Ankara University Journal of Faculty of Educational Sciences
Year: 2025, Volume: 58, Issue: 3, 1097-1148
DOI: 10.30964/auebfd.1650923, E-ISSN: 2458-8342, P-ISSN: 1301-3718

Investigating Prospective Mathematics Teachers' Understanding of the Boundedness of Infinite Number Sets [1]

ARTICLE TYPE	Received Date	Accepted Date	Published Date
Research Article	03.04.2025	10.21.2025	12.15.2025

Tuba Sevyut [2]
Ministry of National Education

Yeter Şahiner [3]
Hacettepe University

Abstract

In this study we aim to reveal the conceptions of preservice mathematics teachers regarding the boundedness of infinite number sets. The research is conducted with 51 teacher candidates attending to the Primary Mathematics Teaching program of a state university in Ankara. Data is collected using a form that includes open-ended questions. Additionally, semi-structured interviews are conducted with 12 candidates in order to obtain more detailed information. The data obtained is analyzed using content analysis and presented in tables. According to the results of the study, it was found that candidates perceived infinite sets as "lacking at least one boundary," "unbounded," "without the lowest element," and "without the greatest element"; they accepted the lower bound as the lowest element of the set and the upper bound as the greatest element of the set. Additionally, it was observed that the candidates' sample explanations revealed their understanding that the infinity of a set is either "two-sided" (such as (-∞,+∞)) or "one-sided" (such as (-∞,a) or (a,+∞)), and that a set bounded from both below and above must be a finite set.

Keywords: Mathematics education, prospective primary school mathematics teachers, mathematical understanding, concept of infinity.

Citation: Sevyut, T.., & Şahiner, Y. (2025). Investigating Prospective Mathematics Teachers' Understanding of the Boundedness of Infinite Number Sets. *Ankara University Journal of Faculty of Educational Sciences, 58*(3), 1097-1148. https://doi.org/10.30964/auebfd.1650923

[1]This article is based on an unpublished doctoral dissertation.

[2]Teacher, Ministry of National Education, Türkiye, E-mail: tubasevyut@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-8028-5330, https://ror.org/00jga9g46

[3]*Corresponding Author*: Prof. Dr., Hacettepe University, Faculty of Education, Department of Elementary Mathematics Education, Ankara/Türkiye, E-mail: ysahiner@hacettepe.edu.tr, https://orcid.org/0000-0002-6696-4190, https://ror.org/04kwvgz42

All ethical declarations related to this article are provided on the final page of the manuscript. (Page: 1148).

Infinity; is a concept that appears in fields such as art, literature, philosophy, mathematics, etc., and is difficult to understand and define. The concept of infinity, which began to be interpreted with the question "What is the essence of existence?" that mythology could not answer, first appeared in philosophy before mathematics. The first thinker to interpret the concept of infinity in Ancient Greece was Anaximander of Miletus (610-546 BC). According to Anaximander, the essence, end, and limit of all things is an entity that is boundless: "aperion" (Çevik, 2019). The Greek word "peras" is translated as "end or bounded," while "apeiron," with the negative prefix "a-," carries the meanings of "unbounded or infinite." Although Anaximander identified the apeiron with goodness, beauty, and perfection, Pythagoras (570-495 BC) and the Pythagorean school characterized the apeiron as evil, ugly, and incomprehensible, showing no interest in the concept of infinity. Thanks to the various paradoxes proposed by the ancient Greek philosopher Zeno of Elea (490-430 BC), the concept of infinity gained interest and began to be contemplated. As expressed by Dubinsky, Weller, McDonald & Brown (2005), the first classification put forth to analyze the structure of infinity is known as the distinction between potential infinity and actual infinity by Aristotle (384-322 BC). According to him, processes that always continue and correspond to a finite value at any point are potentially infinite. True infinity, on the other hand, is the construction of a single and whole structure in the individual's mind that encompasses the potential process. Infinity is a dynamic process in the "potential" sense, while in the "real" sense, it is a static object. Aristotle believed that the human brain could only comprehend infinity as "potential" and rejected the idea of "actual" infinity by stating that infinity within a whole cannot be perceived (as cited in Pala and Narlı, 2018a).

For centuries, the concept of infinity, which was avoided to steer clear of its contradictions, began to be widely used in the 17th and 18th centuries with the introduction of the concepts of "infinitesimal" and "infinite" as tools of mathematical analysis (Karaçay, 2014). In the early 19th century, the first person to approach the formal definition of infinite sets by dealing with the paradoxes of infinity was Bernard Bolzano (1781-1848) (Mancosu, 2016). Bolzano defined the finite-infinite set as follows: Let's create a sequence of subsets from a non-empty set A. Each subset in the sequence should contain the previous subset and have one more element than the previous subset. If this sequence of subsets terminates, meaning it has one more element than the previous subset but there is no subsequent set that contains it, then set A is finite. If this sequence of subsets does not terminate, set A is infinite (Bolzano, 1950). Dedekind obtained a precise definition of infinite sets for the first time: "A set is infinite if it has at least one proper subset that is equivalent to itself." Sets that have no subset equal to themselves are finite." (Ferreirós, 2016).

With Georg Cantor's (1845-1918) significant contributions to the development of set theory, the mathematical meaning of "infinity" has been understood (Nesin, 2019). Cantor introduced the concept of cardinality in set theory. If a suitable one-to-one correspondence can be shown between the elements of two sets, those two sets are said to be equinumerous. Cantor, who developed the ideas of Bolzano and

Dedekind, provided the formal definition of an infinite set. Let A be a set. If a one-to-one and onto (bijective) function can be defined for any proper subset of the set A, then the set A is called an infinite set. Cantor, with this definition, demonstrated that a part (subset) can be equinumerous to the whole (the set itself). The idea that a part can be equinumerous to the whole has caused a significant stir in the mathematical world.

The Concept of Infinity and Some Research on Infinite Sets

In the literature, studies conducted to determine the perceptions, intuitions, comprehension, mental processes and cognitive levels of students of various age groups and mathematics teachers about the concept of infinity (Jirotková & Littler 2004; Singer & Voica, 2008; Aşık, 2010; Çelik & Akşan, 2013; Bozkuş, Uçar, & Çetin, 2015; Date-Huxtable, Cavanagh, Coady, & Easey, 2018) as well as potential and actual infinity, comparison and equivalence of infinite sets, proofs about the equivalence of infinite sets; İşleyen, 2016; Date-Huxtable, Cavanagh, Coady, & Easey, 2018) as well as studies on potential and actual infinity, comparison and equivalence of infinite sets, and proof approaches related to equivalence of infinite sets (Tirosh & Tsamir, 1996; Tsamir 1999; Güven & Karataş, 2004; Aztekin 2008; Pala & Narlı, 2008b). There are also many studies on the topics related to the concept of infinity such as indefiniteness and indeterminacy, formal definition of infinite set, countable and uncountable infinite sets, infinitely large and infinitely small, limits and so on.

When examining the mathematics education literature, there are various studies focusing on candidates' understanding of the concept of infinity and the difficulties they experience. Aşık (2010) found that the vast majority of candidates treated the infinity symbol as a number (object), while Çelik and Akşan (2013) found that candidates based their explanations of the concept of infinity predominantly on the concepts of "endless" and "boundless." Mamolo and Zazkis (2008) state that candidates perceive infinity as an ongoing process rather than a completed one and experience difficulties with the concept of infinitely small. In their research, Kolar and Cadez (2012) asked candidates the question, "What is the greatest number?" and received the answers, "There is no such number; there can always be a larger number after any number." and "There is no greatest number because there are an infinite number of numbers." Furthermore, it was found that the idea that infinity could exist in a limited area or be related to very small quantities was contrary to the participants' intuitions. Oflaz and Polat (2022) found in their study that students' primary intuitions, acquired through their daily life experiences, did not significantly change their perception of infinity, despite their undergraduate education.

Research on infinite sets conducted with candidates is also included in the literature. Doğan and Ünan (2011) stated that 17% of candidates did not know the difference between an infinite set and a countable infinite set. They found that 40% of candidates were unable to comment when determining the number of elements in infinite sets. Narlı and Başer (2008) found a low success rate in the test they administered to determine the readiness of first-year mathematics teacher candidates regarding the concepts of relations, functions, and sets. Pala (2016) reported that candidates frequently used an intuitive approach to determine the equivalence of infinite sets; in other words, they reached conclusions by producing informal approaches rather than formal mathematical approaches. In Aztekin's (2008) research, it was observed that doctoral students' understanding shifted from potential infinity to actual infinity when they encountered different understandings of infinity in set theory courses. However, in teaching the concept of limits, it is suggested that different conceptions of infinity, such as those in Cantor's set theory, can be used to reduce students' misconceptions about the concept of dynamic limits.

Problem Status

In this study, the formal definitions and explanations of the topics related to infinite sets, namely the lowest/greatest element, lower/upper bound, and bounded set, are as follows:

Let A be a set and $w \in A$. For every $a \in A$, if $w<a$ holds, then the element w of A is called the lowest element of the set A. Similarly, let A be a set and $u \in A$. For every $a \in A$, if $a<u$ holds, then the element u of A is called the greatest element of the set A. For example, for the set A = [-3,5), the definition of the lowest element is satisfied, and $w = -3 \in A$ is the lowest element of the set A. The set A has no greatest element. All elements of the set A are less than 5, but 5 is not an element of the set A.

Let X be a set and A be a subset of X. If an element $w \in X$ is less than or equal to every element of A, then w is said to be a lower bound of the set A. If an element $u \in X$ is greater than or equal to every element of A, then u is said to be an upper bound of the set A. If a set has both a lower and upper bound, it is called a bounded set" (Karaçay, 2014). In other cases, the set is called unbounded. As seen in the definitions, the lower bound w and upper bound u are elements of the set X. However, as can be understood from the phrase “less than/greater than or equal to” in the definitions, u and/or w, which are the lower and/or upper bounds of the set A, may or may not be elements of the set A. For example, while 5, one of the upper bounds of the set $A=(-3,5]$, which is a subset of the real numbers, is an element of the set A, -3, one of the lower bounds, is not an element of the set A. At the same time, since set A is bounded both from below and above, it is a bounded set. Similarly, if we consider the set B = $(-\infty,5]$, which is also a subset of the real numbers, one of its upper bounds is 5, but it has no lower bound, so set B is an unbounded set.

If a set has a lowest element, it is one of the lower bounds of that set. Similarly, if a set has a greatest element, it is one of the upper bounds of that set. However, the converse is not true. That is, the lower bound may not be the lowest element of the set, and the upper bound may not be the greatest element of the set. For example, the set $A= \{a \in R \mid a \in (-3,5]\}$ has no lowest element, but one of its lower bounds is -3. The greatest element of set A is 5, and 5 is also one of the upper bounds of the set. Set A is bounded and has an infinite number of elements.

The concept of infinity is fundamental to many topics in elementary and middle school, such as natural numbers, integers, rational numbers, irrational numbers, real numbers, number intervals, solution sets of inequalities, line segments, rays, lines, planes, etc. and in high school, it forms the basis of many topics such as functions, sequences, limits, derivatives, series, integrals, convergence, etc., and plays an important role in the structuring of the aforementioned topics. The developmental process of the concept of infinity in children begins at a very early age, and since there is no intervention in the curriculum to support a conceptual change until the end of secondary education, students who reach university level have no cognitive preparation to internalize the concept of infinity. On the other hand, even in the abstract mathematics course offered for only one semester in most mathematics education undergraduate programs, topics such as the formal definition of mathematical infinity, comparison of infinite number sets, and properties of infinite sets are not covered. Therefore, the inadequacy of the teaching process and vague intuitions about infinity can lead to certain obstacles and misconceptions in learning the concept (Waldegg, 1996). Along with the epistemological difficulties arising from the abstract nature of the concept, topics related to the concept of infinity remain a difficult concept to understand not only for students but also for teachers. The concept of infinity is shaped in students with almost no teacher intervention. If there is any intervention, the intuitive approaches made by teachers due to their incomplete and unstructured knowledge of the concept of infinity result in the development of misconceptions about infinity and, beyond that, conceptual misconceptions. There are studies in the mathematics education literature that have identified some misconceptions related to this topic in different age groups.

Bolzano (1950) did not accept the definition "Infinite is without end". He thinks that incorrect expressions arise here because "end" is sometimes used as equivalent to "limit". For example, the space between two parallel lines in a plane is bounded by these lines, but it is still infinite. Fischbein (1979) found that students' intuitive conceptions of limiting processes tended to focus on the infinity of the process rather than the finite value of the limit. Singer and Voica (2004) reported that when asked the lowest fraction between 2 and 5, a 14-year-old student answered "2.0000..1 (too many zeros and ones after 2)", and when asked if he could name a smaller fraction than this, he said "yes, there is, but I can't, there are infinitely many numbers like this". In their study, Belmonte and Sierra (2011) found that one of the intuitive models that students between the ages of 11-19 have on infinity-related concepts is the bounded - finite / unbounded - infinite model. This model is a product of the relationship between the definition of a finite or infinite set and the cardinality of the set. The absence of boundary in infinite sets of numbers leads to some expressions in the framework of potential infinity: For example, the set $[0, \infty)$ has more elements than the set $[0, 1]$ because it is infinite... Therefore, they found that examples of infinite number sets represented by line segments or set intervals would have a definite effect on the expression of the subject. Bozkuş et al. (2015) concluded in their study with middle school students that they think that a finite number of fractions can be written because the interval [0,1] is bounded.

In everyday language, the terms "finite" and "infinite" are often used interchangeably. This leads to common misconceptions such as assuming that a finite set is a limited set and an infinite set is an unlimited set. It cannot be generalized that an infinite set is necessarily bounded. Similarly since students often fail to correctly distinguish between the lowest bound (lowest element) and upper bound (greatest element) in infinite number sets, it is possible to encounter incorrect generalizations such as "if an infinite set has no lowest (greatest) element, then it also has no lower (upper) bound." Within the framework of these problems encountered in dialogues with undergraduate students in the classroom, the literature was reviewed, and it was found that there was no study conducted with candidates on the relationship between infinity and boundedness. Motivated by this, the focus was placed on the finiteness of infinite sets, which is an extension of the candidates' understanding of the concept of infinity, and the aim was to reveal the candidates' approaches to the relationship between infinity and boundedness, their misconceptions, and the difficulties they experience. In line with this objective, the research problem was defined as "What are pre-service mathematics teachers' understandings of the boundedness of infinite sets?"

This study, which examines the relationship between infinite sets and finiteness, aims to identify the types of difficulties students experience in their mathematical thinking and to uncover conceptual misconceptions by examining their understanding. The findings obtained are expected to be beneficial in preventing the informal learning-based development of infinity and to serve purposes such as increasing students' awareness of the field, creating meaningful learning outcomes, and ensuring that teachers are well-equipped to teach infinity. Furthermore, it is anticipated that the research findings will inform teaching staff who conduct analysis and abstract mathematics courses at the university about the difficulties that may be encountered in teaching infinite sets and related concepts, thereby helping them take the necessary precautions. Since infinity is not directly addressed at the undergraduate level, it is considered that encouraging candidates to think about this topic and conducting studies that reveal their understanding will contribute to the field.

Method

In this study, case study design, one of the qualitative research methods, was used. Based on "How" and "Why" questions, case study is a method of obtaining in-depth information about a current event over which the researcher has little or no control (Yin, 2009). Since the pre-service teachers' conceptions about the boundedness of infinite sets will be examined in detail, the case study method was preferred.

Participants

This study was conducted in the 1st semester of the 2023-2024 academic year with 51 pre-service teachers studying in the 3rd grade of Elementary Mathematics Teacher Education at a state university in Ankara. Criterion sampling, one of the purposeful sampling methods, was preferred when determining the study group (Patton, 2005). The study group was selected among the pre-service teachers who successfully completed “Analysis I”, “Analysis II” and “Abstract Mathematics” courses. The mentioned courses were used as a criterion to ensure participants had prior knowledge of the study topic.

Data Collection Tools

During the data collection phase, five questions were selected from an open-ended questionnaire designed to determine prospective teachers' prior knowledge of the concept of infinity as part of a doctoral thesis research project. This questionnaire was finalized after consulting with three experts in the field. The five questions used in the study are listed below:

1) Does an infinite number set have the lowest element? Give an example.

2) Is there a maximum element of an infinite set of numbers? Give an example.

3) Can an infinite set of numbers be bounded below? Explain with examples.

4) Can an infinite set of numbers be bounded above? Explain with examples.

5) Can an infinite set of numbers be bounded both above and below? Explain with examples.

The responses given by candidates to the open-ended questions prepared were evaluated by the researcher and the supervising faculty member. In addition, semi-structured interviews lasting approximately 20 minutes were conducted with 12 candidates selected on a voluntary basis in order to examine the reasons behind their responses in more detail. Individual interview questions were prepared based on the answer sheets for candidates who provided incorrect or incomplete answers to the open-ended questions. The interviews were audio recorded. These candidates were coded as ÖA1, ÖA2, …, ÖA12 in the dialogues.

Ethical Committee Approval

The planning and implementation of this research were approved by the Ethics Committee of the Senate of Hacettepe University with the decision dated 21.03.2023 and numbered E-35853172-399-00002757048.

Data Analysis

Content analysis technique was used in the analysis of data. Content analysis involves coding, categorizing (creating meaningful categories where words, phrases, sentences, etc. can be placed), comparing (establishing connections between categories), and drawing conclusions (Cohen, Manion, & Morrison, 2000). Following the administration of an open-ended questionnaire to 51 teacher candidates, their responses were subjected to content analysis. The categories obtained as a result of the analysis are presented in tables along with frequency and percentage values for each category, along with example explanations. Additionally, some tables include subcategories that provide more detailed explanations. Some of the examples provided in writing by candidates when discussing categories are listed below.

Audio recordings obtained from semi-structured interviews were transcribed and analyzed. The analysis consisted of interpreting the responses obtained from semi-structured interviews, which required detailed information about the participant's incorrect or incomplete answers, and reporting any changes in their opinions. Candidates were asked to provide examples for all five questions. Candidates who did not provide examples were asked to provide examples during the interviews. The changing ideas of candidates did not affect the categorization in the interviews. The categories were created based on the candidate's written response.

Validity and Reliability

In qualitative research, reporting the collected data in detail and explaining how the researcher reached the results in detail is considered an important criterion of validity and reliability (Cohen et al., 2000). Since this research was conducted by two researchers working together, the similarities and differences of the categories obtained as a result of the analysis process were compared by the researchers and the most appropriate classification was decided. When in-depth descriptions are made in the transfer of findings, the results become more realistic and enriched, and this process increases the validity of the findings (Creswell, 2017). In this study, semi-structured interviews were conducted to deepen the responses of candidates. Miles and Huberman (1994) state that for good reliability, the similarity rate formed by comparing the codes made by the researchers should be at least 80%. In this study, the codes created by two researchers who performed the coding process separately were compared and the similarity rate was found to be 92%. This level of consistency is considered sufficient for the reliability of the study.

Results

This section presents the findings obtained from the open-ended questionnaire and semi-structured interviews. The findings obtained for each question asked about number sets are presented below under five separate subheadings. In the questionnaire, candidates were asked to answer five questions about infinite number sets and to explain their answers with examples. Categories were created based on the answers given to the questions. When the explanations given by the candidates were examined, it was observed that some did not provide any explanation, some supported their answers with examples, and some attempted to justify their answers with very short statements (instead of giving examples from number sets). Due to these differences in the explanations of the answers, the differences were classified in the "Example Explanations" section corresponding to some categories in the tables created for each question, and "Group Explanations" were created.

Findings on the Lowest Element of the Infinite Number Set

The participants' answers to the question "Does the infinite set of numbers have the lowest element? Give an example." are presented in Table 1.

Table 1

Categories and Explanations Related to the First Question

Categories	Example Explanations	Group Explanations	n	%
It has the lowest element	The lowest element in the set of natural numbers is 0. The lowest element in the set of positive integers is 1.	-	8	16%
It has no lowest element	-	No explanation	11	21,5%
	Set of integers Set of real numbers Negative integers	Explanation with examples	5	10%
	It cannot be limited by boundaries. It has no beginning. It has infinite elements. It does not exist because it is infinite. Even the lowest element goes to infinity; it has no end.	Explanation with reasoned statements	11	21,5%
Some infinite sets of numbers have a lowest element.	While there is a set of natural numbers, there is no set of integers.	Explanation with examples	12	23%
	If it is bounded from below, it exists.	Explanation with reasoned statements	4	8%
Total	-	-	51	100%

As shown in Table 1, candidates in the "It has the lowest element" category provided examples that were consistent with their answers. ÖA5 in the "It has the lowest element" category supported his/her answer with an example from the set of positive integers. The following is an excerpt from the interview with ÖA5, in response to a question asked using an example that does not have the lowest element:

Researcher: *What is the lowest element of the infinite set [2,3]?*

ÖA5: *It is 2.*

Researcher: *What is the lowest element of the infinite set (2,3)?*

ÖA5: *I cannot determine it in this set.*

ÖA5 determines the lowest element of a number set given as a closed interval, but cannot give the answer "there is no lowest element" for a number set given as an open interval.

All candidates in the "there is a lowest element" category and a group of candidates in the "there is no lowest element" category provided examples appropriate to their answers. Some of the examples given for the categories "there is a lowest element" and "there is no lowest element" are as follows: "Positive integers have a lowest element, which is 1 (one)", "Integers do not have a lowest element". Considering the answers given, it was observed that candidates generalized based on only one example of an infinite set with or without the lowest element and concluded that "there is" or "there is not."

Below is an excerpt from an interview with ÖA9, who answered "There is no lowest element" for the infinite set of numbers, without providing any explanation:

Researcher: *Why is there no lowest element of an infinite set of numbers?*

ÖA9: *We don't know how far the elements are, I can say that if - ∞ is an element, it exists.*

Researcher: *Can you reconsider your answer for the infinite set Z+?*

ÖA9: *Yes, it has the lowest element +1... I get it now, when we say infinite set, I thought of two-sided infinite sets like R, Z, in the form of (-∞, +∞).*

In an interview with ÖA9, who answered "no" to the question "Does the infinite set have a lowest element?", the phrase "two-sided infinite set" stands out in his explanation, "When we say infinite set, what comes to my mind are two-sided infinite sets such as R and Z."

As seen in Table 1, candidates' ideas that an infinite set "has no beginning," "has infinite elements," and "cannot be limited by a boundary" led them to interpret that the set has no lowest element. The following is a quote from an interview with a candidate who stated, "It is impossible to limit it with a boundary, so it has no lowest element."A candidate who commented, "It is not possible to restrict with a limit, therefore there is no lowest element," is quoted below:

Researcher: *When you say bound, should I understand the lower bound?*

ÖA4: *Yes, I meant the lower bound.*

Researcher: *What is the difference between a lower bound and the lowest element?*

ÖA4: *The lower boundary is the lower boundary that will be valid beyond that boundary in a set, I can choose the lower boundary from the set, but the lowest element must be an element of the set and it is the lowest of all elements.*

Researcher: *Can you explain with an example?*

ÖA4: *For example, the set of natural numbers is an infinite set and 0 is the lowest element.*

Researcher: *Does the set of natural numbers have a lower bound?*

ÖA4: *Yes, I can represent the set of natural numbers as $[0,\infty)$ and 0 is the lower bound.*

Researcher: *What do you think about the lowest element and lower bound for $A=(1,5]$, $A \subset R$?*

ÖA4: *Since 1 is not included in the set, its lowest element is 2 and its lower bound is 1.*

It is understood from ÖA4's explanations that she knows the difference between the concepts of lower bound and lowest element. However, it is seen that he did not pay attention to the fact that the set A, for which he chose the lowest element 2, was given as a subset of real numbers.

Finally, candidates in the category "Some infinite sets have a lowest element" explained their answers as "if it is bounded from below, the infinite set has a lowest element." However, there are also infinite sets that are bounded from below but do not have a lowest element. Since this situation was addressed in the dialogue mentioned above under ÖA4, no example of an interview excerpt has been included.

Findings on the Greatest Element of the Infinite Number Set

The participants' answers to the question "Does the infinite set of numbers have the greatest element? Give an example." are presented in Table 2.

Table 2

Categories and Explanations Related to the Second Question

Categories	Example Explanations	Group Explanations	n	%
It has the greatest element	The 5 elements in the range [2.5] The set of negative integers is −1	-	5	10%
It has no greatest element	-	No explanation	13	25%
	Set of positive integers Real numbers	Explanation with examples	9	18%
	We cannot know its end. We cannot determine it. It has infinite multitude. Since its beginning and end are unknown, it does not exist.	Explanation with reasoned statements	10	20%
Some infinite sets of numbers have a greatest element.	There is a element 0 in the interval [-∞,0], but there is no element in the interval [4,∞]. There are negative integers, but there are no natural numbers.	Explanation with examples	10	19%
	If it is bounded from above, it exists.	Explanation with reasoned statements	4	8%
Total	-	-	51	100%

According to Table 2, candidates in the "There is a greatest element" category provided examples that were consistent with their answers.

Some of the examples given in the categories of "has the greatest element" or "does not have the greatest element" are as follows: "The infinite set [2,5] has the greatest element, which is 5 (five)", "Positive integers do not have the greatest element". Considering the answers given, it was observed that candidates generalized based on only one example of an infinite set that has or does not have the greatest element and concluded that "there is" or "there is not."

The following is an excerpt from an interview with ÖA8, who answered "there is no greatest element" but did not support his answer with an example.

Researcher: *What is the greatest element for negative integers?*

ÖA8: *It ends at -1, yes, it has the greatest element.*

Researcher: *What is the greatest element of the infinite number set [2,3] $\subset Q$?*

ÖA8: *It is 3.*

During the ÖA8 interview, it was understood that there may also be sets that do not have the lowest element.

As seen in Table 2 in the "no greatest element" category, candidates' thoughts such as "infinite multitude," "we cannot know the end," "the beginning and end are unknown," etc. led them to interpret that an infinite set has no greatest element. The following is an excerpt from the interview with ÖA2, who answered, "Since the beginning and end are unknown, an infinite set does not have the greatest element."

Researcher: *Is there a greatest element of the set Z^{-}?*

ÖA2: *Umm... Yes, there is, it is -1. I thought of it as a finite set if it has a definite beginning and end, and as an infinite set if it is indefinite.*

In this interview conducted with ÖA2, the statement "I thought of it as a finite set if it has a definite beginning and end" is quite striking. Similar statements are also seen in the dialogues that will be presented later, which are based on infinite sets that are bounded from both below and above.

Some of the candidates in the category "Some infinite sets have the greatest element" were able to give examples appropriate to the category. These candidates, who gave examples of infinite sets with and without the greatest element, appear to have a correct understanding of the greatest element of infinite sets. On the other hand, there are also candidates in the same category who, instead of giving examples, explain their answers as "if it is bounded from above, the infinite set has the greatest element." It is seen that the candidates in this group do not have an understanding that there can also be infinite sets that are bounded from above and do not have the greatest element.

The percentage of those who think "there is no greatest element" in Table 2 is 10% higher than those who think "there is no lowest element" in Table 1. However, the difference between the percentage of the "there is a greatest element" category in Table 2 (10%) and the percentage of the "there is no greatest element" category (63%) is quite large. Considering these comparisons, it can be said that the dominant belief among candidates is that the infinite number of elements in a set cannot continuously increase to reach a specific number, and that the number reached cannot be included in the set.

Findings on the Lower Boundedness of the Infinite Number Set

The participants' answers to the question "Can an infinite set of numbers be bounded from below? Explain with examples." are presented in Table 3.

Table 3

Categories and Explanations Related to the Third Question

Categories	Example Explanations	Group Explanation	n	%
May be bounded from the below	Positive integers are bounded below by 1. [2,∞) has a lower bound of 2.	-	45	88%
It cannot be bounded from below	-	No explanation	1	2%
	The negative part of the set of integers goes on to infinity.	Explanation with examples	1	2%
	The set of infinite numbers has no boundaries. No, because it is infinite.	Explanation with reasoned statements	2	4%
Those who do not answer the question	While there is a set of natural numbers, there is no set of integers.	Explanation with examples	2	4%
Total	-	-	51	100%

According to Table 3, the number of candidates who answered "It may be bounded from below" is significantly higher than those who answered "It cannot be bounded from below." However, while more than half of the participants in Table 1 (53%) think that there is no lowest element in an infinite set, the high percentage of responses indicating that it can be bounded from below (88%) in Table 3 is noteworthy.

One of the candidates who answered "it cannot be lower bounded" explained that "it is infinite." Another candidate gave the example of the set of integers and commented that "the negative part goes to infinity." The following is an excerpt from an interview with ÖA2, who answered "it cannot be lower bounded" without giving an explanation:

Researcher: *Why can't an infinite set of numbers be lower bounded?*

ÖA2: *I didn't think it could have a lower bound because I thought it couldn't have a lowest element, but if I say integers from 0 to ∞, then my lower bound could be 0.*

Researcher: *Would it be lower bounded if it were given as (0,∞)?*

ÖA2: *Yes, the lower bound is 1. Because it is not in that set, it does not have the lowest element. But I went to the lowest element again... If I had considered rational numbers instead of integers, it would be after 0, not including 0.*

Researcher: *You didn't say anything definite about the lower bound. Would you like to think about it again?*

ÖA2: *I can't say that 0 is the bound right now, but I feel like it's lower bounded. When I think about the number line beyond 0, I get a little confused...*

It can be seen that ÖA2 has difficulty determining the lower bound of the set given as (a,b), as it considers the lower bound to be the same as the lowest element.

From the explanations of the candidates who answered that it could be lower bounded, it is understood that they thought the lower bound should be included in the set. The candidates' example explanations, which included examples in the form [a,∞), drew attention, and their thoughts on whether an infinite set in the form (a,∞) has a lower bound became a matter of curiosity. For this reason, the candidates' opinions on the (a,∞) example were sought during the interview. The following is an excerpt from the interview with ÖA1, who gave the example of "positive integers: [1,+∞)":

Researcher: *What do you think about the set (1,∞)? Is it lower bounded?*

ÖA1: *It is no longer 1; the lowest number greater than 1 becomes the lower bound.*

Researcher: *What number is that?*

ÖA1: *If we say it is an integer, it is 2.*

Researcher: *What if it is defined in rational numbers?*

Researcher: *What if it is defined in rational numbers?*

ÖA1: *We can add zeros, like 1.00000..1. We find an approximate value.*

Researcher: *What about the lowest element?*

ÖA1: *It has the same lower bound, so we cannot give a definite value.*

Another candidate gave the example of [-2,∞) by saying that an infinite set of numbers can be bounded from below. The excerpt from the interview with ÖA12 is as follows:

Researcher: *Does the set (-2,∞) have a lower bound, and if so, what is it?*

ÖA12: *Again, it is bounded from below. There is an approach to -2. It will be very close, but it will not be -2, we will see it as starting from -2.*

Researcher: *Well, does the set (-2,∞) have the lowest element?*

ÖA12: *It does not have a lowest element because it approaches -2 but it can never be -2.*

When considering the interview excerpts of ÖA1 and ÖA12 presented above, it is understood that neither of them can give a definite value for the lower bound in the examples given of type (a,∞), but rather refer to an approximate value. ÖA12 states that there is no lowest element. It is understood that ÖA12 knows the difference between the lower bound and the lowest element. Furthermore, while ÖA1 answered that there is no lower bound because the element -2 is not included in the set, ÖA12 was able to say that there is a lower bound even though it is not included.

Findings on the Upper Boundedness of the Infinite Number Set

The participants' answers to the question “Can an infinite set of numbers be bounded from above? Explain with examples.” are presented in Table 4.

Table 4

Categories and Explanations Related to the Fourth Question

Categories	Example Explanations	Group Explanations	n	%
May be bounded from the above	Real numbers in the interval $(-\infty,0]$ The set of negative real numbers is upper bounded.	-	43	84%
It cannot be bounded from above	-	No explanation	3	6%
	The positive part of the set of integers goes on to infinity. The set of natural numbers goes on to infinity.	Explanation with examples	2	4%
	It cannot be, because if it were, we could not call it an infinite set.	Explanation with reasoned statements	1	2%
Those who do not answer the question	-	-	2	4%
Total	-	-	51	100%

According to Table 4, the number of candidates who answered “It may be upper bounded” is significantly higher than those who answered “It cannot be upper bounded.” However, while many of the participants in Table 2 (63%) believe that an infinite set of numbers does not have a greatest element, the percentage of those who answered "may be bounded from above" in Table 4 (84%) is quite high.

One of the candidates who answered 'it cannot be upper bounded' gave the set of natural numbers as an example and explained that 'it goes to infinity.' Another candidate gave the set of integers as an example and commented that 'the positive part goes to infinity.'

Nearly all of the explanations given by candidates who answered that they could be bounded from above included the upper bound in their examples. ÖA7, who answered that they could be bounded from above, gave the example of 'real numbers between negative infinity and 0.' The interview excerpt is as follows:

Researcher: *Which one do you mean (-∞,0) or (-∞,0]?*

ÖA7: *I meant the set (-∞,0].*

Researcher: *Why not the set (-∞,0)?*

ÖA7: *I think it should be a closed interval for it to be bounded. If 0 is not included, which number will we accept as the boundary, then we are not bounded.*

According to ÖA7's explanations, it appears that he believes that samples of the type (-∞, a] may be upper bounded. It appears that the candidate, who believes that the upper bound must be included in the set, does not have an understanding that would reveal the difference between the upper bound and the greatest element.

Findings Related to the Boundedness of the Infinite Number Set Both from Below and Above

The participants' answers to the question "Can an infinite set of numbers be bounded both from below and above? Explain with examples." are presented in Table 5.

Table 5

Categories and Explanations Related to the Fifth Question

Categories	Example Explanations	Group Explanations	n	%
It can be bounded both from the below and the above	-	No explanation	11	22%
	(0,1) open interval of real numbers [2,3] closed interval of real numbers	Explanation with examples	15	29%
Cannot be bounded from both above and below	-	No explanation	7	14%
	If it does, it cannot go on to infinity. If it is bounded, it becomes a finite set. On the one hand, it must go on to infinity. There may be a lower boundary, but there cannot be an upper one.	Explanation with reasoned statements	14	27%
Those who do not answer the question	-	-	4	8%
Total	-	-	51	100%

The number of respondents who believe that an infinite set in Table 3 or Table 4 "may be bounded from below or above" has decreased compared to those who believe that it "may be bounded from both below and above" in Table 5. According to Table 5, the difference between the percentage of those who answered "an infinite set of numbers can be bounded both from below and above" and those who answered "it cannot be bounded" is not significant.

15 candidates who commented that "it can be bounded from both below and above" provided examples of appropriate intervals for their answers, with six candidates providing closed interval examples and nine providing open or semi-open interval examples. However, the examples listed below from four candidates in this category are particularly noteworthy:

- $A=\{a \in Z \mid 3 < a < 6\}, A=\{4,5\}$
- $\{1,2,3\}$

- $N^{+}, ab = \{10,11,\ldots,99\}$
- *Set of positive odd digits, [1,9]*

The examples given above are not infinite sets of numbers, but finite sets of numbers. ÖA4, who provided this type of example, explained by giving the finite set example of "the set of positive single digits, [1,9]." The excerpt from the interview with ÖA4 is provided below.

Researcher: *Can you think more about the example you wrote as odd digits?*

ÖA4: *Its elements are bounded to 1 at the below and 9 at the above.*

Researcher: *Are odd digits an infinite set of numbers?*

ÖA4: *... No. I said that if it specifies an interval, it would be a finite set, but here I gave a wrong example that it is an infinite set of numbers.*

During the interviews with the candidates, as a result of questions asked to make them reconsider their answers, the candidates realized that their answers were inconsistent with their examples.

Another noteworthy situation is seen in the category of "cannot be bounded from both below and above." There are candidates (3 candidates) who stated that if it is bounded from below and above, it will be a "finite set" but did not give examples. The excerpt from the interview with ÖA3, who gave the answer "it will be a finite set" but did not give examples, is given below.

Researcher: *If it is bounded above and below, should it be a finite set?*

ÖA3: *I thought that if we know where it starts and ends, that is, if we know the boundaries, it would be a finite set of numbers.*

Researcher: *What would you say about the interval [2,3] in the set of rational numbers, is it a finite set?*

ÖA3: *Hmm... But when it is a rational number, there are many numbers in this range, then it is not a finite set.*

Candidates find it easy to interpret examples given in the form [a,b], but they have difficulty determining the lower and upper bounds in examples given in the form (a,b) (because they are searching within the set). Below is an excerpt from an interview with a candidate who commented that "it cannot be bounded from both the below and the above."

Researcher: *What about the lower and upper bounds of the interval [-1,1]?*

ÖA11: *The lower bound is -1 and the upper bound is +1. I would like to change my answer to maybe.*

Researcher: *What is the upper and lower bound for the interval (-1,1)?*

ÖA11: *We can say bounded, but we cannot specify the boundaries.*

Some candidates who answered “It cannot be bounded from both below and above” also stated that “it can be bounded from below but not from above.” This statement suggests that they believe that the values of numbers in an infinite set will continue to increase and that there cannot be a number smaller than all the numbers in the set. This idea can be interpreted as a one-way infinity to the right on the number line.

Discussion, Conclusion and Suggestions

In this study, it is aimed to examine how prospective mathematics teachers understand the boundedness of infinite sets. Additionally, it was aimed to determine the teacher candidates' understanding of the concepts of lower bound – lowest element and upper bound – greatest element in infinite sets.

In questions 1 and 2, which ask “Does an infinite set have the lowest/greatest element?” (i.e., “infinite multitude” and “has infinite elements”), the explanatory examples of those who answered “no” to both questions are noteworthy. It is understood that candidates believe that when a set of numbers has an infinite multitude of elements, it cannot have the lowest and/or greatest element. Similarly, the reasoned explanations given by those who answered questions 1 and 2, such as “it has no beginning,” “we cannot determine it,” and “we cannot know its end,” are consistent with the “two-sided infinite set” pattern. Therefore, it is thought that among candidates, the idea that the values of the elements of a number set with an infinite number of elements cannot reach a finite number by continuously increasing and/or decreasing is more dominant.

Considering the answers given as examples in the category “no lowest element” for question 1, such as “negative integers,” and in the category “no greatest element” When considering the answers given, it was determined that candidates, based on only one example of an infinite number set that does not have the lowest/greatest element, made an excessive generalization and thought that all infinite number sets cannot have the lowest/greatest element.

The explanation given for question 1 in the category “some infinite sets have a lowest element” is “if it is bounded from below, then it exists.” Similarly, the explanation given for question 2 in the category “some infinite sets of numbers have a greatest element” is “if it is bounded above, then it exists.” It is understood that students in this category believe that the lowest element and the lower bound, and the greatest element and the upper bound, are equivalent, and that one implies the other.

When examining the explanations in Tables 1 and 2, it appears that while it is possible, albeit unlikely, for a set of infinite numbers to have the lowest element, it is not possible for it to have the greatest element. A similar stance is observed in the answers to the question “Can an infinite set of numbers be bounded from above/below?” (Questions 3/4). When Tables 3 and 4 are examined together, it can be said that candidates believe that the probability of an infinite set of numbers being bounded from above is lower than the probability of it being bounded from below. However, considering that the number of appropriate answers to questions 1 and 2 is significantly higher than that of questions 3 and 4, it can be understood that candidates are far from the idea that an infinite set of numbers can have a lowest/greatest element, but are quite close to the idea that it can have a lower/upper bound.

As in questions 1 and 2, the example explanations of those who answered "no" to both questions 3 and 4, which asked, "Can an infinite set of numbers be bounded from below/above?" From the sample explanations of those who answered "no" to both questions 3 and 4, it is understood that candidates believe that when a set of numbers has an infinite number of elements, that set cannot be bounded from below and/or above. The examples given by candidates who answered "it can be" to these questions are of the type $[a,+\infty)$, $(-\infty,b]$. As can be seen from the examples, it is understood that the candidates believe that the lower or upper limits of a set must be elements of the set. In the interviews with the candidates, some of them, who were prompted to reconsider their answers through guided questions, were able to provide examples of sets that are bounded from below/above, such as $(a,+\infty)$ and $(-\infty,b)$. Another notable situation in questions 3 and 4 is that very few candidates provided examples of the form $(a,b]$ or (a,b) for the lower bound and $[a,b)$ or (a,b) for the upper bound.

Finally, the statements "if so, it cannot go to infinity" and "it may be bounded from below but not from above" in the explanatory examples given by those who answered "no" to the question "can an infinite set be bounded from both below and above?" "it must go to infinity on one side," or "it can be bounded from below but not from above" are consistent with the findings obtained in questions 3 and 4. The most striking example explanation given by those who answered "no" is the statement "if it is bounded, it becomes a finite set." However, it is also quite interesting that there are candidates (4 candidates) who answered "yes" to the question but supported their answers with examples of finite sets. Considering that question 5 could not be answered with appropriate examples among all the questions, and that the percentage of those who did not answer question 5 was quite high compared to the other questions, it can be said that the candidates were somewhat hesitant and struggled to come up with ideas about infinite sets being bounded from below and above. On the other hand, the candidates who answered 'it is possible' (10 people) did not experience a contradiction between the concepts of infinity and finiteness and demonstrated sufficient awareness, as evidenced by their examples of open intervals of the form (a,b).

When the incorrect answers given to questions about the lowest/greatest elements and boundedness of infinite sets are analyzed, the misconceptions of candidates regarding comprehension, the incorrect ideas they form in line with their understanding, in general,

1. A set with infinitely many elements

a) cannot have the lowest and/or the greatest element

b) cannot be bounded from the below and/or above

2. a) lowest and/or greatest element

b) "overgeneralizing" from the example of an infinite set without a lower and/or upper bound, and concluding that for all infinite sets there is no lowest and/or greatest element or lower and/or upper bound

3. The lower and/or upper bounds of an infinite set must be elements of the set

4. An infinite set

a) if bounded from the below, the lowest

b) if bounded from the above, the greatest element can be

5. The infinity of a set must be "two-sided" (as in $(-\infty,+\infty)$) or "one-sided" (as in $(-\infty,a)$, $(a, +\infty)$)

6. A set that is bounded both above and below cannot be an infinite set, it must be a finite set

can be summarized in bullet points. There are also some studies in the literature that examine the conceptual obstacles and misconceptions related to the concept of infinite sets.

According to Oflaz and Polat (2022), the fact that candidates think of infinity as "a continuously ongoing, limitless state" may indicate that they have a language-based epistemological barrier. The idea that "it cannot be bounded from both below and above; infinity must expand in one direction" shows that the idea of potential infinity prevails, and that the concept of true infinity, which considers infinity as a whole, is neglected. It is understood that candidates have the misconception that a set bounded from both below and above cannot be an infinite set and must be a finite set. Similarly, Tsamir (1999) noted that candidates overgeneralize from finite sets to infinite sets, attributing finite properties to infinite sets. Pala and Narlı (2018b) found that candidates fall into various misconceptions by generalizing some properties of finite sets to infinite sets.

In line with the idea that the infinity of a set obtained in this study must be "two-sided" or "one-sided," Narlı and Narlı (2012) in their study conducted with 13-14-year-old primary school students, found that they tended to explain infinity with the concept of boundlessness, thinking that infinity could have a beginning but not an end. Similarly, İşleyen (2013) found that nearly half of the 72 secondary school students participating in the study stated that "the infinite has no limit." The general perception of the students is that infinity is the greatest amount imaginable, which cannot be surpassed and is undefined.

There are studies that align with the idea that a set with an infinite number of elements, which is a product of prospective teachers' intuitive approach, cannot be bounded from below and/or above. In their study, Date-Huxtable et al. (2018) asked candidates the question, "Can anything real be infinite?" One of the answers they gave was "lack of boundaries"; for example, the set of integers starting from zero is infinite because there is no greatest integer. One of the misconceptions found in Baragli's (2004) thesis study is that elementary school teachers believe infinity is boundless and that infinity means at least one lack of boundary. In a study by Jirotková and Littler (2004), candidates were asked to "define a straight line." Some of the responses obtained were: "it is an infinite set of points," "the endpoints are infinite," "it goes to infinity in both directions," "it has neither a starting point nor an endpoint," "it cannot be bounded by a beginning and an end."

The findings obtained from this study are similar to and consistent with those identified in the literature. However, items 1a, 2a, 3, and 4 do not match the literature. The reason for this is that no study has been found in the literature on the lowest and/or greatest elements of an infinite set for items 1a and 2a. On the other hand, in studies conducted in the literature, the concepts of infinity or infinite sets are generally associated with 'to be bounded,' and since this boundedness is not detailed as a 'lower bound' or 'upper bound,' items 3 and 4, which are related to lower/upper bounds, could not be matched with the literature. It is believed that studies on the unmatched items will contribute to the field.

In mathematics courses, it is observed that the concept of infinity, which is expected to be included at the high school and university levels, is not explicitly discussed and is not directly addressed as a topic, learning outcome, or activity (Özmantar, Bingölbali, & Akkoç, 2008). Since conceptual knowledge is not provided, the formal knowledge of students who demonstrate an intuitive approach cannot be structured, leading to incorrect generalizations and misconceptions. Kim et al. (2005) stated that students' first encounters with the concept occur through everyday language and teachers' mathematical discourse. To prevent misconceptions, learning outcomes can be included in the high school curriculum and in basic courses at the undergraduate level.

Ergene (2021), in his study with prospective mathematics teachers, emphasized that the concept of infinity is only included intuitively in the mathematics curriculum and is not sufficiently covered in teacher training programs. He stated that prospective teachers lack knowledge about the concept of infinity and do not have sufficient information about the teaching process of infinity. Due to its abstract and contradictory nature, the concept of infinity is difficult to understand not only for students but also for teachers. Since the concept of infinity, which is implicitly covered in teaching programs, is related to many mathematical topics, it is believed that studies on the difficulties and perceptions of teachers, who play a role in teaching the concept, regarding their mathematical understanding of infinity will contribute to mathematics education and teacher education in our country. An analysis of these studies suggests that effective education on the concept of infinity can be achieved through careful planning in both teaching practices and teacher training programs.

Through adjustments to teacher training programs, teachers can be encouraged to take a more active role in teaching by utilizing their formal knowledge of the concept of infinity and gaining awareness in their mathematical discourse. Teachers with subject knowledge can prevent misconceptions that may arise from students' intuitive approaches. Learning environments that stimulate curiosity can be provided in lessons through activities involving problem solving, research, paradoxes, and discussions related to the concept of infinity. To reinforce the research, the study group can be expanded to include candidates, teachers, and high school students from different universities and repeated.

Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi
Yıl: 2025, Cilt: 58, Sayı: 3, 1097-1148
DOI: 10.30964/auebfd.1650923, E-ISSN: 2458-8342, P-ISSN: 1301-3718

Matematik Öğretmeni Adaylarının Sonsuz Sayı Kümelerinin Sınırlılığına İlişkin Kavrayışlarının İncelenmesi [1]

MAKALE TÜRÜ	Başvuru Tarihi	Kabul Tarihi	Yayın Tarihi
Araştırma Makalesi	04.03.2025	21.10.2025	15.12.2025

Tuba Sevyut [2]
Milli Eğitim Bakanlığı

Yeter Şahiner [3]
Hacettepe Üniversitesi

Öz

Bu çalışmada matematik öğretmen adaylarının sonsuz sayı kümelerinin sınırlılığına ilişkin kavrayışlarını ortaya koymak amaçlanmıştır. Araştırma Ankara'da bir devlet üniversitesinin İlköğretim Matematik Öğretmenliği programına devam eden 51 öğretmen adayıyla yürütülmüştür. Verilerin toplanması için açık uçlu sorulardan oluşan bir form uygulanmıştır. Ayrıca daha ayrıntılı bilgi edinebilmek amacıyla 12 aday ile yarı yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Elde edilen veriler içerik analizi yöntemi ile analiz edilmiş ve tablolar halinde sunulmuştur. Araştırmanın sonuçlara göre adayların sonsuz sayı kümelerini "en az bir sınırdan yoksun" "sınırlandırılmaz", "en küçük elemanı olmayan" ve "en büyük elemanı olmayan" şeklinde algıladıkları; alt sınırı kümenin en küçük elemanı, üst sınırı ise kümenin en büyük elemanı olarak kabul ettikleri bulgulanmıştır. Ayrıca adayların örnek açıklamalarından bir kümenin sonsuzluğunun, "iki taraflı " ((-∞,+∞) gibi) ya da "tek taraflı" ((-∞,a) , (a,+∞) gibi), hem alttan hem üstten sınırlı bir kümenin sonlu küme olması gerektiği kavrayışlarına sahip oldukları görülmüştür.

Anahtar sözcükler: Matematik eğitimi, ilköğretim matematik öğretmen adayları, matematiksel kavrayış, sonsuzluk kavramı.

[1]Bu çalışma, birinci yazarın ikinci yazar danışmanlığında hazırladığı yayımlanmamış doktora tezinden üretilmiştir.

[2]Öğretmen, Milli Eğitim Bakanlığı, Türkiye, E-posta: tubasevyut@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-8028-5330, https://ror.org/00jga9g46
[3]*Sorumlu Yazar:* Prof. Dr., Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Ankara/Türkiye, E-posta: mailto:ysahiner@hacettepe.edu.tr, https://orcid.org/0000-0002-6696-4190, https://ror.org/04kwvgz42

Makaleye ilişkin tüm etik beyanlar, çalışmanın son sayfasında yer almaktadır (Sayfa: 1148).

Sonsuzluk; sanat, edebiyat, felsefe, matematik vb. alanlarında karşımıza çıkan anlaşılması ve tanımlanması zor olan bir kavramdır. Mitolojinin cevap veremediği "Varlığın özü nedir?" sorusuyla yorumlanmaya başlanan sonsuzluk kavramı, matematikten önce felsefede ortaya çıkmaktadır. Antik Yunan'da sonsuz kavramını yorumlayan ilk düşünür Miletli Anaksimandros'tur (MÖ 610-546). Anaksimandros'a göre bütün şeylerin özü, sonu ve sınırı olmayan bir varlıktır: "aperion" (Çevik, 2019). Yunanca "peras" kelimesi "son veya sınırlı" olarak çevrilir, apeiron ise a- olumsuzluk eki ile "sınırsız veya sonsuz" anlamlarını taşımaktadır. Anaksimandros, aperionu iyi, güzel, mükemmellik ile özdeşleştirmişse de Pisagor (MÖ 570-495) ve Pisagor okulu aperionu kötü, çirkin, anlaşılmaz olarak nitelemiş ve sonsuz kavramı ile ilgilenmemişlerdir. Antik Yunan filozoflarından Elea'lı Zeno'nun (MÖ 490-430) ortaya attığı çeşitli paradokslar sayesinde sonsuzluk kavramı ilgi görmüş ve düşünülmeye başlanmıştır. Dubinsky, Weller, McDonald & Brown (2005) tarafından ifade edildiği üzere, sonsuzluğun yapısını çözümlemek adına ortaya konan ilk sınıflama Aristoteles'in (MÖ 384-322) potansiyel sonsuzluk ile gerçek sonsuzluk fikirleri arasındaki ayrımı olarak bilinmektedir. Ona göre daima devam eden ve herhangi bir noktasında sonlu bir değere karşılık gelen süreçler potansiyel anlamda sonsuzdur. Gerçek sonsuzluk ise potansiyel süreci kapsayan tek ve bütün bir yapının bireyin zihninde inşa edilmesidir. Sonsuzluk "potansiyel" anlamda dinamik bir süreçken, "gerçek" anlamda ise statik bir nesnedir. Aristoteles insan beyninin sonsuzluğu ancak "potansiyel" olarak anlamlandırabileceğine inanmış ve bir bütün içerisinde yer alan sonsuzluğun algılanamayacağını belirterek "gerçek" sonsuzluk fikrini reddetmiştir (Akt. Pala ve Narlı, 2018a).

Yüzyıllar boyunca, getirdiği çelişkilerden sakınmak için uzak durulan sonsuzluk kavramı, 17. ve 18. yüzyılda matematiksel analizin bir aracı olarak "sonsuz küçük" ve "sonsuz büyük" kavramlarının, matematiğe kazandırılmasıyla geniş ölçüde kullanılmaya başlanmıştır (Karaçay, 2014). 19. yüzyılın başlarında, sonsuzluğun paradokslarıyla uğraşarak sonsuz kümenin formal tanımına yaklaşan ilk kişi Bernard Bolzano (1781-1848) olmuştur (Mancosu, 2016). Bolzano sonlu-sonsuz küme tarifini şu şekilde yapmıştır: Boş olmayan bir A kümesinin alt kümelerinden bir dizi oluşturalım. Dizideki her alt küme kendisinden bir önceki alt kümeyi içersin ve eleman sayısı bir önceki alt kümenin eleman sayısından bir fazla olsun. Bu alt kümeler dizisi sonlanıyorsa, yani önceki alt kümeden bir fazla elemana sahip ancak kapsandığı bir sonraki küme yoksa A kümesi sonludur. Bu alt kümeler dizisi sonlanmıyorsa, A kümesi sonsuzdur (Bolzano, 1950). Dedekind, ilk kez sonsuz kümelerin kesin bir tanımını elde etmiştir: "Bir kümenin en az bir öz alt kümesi kendine eş ise bu küme sonsuzdur. Hiçbir alt kümesine eş olmayan kümeler ise sonludur." (Ferreirós, 2016).

Georg Cantor'un (1845-1918), kümeler kuramının gelişmesine sağladığı büyük katkılarla birlikte matematiksel anlamda "sonsuz"un ne anlama geldiği anlaşılmıştır (Nesin, 2019). Cantor kümeler kuramında, eş güçlülük kavramını ortaya koymuştur. İki kümenin elemanları arasında uygun birebir eşleme gösterilebiliyorsa o iki küme eş güçlüdür denir. Bolzano ve Dedekind'in fikirlerini geliştiren Cantor'un, sonsuz kümenin formal tanımını vermiştir. Bir A kümesi verilsin, eğer A kümesinin herhangi bir öz alt kümesine, birebir ve örten (bijektif) bir fonksiyon tanımlanabiliyorsa, A kümesine sonsuz küme denir. Cantor, bu tanımla parçanın (öz alt küme) bütüne (kümenin kendisi) eş güçlü olabileceğini ortaya koymuştur. Bütünün parçasına eş güçlü olması fikri, matematik dünyasında büyük yankı uyandırmıştır.

Sonsuzluk Kavramı ve Sonsuz Kümeler Üzerine Yapılmış Bazı Araştırmalar

Alanyazında çeşitli yaş gruplarındaki öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin sonsuzluk kavramıyla ilgili algılarını, sezgilerini, kavrayışlarını, zihinsel süreçlerini ve bilişsel seviyelerini belirlemek amacıyla yapılan çalışmaların (Jirotková ve Littler 2004; Singer ve Voica, 2008; Aşık, 2010; Çelik ve Akşan, 2013; Bozkuş, Uçar ve Çetin, 2015; İşleyen, 2016; Date-Huxtable, Cavanagh, Coady ve Easey, 2018) yanı sıra potansiyel ve fiili sonsuzluk, sonsuz kümelerin karşılaştırılması ve denkliği, sonsuz kümelerin denkliğiyle ilgili ispatlama yaklaşımları üzerine yapılmış çalışmalar da (Tirosh ve Tsamir, 1996; Tsamir 1999; Güven ve Karataş, 2004; Aztekin 2008; Pala ve Narlı, 2008b) vardır. Sonsuzluk kavramıyla ilişkili olan tanımsızlık ve belirsizlik, sonsuz kümenin formal tanımı, sayılabilen ve sayılamayan sonsuz kümeler, sonsuz büyük ve sonsuz küçük, limit ve benzeri konuları üzerine yapılmış birçok araştırma da alanyazında yer almaktadır.

Matematik eğitimi alanyazınına bakıldığında, öğretmen adaylarının sonsuzluk kavramını kavrayışları ve yaşadıkları güçlüklerin belirlenmesine odaklanan farklı araştırmalar mevcuttur. Aşık (2010), adayların büyük çoğunluğunun sonsuz sembolünü bir sayı (nesne) olarak ele aldıklarını, Çelik ve Akşan (2013), adayların sonsuzluk kavramına ilişkin açıklamalarını ağırlıklı olarak, “sonu olmayan, sınırsız” kavramlarına dayandırdıklarını bulgulamıştır. Mamolo ve Zazkis (2008), adayların sonsuzluğu tamamlanmış bir süreç yerine devam eden bir süreç olarak algıladıklarını ve sonsuz küçük kavramına ilişkin zorluklar yaşadıklarını belirtmektedir. Kolar ve Cadez (2012), araştırmalarında adaylara, yönelttikleri “En büyük sayı nedir?” sorusuna “Böyle bir sayı yoktur, her sayının ardından daha büyüğü gelebilir.” ve “Sonsuz çoklukta sayı olduğu için, en büyük sayı yoktur.” yanıtları alınmıştır. Ayrıca, sonsuzluğun sınırlı bir alanda var olabileceği ya da çok küçük bir miktarlarla ilişkili olabileceği fikrinin katılımcıların sezgilerine aykırı olduğu bulgulanmıştır. Oflaz ve Polat (2022) yaptıkları çalışma sonucunda öğrencilerin günlük hayat deneyimleriyle edindikleri birincil sezgilerinin, lisans eğitimi almalarına rağmen, sonsuzluk algılarını çok fazla değiştirmediği tespit etmişlerdir.

Öğretmen adaylarıyla sonsuz sayı kümeleri üzerine yapılmış araştırmalar da alanyazında yer almaktadır. Doğan ve Ünan (2011), adayların %17’sinin sonsuz elemanlı kümeyle sayılabilir sonsuz elemanlı kümeyi bilmediklerini ifade etmişlerdir. Sonsuz sayı kümelerinin eleman sayılarını belirlerken adayların %40’ının yorum yapamadığını tespit etmişlerdir. Narlı ve Başer (2008), 1. sınıf matematik öğretmen adaylarının bağıntı, fonksiyon ve küme kavramlarına ait hazır bulunuşluklarını belirlemek için uyguladıkları testte düşük sayılabilecek bir başarı yüzdesi bulgulamışlardır. Pala (2016), adayların sonsuz kümelerin denkliğini belirlemede sıklıkla sezgisel yaklaşımı kullandıklarını başka bir ifadeyle formal matematiksel yaklaşımlar yerine informal yaklaşımlar üreterek sonuca ulaştıklarını raporlamıştır. Aztekin'in (2008) yapmış olduğu araştırmada küme teorisi derslerinde farklı sonsuzluk anlayışlarıyla karşılaşmaları üzerine, doktora öğrencilerinin anlayışlarında potansiyel sonsuzluktan gerçek sonsuzluğa doğru bir kayma olduğu görülmüştür. Bununla birlikte, limit konusu öğretiminde, öğrencilerin dinamik limit kavramıyla ilgili kavram yanılgılarını azaltmak için Cantor'un küme teorisindeki gibi farklı sonsuzluk anlayışlarından faydalanılabileceği önerilmektedir.

Problem Durumu

Bu araştırmada sonsuz kümelerle ilgili ele alınacak konu başlıkları olan en küçük/büyük eleman, alt/üst sınır ve sınırlı küme kavramlarının formal tanımı ve açıklamaları şu şekildedir:

A bir küme ve w∈A olsun. Her a∈A için eğer w<a sağlanıyorsa, A'nın w elemanına A kümesinin en küçük elemanı denir. Benzer olarak, A bir küme ve u∈A olsun. Her a∈A için eğer a<u sağlanıyorsa, A'nın u elemanına A kümesinin en büyük elemanı denir. Örneğin A= [-3,5) kümesi için en küçük eleman tanımı sağlanır ve w= -3∈A kümesinin en küçük elemanıdır. A kümesinin en büyük elemanı yoktur. A kümesinin tüm elemanları 5 ten küçüktür ancak A kümesinin elemanı değildir.

"X bir küme olsun ve A, X alt kümesi verilsin. Eğer bir w∈X elemanı A'nın her elemanından küçük veya eşitse, w elemanına A kümesinin bir alt sınırıdır denir. Eğer bir u∈X elemanı A'nın her elemanından büyük veya eşitse, u elemanına A kümesinin bir üst sınırıdır denir. Bir küme hem alt hem üst sınıra sahip ise o küme, sınırlı kümedir" (Karaçay, 2014). Diğer durumlarda kümeye sınırsız küme denir. Yapılan tanımlarda görüldüğü üzere alt sınır olan w ve üst sınır olan u elemanları X kümesinin elemanlarıdır. Ancak tanımlardaki "küçük/büyük veya eşitse" ifadesinden de anlaşılacağı üzere A kümesinin alt ve/ya üst sınırı olan u ve/ya w, a kümesinin elemanı olabilir de olmayabilir de. Örneğin, reel sayıların alt kümesi olan A=$(-3,5]$ kümesinin üst sınırlarından biri olan 5 A kümesinin elemanı iken, alt sınırlarından biri olan -3 A kümesinin elemanı değildir. Aynı zamanda A kümesi, hem alttan hem üstten sınırlı olduğu için sınırlı kümedir. Yine reel sayıların alt kümesi olan, B=$(-\infty, 5]$ kümesini ele alırsak üst sınırlarından biri 5'tir, alt sınırı ise yoktur dolayısıyla B kümesi sınırsız bir kümedir.

Bir kümenin varsa en küçük elemanı o kümenin alt sınırlarından biridir. Benzer olarak bir kümenin varsa en büyük elemanı o kümenin üst sınırlarından biridir. Ancak, bunların tersi doğru değildir. Yani, alt sınır kümenin en küçük elemanı, üst sınır ise kümenin en büyük elemanı olmayabilir. Örneğin A= $\{a \in R \,|a \in (-3,5]\}$ kümesinin en küçük elemanı yoktur ancak alt sınırlarından biri -3 tür. A kümesinin en büyük elemanı 5'tir ve aynı zamanda 5 kümenin üst sınırlarından biridir. A kümesi sınırlıdır ve sonsuz çoklukta elemana sahiptir.

Sonsuzluk kavramı ilk ve ortaokul sürecindeki doğal sayılar, tam sayılar, rasyonel sayılar, irrasyonel sayılar, reel sayılar, sayı aralıkları, eşitsizliklerin çözüm kümeleri, doğru parçası, ışın, doğru, düzlem vb.; lise sürecinde ise fonksiyon, dizi, limit, türev, seri, integral, yakınsaklık vb. gibi birçok konunun temelinde yer almakta ve bahsedilen konuların yapılandırılmasında önemli bir rol oynamaktadır. Çocuklarda sonsuzluk kavramı erken yaşta gelişmeye başlasa da, ortaöğretim sonuna kadar kavramsal değişimi destekleyen bir müdahale olmadığından üniversiteye gelen öğrenciler kavramı içselleştirmeye bilişsel olarak hazırlıksızdır. Diğer taraftan, çoğu lisans programlarında sadece bir dönemlik verilen soyut matematikte sonsuzluğun formal tanımı, sonsuz sayı kümelerinin karşılaştırılması ve özellikleri vb. konulara yer verilememektedir. Dolayısıyla, öğretim sürecinin yetersizliği ve sonsuzlukla ilgili belirsiz sezgiler kavramın öğrenimine yönelik bazı engellere ve kavram yanılgılarına yol açabilir (Waldegg, 1996). Kavramın soyut doğasından kaynaklanan epistemolojik güçlükle birlikte, sonsuzluk kavramıyla ilişkili konular sadece öğrenciler için değil, öğretmenler için de anlaşılması zor bir kavram olarak kalmaktadır. Sonsuzluk kavramı öğrencilerde neredeyse hiçbir öğretmen müdahalesi olmaksızın şekillenmektedir. Bir müdahale oluyorsa da öğretmenlerin sonsuzluk kavramına yönelik eksik ve yapılandırılmamış bilgileri sebebiyle yaptıkları sezgisel yaklaşımlar, sonsuzluğa ilişkin yanlış anlayışların ve kavram yanılgılarının gelişimiyle sonuçlanmaktadır.

Bolzano (1950), "Sonsuz, sonu olmayandır." tanımını kabul etmemiştir. Burada "son"un bazen "sınır"a eşdeğer anlamda kullanımından dolayı, yanlış ifadelerin ortaya çıktığını düşünmektedir. Örneğin, bir düzlemdeki iki paralel çizgi arasındaki uzay bu çizgilerle sınırlıdır, ancak yine de sonsuzdur. Fischbein'ın (1979) yapmış olduğu çalışmada, öğrencilerin sınırlayıcı süreçlere ilişkin sezgisel kavramlarının limitin sonlu değerinden çok, sürecin sonsuzluğuna odaklanma eğiliminde olduğunu bulgulamıştır. Singer ve Voica (2004) yaptıkları araştırmada yaşı 14 olan bir öğrencinin 2 ile 5 arasındaki en küçük kesir sayısı sorulduğunda "2,0000..1 (2'den sonra çok fazla sıfır ve 1)" olarak cevap verdiği, bundan daha küçüğünü söyleyebilir misin sorusuna ise "Evet vardır ama söyleyemem, bunun gibi sonsuz sayıda sayı var." ifadesini verdiği belirtilmiştir. Belmonte ve Sierra (2011), yapmış oldukları araştırmada yaşları 11-19 arasında öğrencilerin, sonsuzlukla ilişkili kavramlar üzerine sahip oldukları sezgisel modellerden birinin, sınırlı – sonlu / sınırsız – sonsuz modeli olduğunu bulgulamışlardır. Bu model, sınırlı veya sınırsız küme tanımıyla kümenin kardinalitesi arasında kurulan ilişkinin bir ürünüdür. Sonsuz sayı kümelerinde sınırın yokluğu, potansiyel sonsuzluk çerçevesinde bazı ifadelere yol açar: Örneğin, $[0,\infty)$ kümesinin, $[0,1]$ kümesinden daha fazla elemanı vardır çünkü bitmez, gibi… Dolayısıyla, doğru parçası veya küme aralıklarıyla temsil edilen sonsuz sayı kümesi örneklerinin, konunun anlatımı üzerinde etkili olacağı tespitinde bulunmuşlardır. Bozkuş vd. (2015) ortaokul öğrencileriyle yaptıkları çalışmada $[0,1]$ aralığının sınırlı olmasından dolayı sonlu sayıda kesir yazılabileceğini düşündükleri sonucuna varmıştır.

Günlük dilde sınırlı ile sonlu, sonsuz ile sınırsız birbirlerinin yerine kullanılabilen kelimeler olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu bakımdan sezgisel olarak sınırlı küme sonlu kümedir, sonsuz küme ise sınırsız kümedir gibi yaygın kavram yanılgıları oluşmaktadır. Sonsuz bir küme sınırlı olabilir genellemesi yapılamamaktadır. Benzer olarak sonsuz sayı kümelerinde alt sınırla en küçük eleman ve üst sınırla en büyük eleman arasındaki ayrım, öğrenciler tarafından doğru yapılandırılmadığından sonsuz bir kümenin en küçük(büyük) elemanı yoksa alt(üst) sınırı da yoktur gibi yanlış genellemelere rastlanması da mümkündür. Lisans öğrencileriyle ders ortamında yapılan diyaloglarda karşılaşılan bu sorunlar çerçevesinde alanyazın incelenmiş, adaylarla sonsuzluk ve sınırlılık ilişkisi üzerine yapılmış bir çalışmanın bulunmadığı görülmüştür. Bu motivasyonla adayların sonsuzluk kavramına ilişkin anlayışlarının bir uzantısı olan sonsuz kümelerin sınırlılığına odaklanılmış ve öğrencilerin sonsuzluk-sınırsızlık ilişkisindeki yaklaşımlarının, kavram yanılgılarını ve yaşadıkları güçlüklerin ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda araştırmanın problemi "Matematik öğretmeni adaylarının sonsuz sayı kümelerinin sınırlılığına ilişkin kavrayışları nasıldır?" şeklinde belirlenmiştir.

Sonsuz sayı kümelerinin sınırlılıkla ilişkisinin incelendiği bu çalışmada, öğrencilerin kavrayışlarının incelenmesiyle matematiksel düşünmelerinde ne tür güçlükler yaşandığının belirlenmesi ve kavram yanılgılarını ortaya çıkarılması amacıyla elde edilen bulguların, sonsuzluğun informal öğrenmeye dayalı gelişiminin önüne geçmek adına bir fayda sağlayacağı ve öğrencilerin alana yönelik farkındalık kazanmaları, anlamlı öğrenme çıktılarının oluşturulması, öğretmenlerin sonsuzluk konusunda donanımlı olmaları vb. amaçlar doğrultusunda öğretim programlarında yapılabilecek düzenlemeler için bir veri oluşturacağı düşünülmektedir. Ayrıca, araştırma çıktılarının, üniversitede analiz ve soyut matematik derslerini yürüten öğretim elemanlarına, sonsuz kümeler ve ilişkili kavramların öğretiminde yaşanabilecek güçlükler hakkında bilgilendirerek gerekli önlemleri almalarına yardımcı olacağı öngörülmektedir. Lisans düzeyinde sonsuzluk doğrudan işlenmediğinden, adayların bu konuda düşünmeye teşvik edilmesi ve kavrayışlarını ortaya koyacak çalışmaların alana katkı sağlayacağı değerlendirilmektedir.

Yöntem

Bu çalışmada, nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması deseni kullanılmıştır. "Nasıl" ve "Neden" sorularını temel alan durum çalışması, araştırmacının üzerinde çok az kontrol sahibi olduğu veya hiç kontrol sahibi olmadığı güncel bir olay hakkında derinlemesine bilgi edinme yöntemidir (Yin, 2009). Öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin sınırlılığıyla ilgili kavrayışları ayrıntılı olarak inceleneceğinden durum çalışması yöntemi tercih edilmiştir.

Çalışma Grubu

Bu çalışma 2023-2024 eğitim-öğretim yılının 1. döneminde Ankara'da bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği 3. sınıfta öğrenim görmekte olan 51 adayla yürütülmüştür. Çalışma grubu belirlenirken amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme tercih edilmiştir (Patton, 2005). Çalışma grubu, "Analiz I", "Analiz II" ve "Soyut Matematik" derslerini başarıyla tamamlamış adaylar arasından belirlenmiştir. Bahsi geçen derslerin alınmış olması çalışılacak olan konuya ön bilgi oluşturması açısından ölçüt olarak alınmıştır.

Verilerin Toplanma Süreci

Verilerin toplanması aşamasında, bir doktora tez araştırması kapsamında adayların sonsuzluk kavramıyla ilgili sahip oldukları ön bilgileri belirlemek amacıyla hazırlanan açık uçlu soru formundan, araştırma konusu çerçevesinde beş soru seçilmiştir. Bu form, alanında uzman üç kişinin görüşü alınarak son haline getirilmiştir. Çalışmada kullanılan beş soru aşağıda verilmiştir:

1) Sonsuz sayı kümesinin en küçük elemanı var mıdır? Örnekleyiniz.

2) Sonsuz sayı kümesinin en büyük elemanı var mıdır? Örnekleyiniz.

3) Sonsuz bir sayı kümesi alttan sınırlı olabilir mi? Örneklerle açıklayınız.

4) Sonsuz bir sayı kümesi üstten sınırlı olabilir mi? Örneklerle açıklayınız.

5) Sonsuz bir sayı kümesi hem alttan hem üstten sınırlı olabilir mi? Örneklerle açıklayınız.

Adayların hazırlanan açık uçlu sorulara verdikleri yanıtları araştırmacı ve danışman öğretim üyesi tarafından değerlendirilmiştir. Ayrıca adayların verdikleri cevapların nedenlerini daha ayrıntılı incelemek için yine gönüllülük esasına göre belirlenen 12 adayla yaklaşık 20 dakikalık birebir yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Açık uçlu sorulara yanlış veya eksik cevap vermiş adaylara cevap kâğıtları üzerinden bireysel görüşme soruları hazırlanmıştır. Yapılan görüşmelerin ses kayıtları alınmıştır. Adaylar diyaloglarda, ÖA1, ÖA2, …, ÖA12 biçiminde kodlanarak sunulmuştur.

Etik Kurul Kararı

Bu araştırmanın planlanması ve yürütülmesi, Hacettepe Üniversitesi Senatosu Etik Komisyonu'nun 21.03.2023 tarihli ve E-35853172-399-00002757048 sayılı kararıyla uygun bulunmuştur.

Verilerin Analizi

Verilerin analizinde içerik analiz tekniği kullanılmıştır. İçerik analizi kodlamayı, kategorize etmeyi (kelimeler, ifadeler, cümleler vb. yerleştirilebileceği anlamlı kategoriler oluşturma), karşılaştırmayı (kategoriler ve bunlar arasında bağlantılar kurmayı) ve sonuçlar çıkarmayı içerir (Cohen, Manion ve Morrison, 2000). 51 adaya açık uçlu soru formunun uygulanmasının ardından, verdikleri cevaplar içerik analizine tabi tutulmuştur. Analiz sonucunda elde edilen kategoriler, bu kategorilere ait frekans ve yüzde değerleri ile birlikte örnek açıklamalar hazırlanan tablolarda yer almaktadır. Ayrıca bazı tablolarda örnek açıklamaları ayrıntılı hale getiren alt kategoriler yer almaktadır. Kategorilerden bahsederken adayların yazılı olarak verdikleri örnek açıklamaların bazıları listelenmiştir.

Yarı yapılandırılmış görüşmelerden elde edilen ses kayıtları yazıya dökülmüş ve çözümlenmiştir. Çözümleme, katılımcının yanlış veya eksik yanıtı hakkında detaylı bilgi verilmesi istenen yarı yapılandırılmış görüşmelerden elde edilen yanıtların yorumlanması, varsa değişen fikirlerinin raporlanması şeklinde yapılmıştır. Beş soruda da adaylardan örnekler vermeleri istenmiştir. Örnek açıklama yapmayan adaylardan görüşmeler esnasında örnekler vermeleri istenmiştir. Görüşmelerde adayların değişen fikirleri kategorizasyonu etkilememiştir. Kategoriler adayın yazılı cevabına göre oluşturulmuştur.

Geçerlik ve Güvenirlik

Nitel araştırmada ise toplanan verilerin ayrıntılı olarak rapor edilmesi ve araştırmacının sonuçlara nasıl ulaştığını ayrıntılı olarak açıklaması geçerlik ve güvenirliğin önemli bir ölçütü kabul edilmektedir (Cohen vd., 2000). İki araştırmacının bir arada çalıştığı bir araştırma yapıldığından, analiz işlemi sonucunda elde edilen kategorilerin benzerlikleri ve farklılıkları araştırmacılar tarafından karşılaştırılmıştır, en uygun sınıflandırmaya karar verilmiştir. Bulguların aktarımında derinlemesine betimleme yapıldığı zaman sonuçlar daha gerçekçi olur ve zenginleşir, bu süreç bulguların geçerliğini arttırır (Creswell, 2017). Bu çalışmada yarı yapılandırılmış görüşmeler, adayların yanıtlarını derinleştirmek için yapılmıştır. Miles ve Huberman (1994), iyi bir güvenirlik için araştırmacıların yaptığı kodların karşılaştırılmasıyla oluşan benzerlik oranının en az %80 düzeyinde olması gerektiği belirtmektedir. Bu araştırmada kodlama işlemini ayrı ayrı yapan iki araştırmacı oluşturdukları kodlar karşılaştırılmış ve benzerlik oranını %92 olarak bulmuşlardır. Bu tutarlılık düzeyi çalışmanın güvenirliği için yeterli kabul edilmektedir.

Bulgular

Bu bölümde açık uçlu soru formundan ve yarı yapılandırılmış görüşmelerden elde edilen bulgular yer almaktadır. Sayı kümeleriyle ilgili sorulan her bir soru için elde edilen bulgular aşağıda beş ayrı alt başlıkta verilmiştir. Soru formunda adaylardan sonsuz sayı kümeleriyle ilgili beş soruyu cevaplamaları ve cevaplarını da örneklerle açıklamaları istenmiştir. Sorulara verilen cevaplar esas alınarak kategoriler oluşturulmuştur. Adayların cevaplarına yönelik açıklamalar incelendiğinde, kimisinin hiçbir açıklama yapmadığı, kimisinin cevaplarını örnek vererek desteklediği, kimisinin de (sayı kümelerinden örnek vermek yerine) cevaplarını çok kısa ifadelerle gerekçelendirmeye çalıştıkları görülmüştür. Cevapların açıklanmasında oluşan bu farklılıklardan dolayı, her bir soru için oluşturulan tablolardaki bazı kategorilere karşılık gelen, "Örnek Açıklamalar" bölümünde bu farklılıklar sınıflandırılarak "Grup Açıklamaları" oluşturulmuştur.

Sonsuz Sayı Kümesinin En Küçük Elemanına Ait Bulgular

Katılımcıların "Sonsuz sayı kümesinin en küçük elemanı var mıdır? Örnekleyiniz." sorusuna vermiş olduğu cevaplar Tablo 1'de sunulmuştur.

Tablo 1

Birinci Soruya İlişkin Kategoriler ve Açıklamalar

Kategoriler	Örnek Açıklamalar	Grup Açıklamaları	n	%
En küçük elemanı vardır	Doğal sayılar kümesinin en küçük elemanı 0'dır. Pozitif tam sayılar kümesinin en küçük elemanı 1'dir.	-	8	%16
En küçük elemanı yoktur	-	Açıklama yok	11	%21,5
	Tam sayılar kümesi Reel sayılar kümesi Negatif tam sayılar	Örnek vererek açıklama	5	%10
	Sınırla kısıtlamak mümkün değildir. Başlangıcı yoktur. Sonsuz elemanı vardır. Sonsuz olduğu için yoktur. En küçük eleman da sonsuza gider, sonu yoktur.	Gerekçeli ifadelerle açıklama	11	%21,5
Bazı sonsuz sayı kümelerinin en küçük elemanı vardır	Doğal sayılar kümesinin varken tam sayılar kümesinin yoktur.	Örnek vererek açıklama	12	%23
	Alttan sınırlı ise vardır.	Gerekçeli ifadelerle açıklama	4	%8
Toplam	-	-	51	%100

Tablo 1'de görüldüğü üzere, "En küçük elemanı vardır" kategorisindeki adaylar verdikleri cevaba uygun örneklemeler yapmışlardır. "En küçük elemanı vardır" kategorisinde yer alan ÖA5 cevabını pozitif tam sayılar kümesi örneğiyle desteklemiştir. ÖA5 ile yapılan görüşmede en küçük elemanı olmayan bir örnek üzerinden sorulan soruya yönelik cevabı aşağıda alıntılanmıştır:

Araştırmacı: *[2,3] sonsuz sayı kümesinin en küçük elemanı nedir?*

ÖA5: *2'dir.*

***Araştırmacı:** (2,3) sonsuz sayı kümesinin en küçük elemanı nedir?*

***ÖA5:** Bu kümede belirleyemiyorum.*

ÖA5, kapalı aralık şeklinde verilen sayı kümesinin en küçük elemanını belirlerken, açık aralık olarak verilen sayı kümesi için “en küçük elemanı yoktur” cevabını verememiştir.

“En küçük elemanı vardır” kategorisinde bütün adaylar ve “En küçük elemanı yoktur” kategorisinde de bir grup aday cevaplarına uygun örneklendirmeler yapmışlardır. En küçük elemanı vardır veya yoktur kategorilerinde uygun sayı kümeleri üzerinden yapılan örneklemelerden bazıları şu şekildedir: “Pozitif tam sayıların en küçük elemanı vardır ve 1(bir)’dir”, “Tam sayıların en küçük elemanı yoktur”. Verilen cevaplar gözetildiğinde, adayların en küçük elemana sahip olan veya olmayan sadece bir sonsuz küme örneği üzerinden genelleme yaparak “vardır” veya “yoktur” sonucunu çıkardıkları görülmüştür.

Aşağıda, herhangi bir açıklama yapmadan, sonsuz sayı kümesinin “En küçük elemanı yoktur” cevabını veren ÖA9 ile yapılan görüşme alıntısına yer verilmektedir:

***Araştırmacı:** Neden sonsuz sayı kümesinin en küçük elemanı yoktur?*

***ÖA9:** Bilmiyoruz elemanları nereye kadar, - ∞ bir elemansa vardır diyebilirim.*

Araştırmacı: Z^+ *sonsuz kümesi için yanıtını tekrar düşünür müsün?*

***ÖA9:** Evet, en küçük elemanı vardır +1’dir… Anladım şimdi, sonsuz küme dediğimizde benim aklıma R, Z gibi iki taraflı sonsuz kümeler geldi, (-∞, +∞) şeklinde.*

“Sonsuz sayı kümesinin en küçük elemanı var mıdır?” sorusunu “yoktur” olarak yanıtlayan ÖA9 ile yapılan görüşmede “sonsuz küme dediğimizde benim aklıma R, Z gibi iki taraflı sonsuz kümeler geldi” şeklindeki açıklamasında “iki taraflı sonsuz küme” kelime grubu dikkat çekmektedir.

Tablo 1’de görüldüğü üzere, adayların sahip oldukları sonsuz bir kümenin “başlangıcı yoktur”, “sonsuz elemanı vardır” ve “sınırla kısıtlamak mümkün değildir” vb. gibi düşünceler sebebiyle kümenin en küçük elemanı da yoktur şeklinde yorumlamalarına yol açmıştır. “Bir sınırla kısıtlamak mümkün değildir, dolayısıyla en küçük elemanı yoktur” ifadesini veren bir adayın görüşme alıntısı aşağıda verilmiştir:

***Araştırmacı:** Sınır derken alt sınırı mı anlamalıyım?*

***ÖA4:** Evet alt sınırı demek istedim.*

***Araştırmacı:** Alt sınırla en küçük eleman arasındaki fark nedir?*

ÖA4: *Alt sınır, bir kümede o sınırdan ilerisi için geçerli olacak alt sınırı kendim seçebilirim kümeden, ama en küçük eleman, adı üstünde kümenin elemanı olmalıdır ve tüm elemanların içinde en küçüğüdür.*

Araştırmacı: *Örnekle açıklayabilir misin?*

ÖA4: *Mesela doğal sayılar kümesi sonsuz bir kümedir ve 0 en küçük elemandır.*

Araştırmacı: *Doğal sayılar kümesi alt sınıra sahip midir?*

ÖA4: *Evet, doğal sayılar kümesi [0,∞) şeklinde gösterebilirim ve 0 alt sınırdır.*

Araştırmacı: *$A=(1,5]$, $A\subset R$ için en küçük eleman ve alt sınır hakkında ne düşünürsün?*

ÖA4: *1 kümeye dâhil olmadığı için en küçük elemanı 2, alt sınırı 1'dir.*

ÖA4'ün açıklamalarından alt sınır ve en küçük eleman kavramları arasında farkı bildiği anlaşılmaktadır. Ancak, en küçük eleman 2'dir seçimini yaptığı A kümesinin reel sayıların alt kümesi olarak verildiğine dikkat edilmediği görülmüştür.

Son olarak, "Bazı sonsuz kümelerin en küçük elemanı vardır" kategorisinde bulunan adaylar cevaplarını "alttan sınırlı ise sonsuz kümenin en küçük elemanı vardır" şeklinde açıklamışlardır. Oysaki alttan sınırlı olup en küçük elemanı olmayan sonsuz kümeler de vardır. Bu duruma yukarıda ÖA4 ile geçen diyalogda yer verildiği için, örnek bir görüşme alıntısına yer verilmemiştir.

Sonsuz Sayı Kümesinin En Büyük Elemanına Ait Bulgular

Katılımcıların "Sonsuz sayı kümesinin en büyük elemanı var mıdır? Örnekleyiniz." sorusuna vermiş olduğu cevaplar Tablo 2'de sunulmuştur.

Tablo 2

İkinci Soruya İlişkin Kategoriler ve Açıklamalar

Kategoriler	Örnek Açıklamalar	Grup Açıklamaları	n	%
En büyük elemanı vardır	[2,5] aralığındaki 5 elemanı Negatif tam sayılar kümesinin -1'dir	-	5	%10
En büyük elemanı yoktur	-	Açıklama yok	13	%25
	Pozitif tam sayılar kümesi Reel sayılar	Örnek vererek açıklama	9	%18
	Bitişini bilemeyiz. Belirleyemeyiz. Sonsuz çokluğa sahiptir. Başlangıcı ve sonu belli olmadığı için yoktur.	Gerekçeli ifadelerle açıklama	10	%20
Bazı sonsuz sayı kümelerinin en büyük elemanı vardır	[-∞, 0] aralığında 0 elemanı varken [4,∞] aralığında yoktur. Negatif tam sayıların varken doğal sayılar kümesinin yoktur.	Örnek vererek açıklama	10	%19
	Üstten sınırlı ise vardır.	Gerekçeli ifadelerle açıklama	4	%8
Toplam	-	-	51	%100

Tablo 2'ye göre, "En büyük elemanı vardır" kategorisindeki adaylar verdikleri cevaba uygun örneklemeler yapmışlardır.

En büyük elemanı vardır veya yoktur kategorilerinde uygun sayı kümeleri üzerinden yapılan örneklemelerden bazıları şu şekildedir: "[2,5] sonsuz kümesinin en büyük elemanı vardır ve 5(beş)'tir", "Pozitif tam sayıların en büyük elemanı yoktur". Verilen cevaplar gözetildiğinde, adayların en büyük elemana sahip olan veya olmayan sadece bir sonsuz küme örneği üzerinden genelleme yaparak "vardır" veya "yoktur" sonucunu çıkardıkları görülmüştür.

"En büyük elemanı yoktur" cevabını veren ancak cevabını bir örnek ile desteklemeyen ÖA8 ile yapılan görüşme alıntısı aşağıdadır:

Araştırmacı: *Negatif tam sayılar için en büyük eleman nedir?*

ÖA8: *-1'de bitiyor, evet en büyük elemanı varmış.*

Araştırmacı: *$[2,3] \subset Q$ sonsuz sayı kümesinin en büyük elemanı nedir?*

ÖA8: *3'tür.*

ÖA8 görüşme sırasında en küçük elemana sahip olmayan kümelerin de olabileceği kavrayışına ulaşmıştır.

Tablo 2'de "en büyük elemanı yoktur" kategorisinde görüldüğü üzere, adayların sahip oldukları "sonsuz çokluk", "bitişini bilemeyiz", "başlangıcı sonu belli değil" vb. gibi düşünceler sebebiyle sonsuz bir kümenin en büyük elemanı yoktur şeklinde yorumlamalarına yol açmıştır. "Başlangıcı ve sonu belli olmadığından sonsuz kümenin en büyük elemanı yoktur" şeklinde cevap veren ÖA2 ile yapılan görüşme alıntısı aşağıdadır:

Araştırmacı: *Z^- sonsuz kümesinin en büyük elemanı var mıdır?*

ÖA2: *Aaa… Evet, vardır -1'dir. Ben başlangıcı ve sonu belirli ise sonlu küme, belirsiz ise sonsuz küme olarak düşünmüştüm.*

ÖA2 ile yapılan bu görüşmede "başlangıcı ve sonu belirli ise sonlu küme olarak düşünmüştüm" ifadesi oldukça dikkat çekicidir. Buna benzer ifadeler, hem alttan hem de üstten sınırlı sonsuz küme üzerine yapılan ve ilerde verilecek olan diyaloglarda da görülmektedir.

"Bazı sonsuz kümelerin en büyük elemanı vardır" kategorisinde bulunan adayların bir kısmı kategoriye uygun örneklendirmeler yapabilmişlerdir. En büyük elemanı olan ve en büyük elemanı olmayan sonsuz sayı kümelerinden örnekler veren bu adayların sonsuz kümelerin en büyük elemanına yönelik doğru bir kavrayışa sahip oldukları görülmektedir. Diğer taraftan aynı kategoride olup, örnekleme yapmak yerine, cevaplarını "üstten sınırlı ise sonsuz kümenin en büyük elemanı vardır" şeklinde açıklayan adaylar da mevcuttur. Bu gruptaki adayların üstten sınırlı olup en büyük elemanı olmayan sonsuz kümelerin de olabileceği kavrayışına sahip olmadıkları görülmektedir.

Tablo 2'deki "en büyük elemanı yoktur" şeklinde düşünenlerin oranı Tablo 1'deki "en küçük elemanı yoktur" şeklinde düşünenlerden %10 daha fazladır. Bununla birlikte, Tablo 2'deki "en büyük elemanı vardır" kategori yüzdeliği %10 ile "en büyük elemanı yoktur" kategorisinin yüzdeliği %63 arasındaki fark oldukça fazladır. Bu karşılaştırmalar göz önüne alındığında, adaylarda, bir kümedeki sonsuz çokluktaki sayıların sürekli artarak bir sayıya ulaşamayacağı ve ulaşılan bu sayının kümeye dâhil olamayacağı düşüncesinin baskın olduğu söylenebilir.

Sonsuz Sayı Kümesinin Alttan Sınırlılığına Ait Bulgular

Katılımcıların *"*Sonsuz bir sayı kümesi alttan sınırlı olabilir mi? Örneklerle açıklayınız." sorusuna vermiş olduğu cevaplar Tablo 3'te sunulmuştur.

Tablo 3

Üçüncü Soruya İlişkin Kategoriler ve Açıklamalar

Kategoriler	Örnek Açıklamalar	Grup Açıklamaları	n	%
Alttan sınırlı olabilir	Pozitif tam sayılar 1'de alttan sınırlıdır. [2,∞), alt sınırı 2'dir.	-	45	%88
Alttan sınırlı olamaz	-	Açıklama yok	1	%2
	Tam sayılar kümesinde negatif kısım sonsuza kadar gider.	Örnek vererek açıklama	1	%2
	Sonsuz sayı kümesinin sınırları yoktur. Hayır, çünkü sonsuz.	Gerekçeli ifadelerle açıklama	2	%4
Soruya herhangi bir yanıt vermeyenler	-	-	2	%4
Toplam	-	-	51	%100

Tablo 3'e göre "Alttan sınırlı olabilir" cevabını veren adayların sayısı "Alttan sınırlı olamaz" cevabını verenlerden oldukça fazladır. Bununla birlikte, Tablo 1'de katılımcılardan yarıdan fazlasının (%53), sonsuz bir sayı kümesinin en küçük elemanı olmadığını düşünürken, Tablo 3'te alttan sınırlı olabilir cevabının (%88) yüksek oranı dikkat çekicidir.

Alttan sınırlı olamaz cevabını veren adaylardan birinin "çünkü sonsuzdur" açıklamasında bulunduğu görülmüştür. Başka bir aday da tam sayılar kümesini örnek vererek "negatif kısım sonsuza kadar gider" yorumunu yapmıştır. Açıklama yapmadan alttan sınırlı olamaz yanıtını veren ÖA2 ile yapılan görüşme alıntısı şu şekildedir:

Araştırmacı: *Sonsuz bir sayı kümesi neden alttan sınırlı olamaz?*

ÖA2: *En küçük elemanı olamayacağını düşündüğüm için bir alt sınır* *olabileceğini düşünmedim, ama 0'dan ∞'a kadar tam sayılar dersem alt sınırım 0 olabilir*

Araştırmacı: *(0,∞) şeklinde verilseydi alttan sınırlı olur muydu?*

ÖA2: *Evet, 1 'dir alt sınır. Çünkü o kümede olmadığı için, en küçük elemanı yok. Ama en küçük elemana gittim yine... Tam sayılar değil de rasyonel sayılarda ele alsaydım, 0 dâhil olmayan 0'dan sonrası.*

Araştırmacı: *Alt sınır hakkında net bir şey demedin, tekrar düşünür müsün?*

ÖA2: *Şu an 0'a sınır diyemiyorum ama alttan sınırlı gibi hissediyorum. 0'dan sonrası var sayı doğrusu üzerinde düşündüğümde. Karıştırdım biraz…*

ÖA2'nin en küçük elemanla alt sınırı aynı kabul ettiği, (a,b) şeklinde verilen kümenin alt sınırını belirlemede zorlandığı görülmektedir.

Alttan sınırlı olabilir cevabını veren adayların açıklamalarından alt sınırın kümeye dâhil olması gerektiğini düşündükleri anlaşılmaktadır. Adayların örnek açıklamalarında [a,∞) formunda örnek vermeleri dikkat çekmiş, (a,∞) formunda bir sonsuz kümenin alt sınırının olup olmadığına dair düşünceleri merak konusu olmuştur. Bu sebeple adaylarla yapılan görüşmede (a,∞) örneğine yönelik görüşleri alınmıştır. "Pozitif tam sayılar: [1,+∞) kümesini" örnek gösteren ÖA1 ile yapılan görüşme alıntısı şu şekildedir:

Araştırmacı: *(1,∞) kümesi için ne düşünürsün alttan sınırlı mıdır?*

ÖA1: *1 değil artık, 1'den büyük en küçük sayı alt sınır olur.*

Araştırmacı: *Hangi sayı olur?*

ÖA1: *Tam sayı olarak dersek 2 olur.*

Araştırmacı: *Rasyonel sayılarda tanımlı olursa ne dersin?*

ÖA1: *1,00000..1 gibi bir şey sıfırları artırabiliriz. Yaklaşık bir değer buluruz.*

Araştırmacı: *En küçük eleman için ne söylersin?*

ÖA1: *O da aynı alt sınırla, kesin bir değer söyleyemeyiz.*

Başka bir aday, sonsuz bir sayı kümesi alttan sınırlı olabilir diyerek $[-2,\infty)$ örneğini vermiştir. ÖA12 ile yapılan görüşme alıntısı şu şekildedir:

Araştırmacı: *(-2,∞) kümesinin alt sınırı var mıdır, varsa nedir?*

ÖA12: *Yine alttan sınırlı olur. -2'ye yaklaşım söz konusudur. Çok yaklaşacak ama -2 olmayacak biz onu -2'den başlıyor gibi göreceğiz.*

Araştırmacı: Peki, *(-2,∞) kümesinin en küçük elemanı var mıdır?*

ÖA12: *En küçük elemanı yoktur çünkü -2'ye yaklaşır ama hiçbir zaman -2 olamaz.*

Yukarıda sunulan ÖA1 ve ÖA12'nin görüşme alıntıları gözetildiğinde her ikisinin de (a,∞) tipinde verilen örneklerde alt sınırla ilgili kesin bir değer söyleyemedikleri, yaklaşık bir değerden bahsettikleri anlaşılmaktadır. ÖA12 ise en küçük elemanının olmadığını belirtmiştir. ÖA12'nin, alt sınırla en küçük eleman arasındaki farklı bildiği anlaşılmaktadır. Ayrıca ÖA1, -2 elemanı kümeye dâhil olmadığı için alt sınırı yoktur şeklinde cevap verirken, ÖA12 dâhil olmasa da alt sınırı vardır diyebildiği görülmektedir.

Sonsuz Sayı Kümesinin Üstten Sınırlılığına Ait Bulgular

Katılımcıların *"*Sonsuz bir sayı kümesi üstten sınırlı olabilir mi? Örneklerle açıklayınız." sorusuna vermiş olduğu cevaplar Tablo 4'te sunulmuştur.

Tablo 4

Dördüncü Soruya İlişkin Kategoriler ve Açıklamalar

Kategoriler	Örnek Açıklamalar	Grup Açıklamaları	n	%
Üstten sınırlı olabilir	(-∞,0] aralığındaki reel sayılar Negatif reel sayılar kümesi üstten sınırlıdır.	-	43	%84
Üstten sınırlı olamaz	-	Açıklama yok	3	%6
	Tam sayılar kümesinde pozitif kısım sonsuza kadar gider. Doğal sayılar kümesi sonsuza gitmektedir.	Örnek vererek açıklama	2	%4
	Olamaz, olursa sonsuz sayı kümesi diyemeyiz.	Gerekçeli ifadelerle açıklama	1	%2
Soruya herhangi bir yanıt vermeyenler	-	-	2	%4
Toplam	-	-	51	%100

Tablo 4'e göre "Üstten sınırlı olabilir" cevabını veren adayların sayısı "Üstten sınırlı olamaz" cevabını verenlerden oldukça fazladır. Bununla birlikte, Tablo 2'deki katılımcıların birçoğu (%63) sonsuz bir sayı kümesinin en büyük elemana sahip olmadığını düşünürken, Tablo 4'teki üstten sınırlı olabilir cevabının oranı (%84) oldukça yüksektir.

Üstten sınırlı olamaz cevabını veren adaylardan biri doğal sayılar kümesini örnek göstererek "sonsuza gitmektedir" açıklamasında bulunmuştur. Başka bir aday da tam sayılar kümesini örnek vererek "pozitif kısım sonsuza kadar gider" yorumunu yapmıştır.

Üstten sınırlı olabilir cevabını veren adayların açıklamalarının tamamına yakını, örneklerinde üst sınırı kümeye dâhil etme ihtiyacı duymuşlardır. Üstten sınırlı olabilir cevabını veren ÖA7'nin açıklamasında "eksi sonsuzla 0 arasındaki reel sayılar" örneğini vermiştir. Yapılan görüşme alıntısı şu şekildedir:

Araştırmacı: *(-∞, 0) veya (-∞, 0] hangisini kastettiniz?*

ÖA7: *(-∞, 0] kümesini demek istedim.*

Araştırmacı: *Neden (-∞, 0) kümesi olmuyor?*

ÖA7: *Bence kapalı aralık olmalıdır sınırlı olması için. 0 dâhil değilse hangi sayıyı sınır kabul edeceğiz o zaman sınırlandırmış olmuyoruz.*

ÖA7'nin açıklamalarına göre (-∞, a] tipindeki aralık örneklerinin üstten sınırlı olabileceğini düşündüğü anlaşılmaktadır. Üst sınırın kümeye dâhil olması gerektiğini düşünen adayın üst sınırla en büyük eleman arasındaki farkı ortaya koyacak bir kavrayışa sahip olmadığı görülmektedir.

Sonsuz Sayı Kümesinin Hem Alttan Hem Üstten Sınırlılığına Ait Bulgular

Katılımcıların *"*Sonsuz bir sayı kümesi hem alttan hem üstten sınırlı olabilir mi? Örneklerle açıklayınız." sorusuna vermiş olduğu cevaplar Tablo 5'te sunulmuştur.

Tablo 5

Beşinci Soruya İlişkin Kategoriler ve Açıklamalar

Kategoriler	Örnek Açıklamalar	Grup Açıklamaları	n	%
Hem alttan hem üstten sınırlı olabilir	-	Açıklama yok	11	%22
	(0,1) açık aralığı reel sayılar [2,3] kapalı aralığı reel sayılar	Örnek vererek açıklama	15	%29
Hem alttan hem üstten sınırlı olamaz	-	Açıklama yok	7	%14
	Olursa sonsuza gidemez. Sınırlı olursa sonlu küme olur. Bir taraftan sonsuza gitmelidir. Alttan sınırı olabilir ama üstten olamaz.	Gerekçeli ifadelerle açıklama	14	%27
Soruya herhangi bir yanıt vermeyenler	-	-	4	%8
Toplam	-	-	51	%100

Tablo 3 ya da Tablo 4'teki sonsuz bir küme için "alttan ya da üstten sınırlı olabilir" şeklinde düşünenlerin sayısı, Tablo 5'teki "hem alttan hem de üstten sınırlı olabilir" şeklinde düşünenlere göre bir azalma göstermiştir. Tablo 5'e göre, "sonsuz bir sayı kümesi hem alttan hem üstten sınırlı olabilir" cevabını verenlerin yüzdesiyle olamaz cevabını verenlerin yüzdesi arasındaki farkın çok olmadığı görülmektedir.

"Hem alttan hem üstten sınırlı olabilir" yorumunda bulunan 15 aday cevaplarına uygun aralık örnekleri vermiş, altı aday kapalı aralık örneği verirken dokuzu açık veya yarı açık aralık örneklerine yer vermiştir. Ancak bu kategorideki dört adayın aşağıda listelenen örnekleri dikkat çekicidir:

- $A=\{a \epsilon Z \mid 3 < a < 6\}$, $A=\{4,5\}$
- $\{1,2,3\}$
- $N^{+}, ab = \{10,11,\ldots,99\}$
- *Pozitif tek rakamlar kümesi, [1,9]*

Yukarıda verilen örnekler, sonsuz sayı kümeleri değil, sonlu sayı küme örnekleridir. Bu tip örnekleme yapan ÖA4, "pozitif tek rakamlar kümesi, [1,9]" sonlu küme örneği vererek açıklamada bulunmuştur. ÖA4 ile yapılan görüşme alıntısı aşağıdadır.

Araştırmacı: *Tek rakamlar olarak yazdığın örneği biraz daha düşünür müsün?*

ÖA4: *Elemanları 1 ile alttan, 9 ile üstten sınırlıdır.*

Araştırmacı: *Tek rakamlar sonsuz bir sayı kümesi midir?*

ÖA4: *... Hayır. Bir aralık belirtiyorsa sonlu küme olur demiştim, ama burada sonsuz sayı kümesi diyor yanlış bir örnek vermişim.*

Adaylar ile yapılan görüşmede, cevaplarını tekrar düşünmelerine yönelik sorulan sorular sonucunda, adaylar, verdikleri cevap ile örneklerinin uyumsuz olduğunun farkına varmışlardır.

Bunun gibi dikkat çeken diğer bir durum ise “hem alttan hem de üstten sınırlı olamaz” kategorisinde görülmektedir. Alttan ve üstten sınırlı olursa, “sonlu küme” olacağını ifade eden fakat örnek vermeyen (3 aday) adaylar mevcuttur. “Sonlu küme olur” yanıtını veren ancak örnek vermeyen ÖA3 ile yapılan görüşme alıntısı aşağıdadır.

Araştırmacı: *Alttan ve üstten sınırlı ise sonlu küme mi olmalıdır?*

ÖA3: *Başladığı ve bittiği yeri bilirsek yani sınırları bilirsek sonlu sayı kümesi olur diye düşünmüştüm.*

Araştırmacı: *Rasyonel sayılar kümesinde [2,3] aralığı için ne söylersin sonlu küme midir?*

ÖA3: *Hımm… Ama rasyonel sayı olduğunda bu aralıkta bir sürü sayı var, o zaman değil sonlu küme olmaz.*

Adayların, [a,b] formunda verilen örnek için kolay yorum yaparken (a,b) formunda verilen örneklerde alt sınırı ve üst sınırı (küme içinde aradıkları için) belirlemede zorluk yaşadıkları görülmektedir. Aşağıda “hem alttan hem üstten sınırlı olamaz” yorumunda bulunan bir aday ile yapılan görüşme alıntısına yer verilmektedir.

Araştırmacı: *[-1,1] aralığının alt ve üst sınırı ile ilgili ne dersin?*

ÖA11: *Alt sınır -1, üst sınırı +1’dir. Olabilir olarak cevabımı değiştirmek istiyorum…*

Araştırmacı: *(-1,1) aralığı için alt ve üst sınır nedir?*

ÖA11: *Sınırlı diyebiliriz ama sınırları belirtemeyiz.*

“Hem alttan hem üstten sınırlı olamaz.” şeklinde cevap veren bazı adayların açıklamalarında “alttan sınırlı olabilir ama üstten sınırlı olamaz” ifadesine de rastlanmıştır. Bu ifade ile sonsuz bir kümedeki sayı değerlerinin sürekli artış göstereceğini ve kümedeki tüm sayılardan küçük olan bir sayının olamayacağını düşündükleri anlaşılmaktadır. Bu düşünce sayı doğrusu üzerinde sağa doğru tek yönlü sonsuzluk şeklinde yorumlanabilir.

Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Bu araştırmada, matematik öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin sınırlılığını nasıl kavradıklarının incelenmesi amaçlanmıştır. Ayrıca, adayların sonsuz kümelerde alt sınır – en küçük eleman ve üst sınır – en büyük eleman kavramlarıyla ilgili kavrayışları da belirlenmek istenmiştir.

"Sonsuz kümenin en küçük/büyük elemanı var mıdır?" şeklinde sorulan 1. ve 2. soruda ikisine birden "yoktur" cevabını verenlerin örnek açıklamalarındaki "sonsuz çokluk", "sonsuz elemanı vardır" gibi ifadeler dikkat çekmektedir. Adayların, bir sayı kümesinin sonsuz çoklukta elemanı olduğunda o kümenin en küçük ve/ya en büyük elemanı olamayacağını düşündükleri anlaşılmaktadır. Yine 1. ve 2. soruya cevap verenlerin "başlangıcı yoktur", "belirleyemeyiz", "bitişini bilemeyiz" gibi gerekçeli açıklamaları da "iki taraflı sonsuz küme" kalıbına uygundur. Dolayısıyla, adaylarda, sonsuz çoklukta elemana sahip olan bir sayı kümesinin eleman değerlerinin sürekli artarak ve/ya azalarak sonlu bir sayıya ulaşamayacağı fikrinin daha baskın olduğu düşünülmektedir.

1. soruya "en küçük elemanı yoktur" kategorisinde örnek açıklama olarak "negatif tamsayılar" ve 2. soruya "en büyük elemanı yoktur" kategorisinde örnek açıklama olarak "pozitif tamsayılar" şeklinde verilen cevaplar gözetildiğinde, adayların, en küçük/büyük elemana sahip olmayan sadece bir sonsuz sayı kümesi örneği üzerinden, aşırı genelleme yaparak bütün sonsuz sayı kümelerinin en küçük/büyük elemana sahip olamayacağını düşündükleri tespit edilmiştir.

1. sorunun "bazı sonsuz sayı kümelerinin en küçük elemanı vardır" kategorisinde verilen açıklama "alttan sınırlı ise vardır" şeklindedir. Benzer olarak, 2. sorunun "bazı sonsuz sayı kümelerinde en büyük eleman vardır" kategorisinde verilen açıklama "üstten sınırlı ise vardır" şeklindedir. Bu kategorideki öğrencilerin, en küçük elemanla alt sınırı, en büyük elemanla üst sınırı eşleştirerek, birinin diğerini gerektirdiği düşüncesine sahip oldukları anlaşılmaktadır.

Tablo 1 ve 2'deki açıklamalar incelendiğinde, adaylar için sonsuz bir sayı kümesinin en küçük elemana sahip olabilmesi, olasılık olarak az da olsa mümkün iken, en büyük elemana sahip olabilmesi mümkün değil gibi görünmektedir. Benzer tutum, (3./4. sorular) "sonsuz bir sayı kümesi üstten/alttan sınırlı olabilir mi" soruna verilen cevaplarda da görülmektedir. Tablo 3 ve 4 bir arada incelendiğinde, adayların sonsuz sayı kümesinin üstten sınırlı olabilme ihtimalinin, alttan sınırlı olabilme ihtimaline göre daha az olduğu düşüncesine sahip oldukları söylenebilir. Ancak, 1. ve 2. sorulara verilen uygun cevapların 3. ve 4. sorulara verilen uygun cevaplardan oldukça fazla olması durumu da gözetildiğinde, adayların sonsuz bir sayı kümesinin en küçük/büyük elemana sahip olması fikrine çok uzak, ancak, alt/üst sınıra sahip olabilmesi fikrine oldukça yakın oldukları anlaşılmaktadır.

1. ve 2. soruda olduğu gibi, "sonsuz bir sayı kümesi alttan/üstten sınırlı olabilir mi?" şeklinde sorulan 3./4. soruların ikisine birden "olamaz" cevabını verenlerin örnek açıklamalarından, adayların, bir sayı kümesinin sonsuz çoklukta elemanı

olduğunda o kümenin alttan ve/ya üstten sınırlı olamayacağını düşündükleri anlaşılmaktadır. Bu sorulara "olabilir" cevabını veren adayların örneklemeleri $[a,+\infty)$, $(-\infty,b]$ tipindedir. Örneklerden anlaşılacağı üzere, adayların, bir kümenin alt veya üst sınırlarının, kümenin birer elemanı olması gerektiğini düşündükleri anlaşılmaktadır. Adaylarla yapılan görüşmede, yönlendirilmiş sorularla tekrar düşünmeleri sağlanan adaylardan bazıları, $(a,+\infty)$, $(-\infty,b)$ gibi aralıkları da alttan/üstten sınırlı küme örnekleri olarak verebilmişlerdir. 3./4. sorularda dikkat çeken bir durum da, alt sınır için (a,b] veya (a,b), üst sınır için [a,b) veya (a,b) tipinde örnekleme yapan aday sayısının çok az olmasıdır.

Son olarak, "sonsuz bir sayı kümesinin hem alttan hem üstten sınırlı olabilir mi?" şeklinde sorulan soruya "olamaz" cevabını verenlerin örnek açıklamalarındaki "olursa sonsuza gidemez", "bir taraftan sonsuza gitmeli" ya da "alttan sınırlı olabilir ama üstten olamaz" ifadeleri, 3. ve 4. sorularda elde edilen bulgularla uyumludur. "Olamaz" cevabını verenlerin yaptığı örnek açıklamalardan en dikkat çekici olanı "sınırlı olursa sonlu küme olur" ifadesidir. Bununla birlikte, soruya "olabilir" cevabını vermesine rağmen, cevaplarını sonlu küme örnekleriyle destekleyen (4 aday) adayların da olması oldukça ilginçtir. "Sonsuz bir sayı kümesi hem alttan hem de üstten sınırlı olabilir mi?" şeklinde sorulan 5. sorunun uygun örneklerle cevaplandırılamamasının yanı sıra 5. soruya yanıt vermeyenlerin yüzdeliğinin diğer sorulara göre oldukça yüksek oluşu da gözetildiğinde, adayların sonsuz kümelerin alttan ve üstten sınırlı olabilmesine yönelik fikir üretmede biraz çekinik oldukları ve zorlandıkları söylenebilir. Diğer taraftan, soruya "olabilir" doğru cevabını veren adayların (10 kişi), (a,b) açık aralıkları tipinde yaptıkları örneklendirmelerinden dolayı, sonsuz ve sınırlılık kavram ilişkileri arasında bir çelişki yaşamadıkları ve yeterli bir farkındalığa sahip oldukları anlaşılmaktadır.

Sonsuz kümelerin en küçük/büyük elemanları ve sınırlılığıyla ilgili sorulara verilmiş olan cevaplar analiz edildiğinde, adaylarının kavrama yönelik yanılgıları, kavrayışları doğrultusunda oluşturdukları yanlış fikirleri, genel olarak,

1. Sonsuz çoklukta elemana sahip bir kümenin

a) en küçük ve/ya en büyük elemanının olamayacağı

b) alttan ve/ya üstten sınırlı olamayacağı

2. a) en küçük ve/ya en büyük elemanı

   b) alt sınırı ve/ya üst sınırı olmayan bir sonsuz küme örneği üzerinden "aşırı genelleme" yaparak tüm sonsuz kümeler için en küçük ve/ya en büyük elemanın ya da alt ve/ya üst sınırın olmadığı

3. Sonsuz bir kümenin alt ve/ya üst sınırlarının, kümenin birer elemanı olması gerektiği
4. Sonsuz bir kümenin

a) alttan sınırlı ise en küçük

b) üstten sınırlı ise en büyük

elemanının olabileceği

5. Bir kümenin sonsuzluğunun, “iki taraflı ” ($(-\infty,+\infty)$ gibi) ya da “tek taraflı” ($(-\infty$,a) , (a,$+\infty$) gibi) olması gerektiği
6. Hem alttan hem üstten sınırlı bir kümenin sonsuz küme olamayacağı, sonlu küme olması gerektiği

şeklinde maddeler halinde özetlenebilir. Alanyazında da, sonsuz küme kavramına yönelik düşünsel engelleri ve kavram yanılgılarını inceleyen bazı çalışmalar mevcuttur.

Oflaz ve Polat’a (2022) göre, öğretmen adaylarının sonsuzluğu “sürekli devam eden sınırsız bir durum” olduğunu düşünmeleri, dile bağlı epistemolojik engele sahip olduklarının göstergesi olabileceği yönündedir. “Hem alttan hem üstten sınırlı olamaz, mutlaka bir tarafa doğru sonsuzluk genişlemelidir” düşüncesi, potansiyel sonsuzluk fikrinin hâkim olduğunu, sonsuzu bütün olarak ele alan gerçek sonsuzluk düşüncesinden uzak kalındığını göstermektedir. Adayların hem alttan hem üstten sınırlı bir kümenin sonsuz küme olamayacağı sonlu küme olması gerektiği yanılgısına sahip oldukları anlaşılmaktadır. Benzer şekilde, Tsamir (1999) adayların sonlu kümelerden sonsuz kümelere aşırı genelleme yaparak sonlu özellikleri sonsuz kümelere atfettiklerini belirtmiştir. Pala ve Narlı (2018b) ise adayların sonlu kümelerin bazı özelliklerini sonsuz kümelere genelleyerek çeşitli yanılgılara düştüklerini bulgulamıştır.

Bu çalışmada elde edilen bir kümenin sonsuzluğunun, “iki taraflı” ya da “tek taraflı” olması gerektiği düşüncesine paralel olarak Narlı ve Narlı (2012), 13-14 yaşlarında ilköğretim öğrencileriyle gerçekleştirdiği çalışmada sonsuzluğu, sınırsızlık kavramıyla açıklama eğiliminde olduklarını, sonsuzluğun başlangıcının olabileceğini ama sonunun olamayacağını düşündüklerini ortaya koymaktadır. Benzer şekilde, İşleyen (2013), araştırmaya katılan 72 ortaöğretim öğrencisinin yarıya yakının “sonsuzun sınırının olmayacağını” belirttiğini bulgulamıştır. Öğrencilerin genel algısının sonsuzu geçilemeyen ve belirli olmayan, düşünülebilecek en büyük miktar olduğunu belirtmektedir.

Öğretmen adaylarının sezgisel yaklaşımlarının bir ürünü olan sonsuz çoklukta elemana sahip bir kümenin alttan ve/ya üstten sınırlı olamayacağı düşüncesi ile örtüşen çalışmalar mevcuttur. Date-Huxtable vd. (2018), yaptıkları çalışmada adaylara sordukları “Gerçek olan herhangi bir şey sonsuz olabilir mi?' sorusuna verdikleri yanıtlardan biri “sınırdan yoksunluk”tur, örneğin sıfırdan başlayan tam sayılar kümesi sonsuzdur çünkü en büyük olan bir tam sayı yoktur. Baragli (2004) tez çalışmasında bulgulanan, ilkokul öğretmenlerinin sahip olduğu yanılgılardan biri de sonsuzluğun sınırsız olduğuna ve sonsuzluğun en az bir sınırdan yoksunluk anlamına geldiğine inanmasıdır. Jirotková ve Littler (2004) tarafından yapılan çalışmada, adaylara “düz çizgiyi tanımlayın” sorusu yöneltilmiştir, elde edilen ifadelerden bazıları şunlardır: “sonsuz bir nokta kümesidir”, “bitiş noktaları sonsuzdadır", "her iki yönde de sonsuza gider", "ne başlangıç ne de bitiş noktası vardır", "bir başlangıç ve sonla sınırlandırılamaz".

Bu araştırmadan elde edilen bulgular ile alanyazında tespit edilmiş bulgular benzerdir, uyumludur. Ancak, 1a, 2a, 3 ve 4 nolu maddelerinin alanyazınla eşleşmediği görülmektedir. Bunun sebebi, 1a ve 2a maddeleri için, alanyazında sonsuz bir kümenin en küçük ve/ya büyük elemanına yönelik bir çalışmaya rastlanmamış olmasıdır. Diğer taraftan, yapılan çalışmalarda sonsuzluk ya da sonsuz küme kavramları genel olarak "sınırlılık" ile ilişkilendirilmiş, bu sınırlılık "alt sınır" ya da "üst sınır" olarak detaylandırılmadığı için, alt/üst sınırla ilgili olan 3 ve 4 nolu maddeler alanyazınla eşleştirilememiştir. Eşleşmeyen maddelerle ilgili yapılacak çalışmaların alana katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Matematik derslerinde, lise ve üniversite düzeyinde yer alması beklenen sonsuzluk kavramının açık biçimde tartışılmadığı, doğrudan konu, kazanım ya da etkinlik olarak ele alınmadığı görülmektedir (Özmantar, Bingölbali ve Akkoç, 2008). Kavramsal bilgi verilmediğinden, sezgisel yaklaşım gösteren öğrencilerin formal bilgisi yapılandırılamamakta, bu da yanlış genelleme ve yanılgılara yol açmaktadır. Kim vd. (2005), öğrencilerin kavramla ilk karşılaşmalarının günlük dil ve öğretmenlerin matematiksel söylemleri aracılığıyla olduğunu belirtmiştir. Yanılgıları önlemek için lise programında ve lisans düzeyindeki temel derslerde kazanımlara yer verilebilir.

Ergene (2021), matematik öğretmen adayları ile yaptığı çalışmada, matematik öğretim programında sonsuzluk kavramının ancak sezgisel olarak yer aldığını ve öğretmen yetiştirme programında yeterince yer almadığını vurgulayarak adayların sonsuzluk kavramına yönelik bilgilerinin eksik olduğunu ve sonsuzluğun öğretim süreci hakkında yeterli bilgiye sahip olmadıklarını belirtmiştir. Soyut ve çelişkili yapısından dolayı sonsuzluk kavramı, sadece öğrenciler için değil, öğretmenler için de anlaşılması zor bir kavramdır. Öğretim programlarında üstü kapalı olarak geçilen sonsuzluk kavramının birçok matematik konusu ile ilişkili olması sebebiyle, kavramın öğretiminde rol oynayan öğretmenlerin matematiksel sonsuzluk kavrayışlarındaki zorlukları ve algıları üzerine yapılacak olan çalışmaların da ülkemizdeki matematik eğitimine ve öğretmen eğitimine katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Bu çalışmaların analizi sayesinde, öğretim ve öğretmen yetiştirme programlarında yapılacak planlama ile sonsuzluk kavramına yönelik etkili bir eğitim verilebilir.

Öğretmen yetiştirme programlarındaki düzenlemelerle, öğretmenlerin sonsuzluk kavramına dair formal bilgilerini kullanarak öğretimde daha aktif rol almaları ve matematiksel söylemlerinde farkındalık kazanmaları sağlanabilir. Alan bilgisine sahip öğretmen, öğrencilerin sezgisel yaklaşımlarından doğabilecek yanılgıları önleyebilir. Derslerde sonsuzluk kavramına ilişkin problem çözme, araştırma, paradokslar ve tartışmalar içeren etkinliklerle merak uyandıran öğrenme ortamları sunulabilir. Araştırmanın pekiştirilmesi için ayrıca, çalışma grubu farklı üniversitelerdeki adaylar, öğretmenler ve lise öğrencileriyle genişletilerek tekrarlanabilir.

References

Aşık, S. (2010). *Tanımsızlık ve belirsizlik kavramlarının öğretmen ve öğretmen adaylarının görüş ve performansları bağlamında Incelenmesi: 0, 1 ve ∞ ile yapılan işlemler [An Investıgatıon Teachers And Teachers Candıdates' Thoughts And Performances Of Undefined And Indetermınate Concepts: Operatıons Wıth 0, 1 And ∞]* (Thesis No: 279904) [Master's thesis, Marmara University]. https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/giris.jsp

Aztekin, S. (2008). *Farklı yaş gruplarındaki öğrencilerde yapılanmış sonsuzluk kavramlarının araştırılması [Investigating of infinity concepts constructed in different age groups of students]* (Thesis No: 219685) (Doctoral dissertation, Gazi University). https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/giris.jsp

Baragli, S. (2004). *Teachers' convictions on mathematıcal infinity* (Doctoral dissertation, Unıverzıta Komenského Fakulta Matematıky, Fyzıky A Informatıky).

Belmonte, J. L., & Sierra, M. (2011). Modelos intuitivos del infinito y patrones de evolución nivelar. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *14*(2), 139-171. https://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-24362011000200002&script=sci_arttext

Bolzano, B. (1950). *Paradoxes of the infinite* [F. Prihonsky, Trans.] [Introduction by D. Steele]. Routledge and Kegan Paul Ltd. [Original work published 1851].

Bozkuş, F., Uçar, Z. T. ve Çetin, İ. (2015). Ortaokul öğrencilerinin sonsuzluğu kavrayışları [Middle School Students' Conceptions of Infinity**].** *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, *6*(3), 506-531. https://doi.org/10.16949/turcomat.53890

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2000). Research methods in education, (5th edition). London: Routledge.

Çelik, D., ve Akşan, E. (2013). Matematik öğretmeni adaylarının sonsuzluk, belirsizlik ve tanımsızlık kavramlarına ilişkin anlamaları [Preservice Mathematics Teachers' Perceptions of Infinity, Indeterminate and Undefined]. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi, 7*(1), 166-190. https://doi.org/10.12973/nefmed158

Çevik, A. (2019). *Matematik felsefesi ve matematiksel mantık [Philosophy of mathematics and mathematical logic]*. Nesin Matematik Köyü Yayıncılık, İstanbul.

Creswell, J. W. (2017). Araştırma deseni: Nitel, nicel ve karma yöntem yaklaşımları [Research design: Qualitative, quantitative and mixed methods approaches]. *Eğiten Kitap*.

Date-Huxtable, E., Cavanagh, M., Coady, C. & Easey, M. (2018). Conceptualisations of infinity by primary pre-service teachers. *Mathematics Education Research Journal*, *30*, 545-567. https://doi.org/10.1007/s13394-018-0243-9

Doğan, M., & Ünan, Z. (2011). Sonlu ve sayılabilir sonsuz kümeler ve sayılamayan sonsuz kümelerin bir modellemesi [Finite set and countable infinite sets and uncountable infinite sets modelling]. *Education Sciences*, *6*(2), 1938-1950. https://dergipark.org.tr/tr/pub/nwsaedu/issue/19820/212111

Dubinsky, E., Weller, K., Mcdonald, M. A. ve Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, *58*, 335-359. https://doi.org/10.1007/s10649-005-2531-z

Ergene, Ö. (2021). Öğretmen adayları gözünden sonsuzluk kavramı ve matematik dersi öğretim programı [The concept of ınfinity and mathematics lesson curriculum from the perspectives of pre-service teachers]. *Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 18(2)*, 123-151. https://doi.org/10.33711/yyuefd.998263

Ferreirós, J. (2016). The early development of set theory. Stanford Encyclopedia of Philosophy. https://seop.illc.uva.nl/entries/settheory-early/ adresinden erişilmiştir.

Fischbein, E. (1979). Intuition and mathematical education. *MILABLE FROM*, *33*.

Güven, B. ve Karataş, İ. (2004). Sonsuz kümelerin karşılaştırılması: Öğrencilerin kullandıkları yöntemler [Comparison of infinite sets: Methods used by students]. *Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Dergisi 15*, 65-73. http://www.befjournal.com.tr/index.php/dergi/index

İşleyen, T. (2016). Ortaöğretim öğrencilerinin sonsuzluk algıları [High school students' perceptıons of infinity]. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 21*(3),1235-1252. https://dergipark.org.tr/tr/pub/kefdergi/issue/22605/241573#article_cite

Jirotková, D. & Littler, G. (2004). Student's concept of ınfinity in the context of a simple geometrical construct. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *3*, 125-132. https://eric.ed.gov/?id=ED500996

Karaçay, T. (2014). Soyut matematik: akıl yürütmenin başlangıcı [Abstract mathematics: the beginning of reasoning]. Seçkin Yayıncılık, Ağustos 2014, Ankara.

Kim, D. J., Sfard, A., & Ferrini-Mundy, J. (2005). Students' colloquial and mathematical discourses on ınfinity and limit. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3*, 201-208. https://eric.ed.gov/?id=ED496910

Kolar, V. M., & Cadez, T. H. (2012). Analysis of factors influencing the understanding of the concept of infinity. *Educational Studies in Mathematics, 80*, 389–412. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9357-7

Mamolo, A. & Zazkis, R. (2008). Paradoxes as a window to infinity. *Research in Mathematics Education*, *10*(2), 167-182. https://doi.org/10.1080/14794800802233696

Mancosu, P. (2016). *Abstraction and infinity*. Oxford University Press.

Miles, M, B., and Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded Sourcebook.* (2nd ed). Thousand Oaks, CA: Sage. Monaghan

Moore, A. W. (1991). The infinite. Routledge.

Narli, S. & Baser, N. E. (2008). Cantorian set theory and teaching prospective teachers. *Online Submission, 3*(2). https://eric.ed.gov/?id=ED506476

Narlı, S., & Narlı, P. (2012). Sonsuz sayı kümeleri ışığında ilköğretim öğrencilerinin sonsuzluk algı ve yanılgılarının belirlenmesi [Determination of primary school students' perceptions and misconceptions of infinity using infinite number sets]. *Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, *(33)*, 122-133. https://dergipark.org.tr/en/pub/deubefd/issue/25117/265203

Nesin, A. (2019). *Matematik ve sonsuz [Mathematics and infinity]*. Nesin Yayıncılık.

Oflaz, G. ve Polat, K. (2022). Sonsuzluk, tanımsızlık ve belirsizlik kavramlarına ilişkin epistemolojik engellerinin belirlenmesi [Determining the epistemological obstacles regarding the concepts of infinity, undefined and uncertainty]. *Cumhuriyet Uluslararası Eğitim Dergisi*, *11*(2), 301-320. https://doi.org/10.30703/cije.993425

Özmantar, M. F., Bingölbali, E., ve Akkoç, H. (2008). *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri [Mathematical misconceptions and solutions]*. Ankara: Pegem Akademi.

Pala, O. (2016). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliği konusundaki kanıt imajlarının incelenmesi [An Investigation of Proof Images of Prospective Elementary Mathematics Teachers About Equivalence of Infinity Sets]* (Thesis No: 430724) (Master's thesis, Dokuz Eylul University). https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/giris.jsp

Pala, O. ve Narlı, S. (2018a). *Sonsuzluğun tarihsel gelişimi ve öğretimi üzerine [The historical development and teaching of infinity]*. Apsistek, Ekim 2018.

Pala, O., ve Narlı, S. (2018b). Matematik öğretmeni adaylarının sonsuz kümelerin denkliği ile ilgili ispatlama yaklaşımları ve yaşadıkları güçlükler [Prospective mathematics teachers' proving approaches and difficulties related to equivalence of ınfinity sets]. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *9*(3), 449-475. https://doi.org/10.16949/turkbilmat.414818

Singer, M., & Voica, C. (2003, September). Perception of infinity: does it really help in problem solving. In *The Mathematics Education into the 21st Century Project Proceedings of the International Conference*. https://sites.unipa.it/grim/21_project/21_brno03_Singer.pdf

Singer, F. M., & Voica, C. (2008). Between perception and intuition: Learning about infinity. *The Journal of Mathematical Behavior*, *27*(3), 188-205. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2008.06.001

Tirosh, D., & Tsamir, P. (1996). The role of representations in students' intuitive thinking about infinity. *International journal of mathematical education in science and technology*, *27*(1), 33-40. https://doi.org/10.1080/0020739960270105

Tsamir, P. (1999). The transition from comparison of finite to the comparison of infinite sets: Teaching prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, *38*(1), 209-234. https://doi.org/10.1023/A:1003514208428

Waldegg, G. (1996). Identificación de obstáculos epistemológicos en el estudio del infinito actual. *Revista Mexicana de Investigación Educativa 1* (1), 107–122. https://www.redalyc.org/pdf/140/14000108.pdf

Yin, R. K. (2009). *Case study research: Design and methods* (Vol. 5). sage.

Ethical and Author Declarations | Etik ve Yazar Beyanları

Graduate Thesis Information (if necessary)

This study was derived from the doctoral dissertation titled "An Investigation of the Change in Elementary Mathematics Teacher Candidates' Perceptions of the Concept of Infinity in the Context of Paradoxes", which is being conducted by Tuba Sevyut under the supervision of Prof. Dr. Yeter Şahiner.

Lisansüstü Tez Bilgileri (gerekliyse)

Bu çalışma, Tuba Sevyurt'un Prof. Dr. Yeter Şahiner danışmanlığında yürütülmekte olan "İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Sonsuzluk Kavramına İlişkin Algılarındaki Değişimin Paradokslar Bağlamında İncelenmesi" başlıklı doktora tezinden türetilmiştir.

Authors' Contributions

The first author conducted the research, collected the data, and drafted the initial version of the manuscript. The second author contributed to the development of the theoretical framework and the writing of the findings section, supervised the study, and provided critical feedback. Both authors contributed to the final version of the manuscript.

Yazarların Katkı Düzeyleri

Bu çalışmada birinci yazar araştırmayı yürütmüş, verileri toplamış ve makalenin ilk taslağını oluşturmuştur. İkinci yazar, çalışmanın kuramsal çerçevesine ve bulgular bölümünün yazımına katkıda bulunmuş, ayrıca çalışmayı denetleyerek eleştirel geri bildirim sağlamıştır. Her iki yazar da makalenin son hâline katkıda bulunmuştur.

Conflict of Interest

The authors declare that they have no competing interests relevant to the content of this article.

Çıkar Çatışması Beyanı

Yazarların, bu makalenin içeriğiyle ilgili beyan edilecek herhangi bir çıkar çatışması bulunmamaktadır.

Ethical Approve

The planning and implementation of this research were approved by the Ethics Committee of the Senate of Hacettepe University with the decision dated 21.03.2023 and numbered E-35853172-399-00002757048.

Etik Onay

Bu araştırmanın planlanması ve yürütülmesi, Hacettepe Üniversitesi Senatosu Etik Komisyonu'nun 21.03.2023 tarihli ve E-35853172-399-00002757048 sayılı kararıyla uygun bulunmuştur.

Use of Artificial Intelligence

No artificial intelligence tools were used during the writing, analysis, or data processing stages of the study.

Yapay Zeka Kullanımı

Araştırmanın yazım, analiz ve veri işleme aşamalarında herhangi bir yapay zekâ aracı kullanılmamıştır.

This study has been evaluated under double-blind peer review and verified to be free of plagiarism using iThenticate software.
Bu çalışma, çift taraflı kör hakemlik kapsamında değerlendirilmiş ve iThenticate yazılımı kullanılarak intihal içermediği teyit edilmiştir.

Ethical disclosure | Etik bildirim: ebfd@ankara.edu.tr