\ell=0}^{2}\sum_{i=0}^{r-1}\left(\frac{2!\;n!}{(2-\ell)!\;\ell!\;(n-r)!\;(r-1-i)!\;i!}\right)\frac{(-1)^{i+2-\ell}(\mu_{r:n})^{2-\ell}\alpha\;c^{\ell}}{\alpha(n-r+i+1)-\ell} \tag{18}$$

ifadesi elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa, Pareto dağılımının sıra istatistiklerinin varyansı,

$$Var(X_{r:n})=\sum_{i=0}^{r-1}\left(\frac{n!}{(n-r)!\;(r-1-i)!\;i!}\right)(-1)^i$$
$$\times\left[\frac{(\mu_{r:n})^2\alpha}{\alpha(n-r+i+1)}-\frac{2\,\mu_{r:n}\;\alpha\;c}{\alpha(n-r+i+1)-1}+\frac{\alpha\;c^2}{\alpha(n-r+i+1)-2}\right],\qquad 2<\alpha(n+1-r) \tag{19}$$

olarak elde edilir [9].

3. Pareto Dağılımının Koşullu Sıra İstatistikleri ve Momentleri

Bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli $X_{1:n}, X_{2:n},\ldots, X_{n:n}$ sıralı tesadüfi değişkenleri arasından $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$ göz önüne alınırsa, $X_{r:n}=x$ olayının meydana gelme koşulu altında $X_{s:n}$, s-inci sıra istatistiğinin koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu; $1\le r<s\le n$ ve $x<y$ olmak üzere,

$$f_{X_{s:n}/X_{r:n}=x}(y)=\frac{f_{r,s:n}(x,y)}{f_{r:n}(x)} \tag{20}$$

biçiminde ifade edilir. (7) ve (9), (20)'de yazılırsa,

$$f_{X_{s:n}/X_{r:n}=x}(y)=\left(\frac{(n-r)!}{(s-r-1)!\;(n-s)!}\right)\left[F(y)-F(x)\right]^{s-r-1}\;f(y)\;\left[1-F(y)\right]^{n-s}\;\left[1-F(x)\right]^{r-n} \tag{21}$$

elde edilir [6].

(21)'de (1) ve (2) ifadeleri yazılırsa; Pareto dağılımının koşullu sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu; $1 \le r < s \le n$ ve $x < y$ olmak üzere,

$$f_{X_{s:n}/X_{r:n}=x}(y) = \sum_{j=0}^{s-r-1} \left(\frac{(n-r)!}{(n-s)!\, j!\,(s-r-1-j)!} \right) (-1)^{s-r-1-j} \frac{\alpha\, x^{\alpha(n-r-j)}}{y^{\alpha(n-r-j)+1}} \tag{22}$$

olarak elde edilir.

(22) ifadesi moment tanımında kullanılırsa,

$$E\left(X_{s:n}^{t} / X_{r:n} = x\right) = \int_{x}^{\infty} y^{t} f_{X_{s:n}/X_{r:n}=x}(y)\, dy$$

$$= \int_{x}^{\infty} y^{t} \sum_{j=0}^{s-r-1} \left(\frac{(n-r)!}{(n-s)!\, j!\,(s-r-1-j)!} \right) (-1)^{s-r-1-j} \frac{\alpha\, x^{\alpha(n-r-j)}}{y^{\alpha(n-r-j)+1}}\, dy$$

$$= \sum_{j=0}^{s-r-1} \left(\frac{(n-r)!}{(n-s)!\, j!\,(s-r-1-j)!} \right) (-1)^{s-r-1-j} \alpha\, x^{\alpha(n-r-j)} \int_{x}^{\infty} \frac{1}{y^{\alpha(n-r-j)+1-t}}\, dy \tag{23}$$

elde edilir. (23)'de integral alınırsa,

$$E\left(X_{s:n}^{t} / X_{r:n} = x\right) = \sum_{j=0}^{s-r-1} \left(\frac{(n-r)!}{(n-s)!\, j!\,(s-r-1-j)!} \right) (-1)^{s-r-1-j} \alpha\, x^{\alpha(n-r-j)} \times \left(\frac{1}{(t-\alpha(n-r-j))\, y^{\alpha(n-r-j)-t}} \Bigg|_{x}^{\infty} \right) \tag{24}$$

ifadesi elde edilir. Sınır değerleri yazılır gerekli işlemler yapılırsa; Pareto dağılımının koşullu sıra istatistiklerinin sıfıra göre *t*-inci momenti,

$$E\left(X_{s:n}^{t} / X_{r:n} = x\right) = \sum_{j=0}^{s-r-1} \left(\frac{(n-r)!}{(n-s)!\ j!\ (s-r-1-j)!} \right) \frac{(-1)^{s-r-1-j}\ \alpha\, x^{t}}{\alpha(n-r-j)-t}\ , \qquad t < \alpha(n-s+1) \tag{25}$$

şeklindedir. (25)'de $s = r+1$ alınırsa,

$$E\left(X_{r+1:n}^{t} / X_{r:n} = x\right) = \frac{(n-r)\,\alpha\, x^{t}}{\alpha(n-r)-t} \tag{26}$$

elde edilir. (25)'in özel bir durumu olan (26) ifadesi [13] tarafından elde edilmiştir.

Sıfıra göre birinci moment ortalamayı verdiğinden; (25)'de $t = 1$ alınırsa, Pareto dağılımının koşullu sıra istatistiklerinin ortalaması,

$$\mu_{X_{s:n}/X_{r:n}=x} = E\left(X_{s:n}/X_{r:n}=x\right) = \sum_{j=0}^{s-r-1}\left(\frac{(n-r)!}{(n-s)!\ j!\ (s-r-1-j)!}\right)\frac{(-1)^{s-r-1-j}\ \alpha\ x}{\alpha(n-r-j)-1} \qquad 1<\alpha(n-s+1) \tag{27}$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 3.1. Pareto dağılımının koşullu sıra istatistiklerinin ortalamaya göre t-inci momenti

$$E\left[\left((X_{s:n}/X_{r:n}=x)-\mu_{X_{s:n}/X_{r:n}=x}\right)^t\right] = \sum_{\ell=0}^{t}\sum_{j=0}^{s-r-1}\left(\frac{t!\ (n-r)!}{(t-\ell)!\ \ell!\ (n-s)!\ j!\ (s-r-1-j)!}\right) \times\left[\frac{(-1)^{s-r-1-j+t-\ell}(\mu_{X_{s:n}/X_{r:n}=x})^{t-\ell}\alpha\ x^{\ell}}{\alpha(n-r-j)-\ell}\right], \quad t<\alpha(n-s+1) \tag{28}$$

şeklindedir. Burada $\mu_{X_{s:n}/X_{r:n}=x}$, (27)'de ifade edilmiştir.

İspat. Teorem 2.1' in ispatına benzer olarak; moment tanımından,

$$E\left[\left((X_{s:n}/X_{r:n}=x)-\mu_{X_{s:n}/X_{r:n}=x}\right)^t\right] = \int_c^{\infty}(y-\mu_{X_{s:n}/X_{r:n}=x})^t f_{X_{s:n}/X_{r:n}=x}(y)\,dx \tag{29}$$

yazılabilir. Burada $(y-\mu_{X_{s:n}/X_{r:n}=x})^t$ ifadesi için binom açılımı kullanılır ve (22), (29)'da yazılırsa, ispat tamamlanmış olur.

(28)'de $t=2$ alınırsa Pareto dağılımının koşullu sıra istatistiklerinin varyansı,

$$Var(X_{s:n}/X_{r:n}=x) = \sum_{j=0}^{s-r-1}\left(\frac{(n-r)!}{(n-s)!\ j!\ (s-r-1-j)!}\right)(-1)^{s-r-1-j} \times\left[\frac{(\mu_{X_{s:n}/X_{r:n}=x})^2\alpha}{\alpha(n-r-j)} - \frac{2(\mu_{X_{s:n}/X_{r:n}=x})\alpha\ x}{\alpha(n-r-j)-1} + \frac{\alpha\ x^2}{\alpha(n-r-j)-2}\right], \quad 2<\alpha(n-s+1) \tag{30}$$

olarak elde edilir. (30) ve (27) ifadelerinde $s=r+1$ alınırsa,

$$Var(X_{r+1:n}/X_{r:n}=x) = \frac{(n-r)\alpha\, x^2}{(\alpha(n-r)-1)^2(\alpha(n-r)-2)} \tag{31}$$

elde edilir. (30)'un özel bir durumu olan (31) ifadesi [13] tarafından elde edilmiştir.

4. Sonuç ve öneriler

Pareto dağılımının (3), (5), (11), (13), (25), ve (28)'de ifade edilen momentlerinin bazı sayısal değerleri hesaplanarak Çizelge 1-5'de verilmiştir. (4) ve (6) kullanılarak Pareto dağılımının ortalaması ve varyansı Çizelge 1' de verilmiştir. Sıra istatistikleri genelde bir dağılımda minimum ve maksimum değerlerin tahmininde kullanıldığı için Pareto dağılımının en küçük ve en büyük sıra istatistiklerinin ortalamaları ve varyansları bazı özel değerler için (12) ve (19) kullanılarak Çizelge 2 ve Çizelge 3 belirtilmiştir. Çizelge 4 ve Çizelge 5' de Pareto dağılımının koşullu sıra istatistiklerinin en küçük ve en büyük durumları hesaplanmıştır.

Çizelge 1. Bazı Özel Durumlar için Pareto dağılımının ortalaması ve varyansı.

α	c	μ	$Var(X)$
2,1	1,1	2,1000	23,1000
	1,2	2.2909	27,4909
	1,3	2,4818	32,2636
	1,4	2,6727	37,4182
3,1	1,1	1,6238	1,6238
	1,2	1,7714	1,9325
	1,3	1,9191	2,2680
	1,4	2,0667	2,6303

Çizelge 2. Bazı Özel Durumlar için Pareto dağılımının en küçük sıra istatistiklerinin ortalaması ve varyansı.

α	c	n	r	$\mu_{r:n}$	$Var(X_{r:n})$
2,1	1,1	10	1	1,1550	0,0033
		20	1	1,1268	0,0008
	1,2	10	1	1,2600	0,0040
		20	1	1,2293	0,0009
	1,3	10	1	1,3650	0,0047
		20	1	1,3317	0,0011
	1,4	10	1	1,4700	0,0054
		20	1	1,4341	0,0012
3,1	1,1	10	1	1,1367	0,0014
		20	1	1,1180	0,0003
	1,2	10	1	1,2400	0,0017
		20	1	1,2197	0,0004
	1,3	10	1	1,3433	0,0020
		20	1	1,3213	0,0005
	1,4	10	1	1,4467	0,0023
		20	1	1,4230	0,0005

Çizelge 3. Bazı Özel Durumlar için Pareto dağılımının en büyük sıra istatistiklerinin ortalaması ve varyansı.

α	c	n	r	$\mu_{r:n}$	$Var(X_{r:n})$
2,1	1,1	10	10	5,6475	190,5590
		20	20	7,8073	369,0090
	1,2	10	10	6,1609	226,7820
		20	20	8,5171	439,1520
	1,3	10	10	6,6743	266,1530
		20	20	9,2268	515,3930
	1,4	10	10	7,1877	308,6750
		20	20	9,9366	597,7340
3,1	1,1	10	10	3,1208	3,8321
		20	20	3,8817	6,0351
	1,2	10	10	3,4045	4,5605
		20	20	4,2346	7,1822
	1,3	10	10	3,6882	5,3523
		20	20	4,5875	8,4292
	1,4	10	10	3,9719	6,2073
		20	20	4,9404	9,7758

Çizelge 4. Bazı Özel Durumlar için Pareto dağılımının en küçük koşullu sıra istatistiklerinin ortalaması ve varyansı.

α	x	n	r	s	$\mu_{X_{s:n}/X_{r:n}=x}$	$Var(X_{X_{s:n}/X_{r:n}=x})$
2,1	1,1	10	1	2	1,1615	0,0042
		20	1	2	1,1283	0,0008
	1,2	10	1	2	1,2670	0,0050
		20	1	2	1,2309	0,0010
	1,3	10	1	2	1,3726	0,0059
		20	1	2	1,3334	0,0012
	1,4	10	1	2	1,4782	0,0068
		20	1	2	1,4360	0,0014
3,1	1,1	10	1	2	1,1409	0,0018
		20	1	2	1,1190	0,0004
	1,2	10	1	2	1,2446	0,0021
		20	1	2	1,2207	0,0005
	1,3	10	1	2	1,3483	0,0025
		20	1	2	1,3225	0,0005
	1,4	10	1	2	1,4520	0,0029
		20	1	2	1,4242	0,0006

Çizelge 5. Bazı Özel Durumlar için Pareto dağılımının en büyük koşullu sıra istatistiklerinin ortalaması ve varyansı.

α	x	n	r	s	$\mu_{X_{s:n}/X_{r:n}=x}$	$Var(X_{X_{s:n}/X_{r:n}=x})$
2,1	1,1	10	9	10	2,1000	21,0000
		20	19	20	2,1000	21,0000
	1,2	10	9	10	2,2909	24,9917
		20	19	20	2,2909	24,9917
	1,3	10	9	10	2,4818	29,3306
		20	19	20	2,4818	29,3306
	1,4	10	9	10	2,6727	34,0165
		20	19	20	2,6727	34,0165
3,1	1,1	10	9	10	1,6238	0,7732
		20	19	20	1,6238	0,7732
	1,2	10	9	10	1,7714	0,9202
		20	19	20	1,7714	0,9202
	1,3	10	9	10	1,9191	1,0800
		20	19	20	1,9191	1,0800
	1,4	10	9	10	2,0667	1,2525
		20	19	20	2,0667	1,2525

Kaynaklar

[1] E. d-E. Afify, 2006, Order statistics from Pareto distributions, *Journal of Applied Science*, 6, 2151-2157.
[2] B. C. Arnold, 2015, *Pareto Distributions*, John Wiley and Sons Inc. New York.
[3] N. Balakrishnan, P. C. Joshi, 1982, Moments of order statistics from doubly truncated Pareto distribution, *Journal of Indian Statistical Association*, 20, 109-117.
[4] N. Balakrishnan, H. J. Malik, S. E. Ahmed, 1988, Recurrence relations and identities for moments order statistics, *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 17, 2657-2694.
[5] A. Childs, N. Balakrishnan, 1988, Generalized recurrence relations for moments order statistics from non-identical Pareto and truncated Pareto random variables with applications to robustness, *Handbook of Statistics*, 16, 403-438.
[6] H. A. David, 1981, *Order Statistics,* John Wiley and Sons Inc. New York.
[7] O. L. Gebizlioğlu, S. Yörübulut, 2016, A Pseudo-Pareto distribution and concomitants of its order statistics, *Methodology and Computing in Applied Probability*, 18, 1043–1064.
[8] G. Gökdere, 2014, Computing the moments of order statistics from truncated Pareto distributions based on conditional expectation, Pakistan Journal of Statistics and Operation Research, 10, 9-15.
[9] G. Gökdere, F. Özbey, 2013, Computing the moments of Pareto order statistics, *International Journal of Agricultural and Statistical Sciences*, 9, 35-44.
[10] M. Güngör, F. Özbey, 2010, Distributions of order statistics arising from non-identical continuous variables, *İstatistikçiler Dergisi*, 3, 63-68.
[11] N. L. Johnson, S. Kotz, N. Balakrishnan, 1994, *Continuous Univariate Distributions Vol. 1, 2nd Ed.*, John Wiley and Sons Inc., Hoboken.
[12] P. C. Joshi, N. Balakrishnan,1982, Recurrence relations and identities for the product moment of order statistics, *Shankya B*, 44, 39-49.
[13] Z. M. Nofal, Y. M. El Gebaly, 2017, New Characterizations of the Pareto Distribution, *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, 13, 63-74.
[14] V. Pareto, 1897, *Cours d'economie Politique,* Vol II, F. Rouge, Lausanne.
[15] C. Taşdemir, 2016, *Sıra İstatistiklerinin Şartlı Dağılımlarının Beklenen Değerleri*, Yüksek Lisans Tezi, Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Bitlis.