

Bazı Kongrüans Alt Grupların Normalliyenlerinin Ürettiği Devreler ve Yollar

Tuncay KÖROĞLU¹

¹ Matematik, Fen Fakültesi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon, Türkiye

✉: tkor@ktu.edu.tr  [0000-0002-1341-1074](https://orcid.org/0000-0002-1341-1074)

Geliş (Received): 07.03.2025

Düzeltilme (Revision): 07.05.2025.

Kabul (Accepted): 22.06.2025

ÖZ

Bu çalışmanın amacı; Modüler grubun bazı kongrüans alt gruplarının $PSL(2, \mathbb{R})$ 'deki normalliyenlerinin genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi üzerindeki hareketinden elde edilen sonlu devreleri ve sonsuz uzunluklu yolları incelemektir. Çalışmada, Atkin-Lehner tipi dönüşümler ele alınarak, özellikle bu dönüşümlerin oluşturduğu devreler ve yollar incelenmiştir. Bunu yaparken kullandığımız yöntem, belirli matris çarpımları ile bir yörünge üzerinde elde edilen alt yörüngesel grafların sonlu uzunluklu devreler ve sonsuz uzunluklu yollar oluşturup oluşturmadığını analiz etmektir. Ayrıca bu devrelerin ve yolların eliptik ve hiperbolik elemanlarla olan ilişkisini ortaya koyduk. Çalışmada, belirli bir p asal sayısı seçilerek, farklı durumlar için modüler grubun alt grupları oluşturuldu ve bu alt grupların genişletilmiş rasyonel sayılar üzerindeki hareketi incelendi.

Anahtar Kelimeler: Modüler Grup, Devreler, Yollar.

Circuits and Paths Generated by the Normalizers of Some Congruence Subgroups

ABSTRACT

The aim of this study is to investigate the finite circuits and infinitely long paths obtained by the action of the normalisers of certain congruence subgroups of the modular group in $PSL(2, \mathbb{R})$ on the extended set of rational numbers. In this study, Atkin-Lehner type transformations are considered, and in particular, the circuits and paths formed by these transformations are analysed. The method used involves analysing whether the suborbital graphs obtained from certain matrix multiplications along an orbit form finite-length circuits or infinite-length paths. Furthermore, the relationship between these circuits and elliptic elements is established, as well as the relationship between these paths and hyperbolic elements. In this study, a particular prime number p is chosen and modular subgroup structures are constructed for different cases. The action of these subgroups on the extended set of rational numbers is then studied.

Keywords: Modular Group, Circuits, Paths.

GİRİŞ

$PSL(2, \mathbb{R})$ ile; reel katsayılı, determinanı $ad - bc = 1$ olan $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ biçimindeki üst yarı düzlemin konform otomorfizmalarının grubu gösterilsin. Bu grubun, tamsayı katsayılı dönüşümleri göz önüne alındığında, Matematikte çok önemli bir yeri olan $PSL(2, \mathbb{Z})$ modüler grubu elde edilir. Bu dönüşümler bileşke işlemine göre bir gruptur ve her bir elemanı $\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matris çiftleriyle eşleştirilebilir. Bir dönüşümün iki farklı matrisle eşleşmesi karmaşasını ortadan kaldıracak biçimde $SL(2, \mathbb{Z}) = PSL(2, \mathbb{Z}) / \{\pm I\}$ bölüm grubunu göz önüne alacağız. $SL(2, \mathbb{Z})$ modüler grubunu kısaca Γ ile göstereceğiz. Böylece, fonksiyonlardaki bileşke işleminin yerine nispeten daha kolay olan matris çarpımı yapılabilir. Γ modüler grubunun alt grupları matematiğin çok farklı alanlarıyla ilgili çalışmalarda karşımıza çıkarlar. Özellikle sayılar teorisi ile ilgi problemlerin ele alınmasında oldukça önemli bir yerleri vardır. Örneğin Fermat'ın Son Teoremi'nin Andrew Willes tarafından

1994 yılında yapılan kanıtında, modüler gruplarla ilişkili olarak modüler formlar önemli rol oynar. Eliptik eğrilerin aritmetiği, eliptik integral, kuadratik formlar ve eliptik modüler fonksiyonlar teorilerindeki önemi nedeniyle Γ modüler grubunun kongrüans alt grupları olan $\Gamma(n)$, $\Gamma_0(n)$, $\Gamma^0(n)$, $\Gamma_1(n)$ grupları üzerinde çok sayıda çalışma yapıldı. Bizim çalışmamızda ise bu kongrüans alt gruplardan $\Gamma_0(n)$ grubu ana öğemiz olacaktır. $n > 1$ pozitif bir tamsayı olmak üzere $\Gamma_0(n)$ grubu,

$$\Gamma_0(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : c \equiv 0 \pmod{n} \right\} \quad (1)$$

biçiminde tanımlanır. Ayrıca çalışmada $\Gamma_0(n)$ alt grubunun $PSL(2, \mathbb{R})$ grubundaki normalliyen alt grubunu $N_0(n)$ ile göstereceğiz. Newman, $N_0(n)$ ile ilgili ilk sonuçları verdi [1]. Bu sonuçlar matematiğin çeşitli alanlarına önemli katkılar sağlamıştır. Bu katkılardan belkide en önemlisi; “Monster Grubu” olarak bilinen basit grupların keşfi ve çözümlenmesi üzerine olan katkısıdır. Dahası, $N_0(n)$ normalliyenini, $\Gamma_0(n)$ ile ilişkili

$X_0(n)$ modüler eğrilerinin üzerindeki Weierstrass noktalarının bulunmasında önemli bir role sahiptir [2]. Bu çalışmada ise, sonraki bölümde detaylarını vereceğimiz ve [3] çalışmasında grup yapıları verilen bazı özel kongrüans alt grupların $PSL_2(\mathbb{R})$ deki normalliyenleri ele alındı. Bu normalliyenlerin, genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi üzerindeki hareketinden doğan sayı dizileri ve alt yörüngesel graflar incelendi. Bu sayı dizileri ile dönüşümlerin tipleri arasında ilişkiler ortaya kondu. Ayrıca yine bu hareketin ürettiği devreler ve yollar incelendi.

MATERYAL ve YÖNTEM

Alt yörüngesel grafların incelenmesi sonucu doğan sonlu uzunluklu devreler ve bu devrelerin uzunlukları ile üretici eliptik elemanların mertebeleri arasındaki ilişki daha önceki bazı araştırmalarda ele alındı [4]. Yine alt yörüngesel graflar üzerine yapılan başka çalışmalarda ise sonsuz uzunluklu yolların ürettiği sayı dizilerinin, Fibonacci ve Lucas sayı dizileriyle olan ilişkileri araştırıldı [5,6]. Bu çalışmada da benzer yöntemler kullanılarak alt yörüngesel graf fikrinden yola çıkarak belirli özelliklere sahip dönüşümlerin ürettiği devreler ve sonsuz uzunluklu yollar incelendi. Tüm semboller tamsayı olmak üzere, [7]'de $N_0(n)$ normalliyen alt grubunun elemanları aşağıdaki gibi $GL_2^+(\mathbb{Q})$ grubunun matrisleriyle verilmiştir:

$$\begin{pmatrix} ae & \frac{b}{h} \\ \frac{cn}{h} & de \end{pmatrix} \quad (2)$$

Burada, h ile; $h^2|(n, 24)$ özelliğini sağlayan tamsayıyı ($(n, 24)$ gösterimi ile n ile e nin en büyük ortak bölenini gösterir) e sembolü ile de; $\frac{n}{h^2}$ tamsayısının bir tam böleni (Hall Divisor) olan ve aynı zamanda matrisin determinantı olan $e = ade^2 - bc \frac{n}{h^2} > 0$ sayısı gösterilmiştir (e tamsayısının $\frac{n}{h^2}$ tamsayısını tam bölmesi demek; $\frac{n}{eh^2}$ ile $\frac{n}{h^2}$ tamsayılarının aralarında asal olması anlamına gelmektedir ve bu durum $e || \frac{n}{h^2}$ ile gösterilir). Eğer, bir t tamsayısının asal çarpanlara ayrılışı; $t = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ biçiminde ise t tamsayısının tam olarak 2^r tane tam böleni bulunur. Bir t tamsayısının tam bölenlerinin kümesi $TB(t)$ ile gösterilsin. $TB(t)$ 'nin iki elemanı u ve v olmak üzere; $u * v := \frac{u \cdot v}{(u, v)^2}$ biçiminde tanımlanan ikili işleme göre $TB(t)$ bir gruptur ve C_2^r grubuna izomorftur. Burada r sayısı, t sayısının farklı asal çarpanlarının sayısıdır [8].

İm ve arkadaşları [3] çalışmalarında; Denklem 3 ile verilen, modüler grubun iyi bilinen kongrüans alt gruplarından, Denklem 1 ile verilen $\Gamma_0(n)$ ile

$$\Gamma_1(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{n} \right\}$$

alt grubu arasında kalan $\Gamma_\Delta(n)$ kongrüans alt grubunun $PSL_2(\mathbb{R})$ 'deki normalliyeninin grup yapısını özetle aşağıdaki gibi verdiler:

$$\Gamma_\Delta(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n) \mid a \in \Delta \right\} \quad (3)$$

Burada, Δ ile $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ nin herhangi bir alt grubu gösterilmiştir ve $-1 \in \Delta$ kabul edilmiştir.

Eğer, $\Delta = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ ise $\Gamma_\Delta(n) = \Gamma_0(n)$ olur.

Eğer, $\Delta = \{\pm 1\}$ ise $\Gamma_\Delta(n) = \pm \Gamma_1(n)$ olur.

Diğer hallerde ise, $\Gamma_1(n) \not\subseteq \Gamma_\Delta(n) \not\subseteq \Gamma_0(n)$ ilişkisi geçerli olacaktır. Ayrıca çalışma boyunca, $\Gamma_\Delta(n)$ nin $PSL_2(\mathbb{R})$ deki normalliyeni $N_\Delta(n)$ ile gösterilecektir. Tüm semboller tamsayı olmak üzere,

$$M = \begin{pmatrix} Qx & \frac{y}{h} \\ n \frac{z}{h} & Qw \end{pmatrix} \in PGL_2^+(\mathbb{Q}),$$

$Q || \frac{n}{h^2}$, $\det(M) = Q$ biçimindeki M matrisleri $N_\Delta(n)$ grubundadır [3].

Eğer $h = 1$ alınırsa M 'yi A_Q ile göstereceğiz. Yani,

$$A_Q = \begin{pmatrix} Qx & y \\ nz & Qw \end{pmatrix}$$

biçiminde olup, bu tipli tüm elemanlar $\Gamma_0(n)$ 'nin normalliyenindedir. Bu elemanlara özel olarak Atkin-Lehner involusyonu adı verilir ve bu elemanların oluşturduğu gruba da Atkin-Lehner grubu adı verilir. Çok basit bir gözlemle, (2) biçimli elemanların $N_\Delta(n)$ grubunda olduğu açıktır. Aslında burada bahsedilen tüm gruplar, genel olarak Möbiüs dönüşümleri olarak bilinen $PGL_2(\mathbb{C})$ grubunun alt gruplarıdır. Bu grubun genişletilmiş kompleks sayılar kümesi üzerindeki hareketi göz önüne alınarak, elemanlarının sabit noktalarına göre sınıflandırmasını bu çalışmaya alt yapı olacak biçimde bir özet halinde verelim. Bunun için,

$$M = \begin{pmatrix} Qx & \frac{y}{h} \\ n \frac{z}{h} & Qw \end{pmatrix} \in PGL_2^+(\mathbb{Q})$$

matris gösterimi ile temsil edilen dönüşümler üzerinden aşağıdaki gibi bir sınıflandırma yeterli olacaktır. $\tau(M)$ ile M matrisinin normalleştirilmiş formunun izinin karesini gösterebiliriz. Yani, $\tau(M) := Q(x + w)^2$ olsun. Bu takdirde;

- M paraboliktir ancak ve ancak $\tau(M) = 4$,
- M eliptiktir ancak ve ancak $\tau(M) \in [0, 4)$,
- M hiperboliktir ancak ve ancak $\tau(M) > 4$.

Bu sınıflandırma ile; eğer M parabolik bir dönüşüm ise; genişletilmiş rasyonel sayılar kümesine düşen bir sabit noktası, eliptik bir dönüşüm ise; kompleks eşlenik iki sabit noktası ve hiperbolik bir dönüşümse; reel iki sabit noktası vardır [9].

YAPILAN ÇALIŞMALAR ve BULGULAR

$$\begin{pmatrix} Qx & y \\ nz & Qw \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} Qxr + ys \\ nzs + Qws \end{pmatrix} \quad (4)$$

Denklem 4 ile verilen matris çarpımı ile Atkin-Lehner grubu, $\mathbb{Q} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ genişletilmiş rasyonel sayılar

kümesi üzerinde hareket eder. [10] çalışmasından farklı olarak biz burada; [3] çalışmasından ilham alarak, matrisin birinci girdisi olan x üzerinde kısıtlamalar yaptık. Ayrıca burada $n = p \neq 2$ tek asal sayı olarak seçilmiştir. Böylece, $Q = 1$ veya $Q = p$ olmak üzere $\Delta = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* = \{1, 2, \dots, p-1\}$ ve $\Delta = \{1, p-1\}$ alt grupları göz önüne alınmıştır. Bu durumları; aşağıdaki gibi dört alt başlıkta inceledik.

i) $Q = 1, \Delta = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* = \{1, 2, \dots, p-1\}$ Durumu:

Bu durumda, Denklem 4 ile verilen hareket aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{pmatrix} x & y \\ pz & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} xr + ys \\ pZR + ws \end{pmatrix} \quad (5)$$

Şimdi, bu hareket ile $\infty = \frac{1}{0}$ elemanının yörüngesini inceleyelim. Bu yörünge aşağıdaki gibi elde edilebilir ve genel terimini bulmak önemli bir problem olarak düşünülebilir.

$$\begin{pmatrix} x & y \\ pz & w \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ pz \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} pyz + x^2 \\ p(xz + zw) \end{pmatrix} \rightarrow \dots \quad (6)$$

Teorem 1. $E := \begin{pmatrix} x & y \\ pz & w \end{pmatrix}$ eliptik bir dönüşüm olmak üzere aşağıdaki durumlar söz konusudur:

a) $x + w = 0$ ise $p \equiv 1 \pmod{4}$ dir,

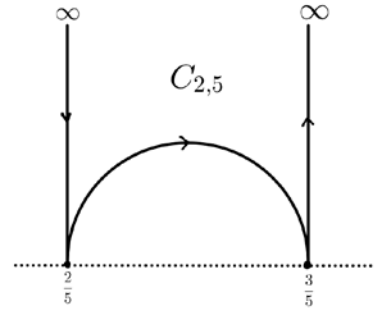
b) $x + w = \pm 1$ ise $\left(\frac{\mp(\frac{p+1}{2})-1}{p} \right) = 1$ eşitliği sağlanır,

burada $\left(\frac{a}{p} \right)$ Legendre sembolüdür. Yani; $\left(\frac{a}{p} \right) = 1$ olması, $x^2 \equiv a \pmod{p}$ kongrüans denkleminin çözümünün mevcut olması demektir.

İspat: a) $\begin{pmatrix} x & y \\ pz & w \end{pmatrix}$ dönüşümünün determinanı; $xw - pyz = 1$ olduğundan, $xw \equiv 1 \pmod{p}$ denkliği elde edilir. E dönüşümü eliptik olduğundan, $|x + w| \leq 1$ şartını sağlayan dönüşümleri göz önüne alacağız. İlk olarak, $x + w = 0$ için, $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ kongrüans denkleminin çözümünün olması için gerek ve yeter koşul, $p \equiv 1 \pmod{4}$ denkliği sağlanır (Kenneth, 2011). b) İkinci olarak, $|x + w| = 1$ için; yine E 'nin determinanı göz önüne alındığında istenen kolay bir şekilde elde edilir. ■

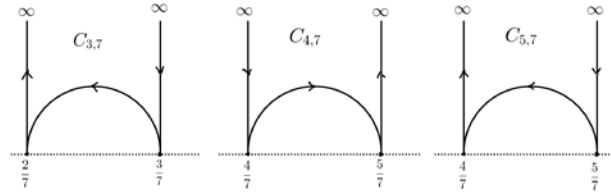
Bu teoremin her iki durumunu da aşağıdaki örneklerle açıklayabiliriz.

Örnek 1. a) $p = 5$ için $e_{2,5} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ eliptik dönüşümü elde edilebilir. Bu dönüşümün ürettiği devreyi ($C_{2,5}$) üst yarı düzlem modelinin jeodezikleri yardımıyla aşağıdaki Şekil 1'deki gibi gösterebiliriz:



Şekil 1. $\infty \rightarrow \frac{2}{5} \rightarrow \frac{3}{5} \rightarrow \infty$ Devresi.

b) $p = 7, z = 1$ alındığında $e_{3,7} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$, $e_{4,7} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$ ve $e_{5,7} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$ eliptik dönüşümleriyle aşağıdaki Şekil 2 ile gösterilen $c_{3,7}$, $c_{4,7}$, $c_{5,7}$ devreleri elde edilir:



Şekil 2. $C_{3,7}$, $C_{4,7}$, $C_{5,7}$ Devreleri.

ii) $Q = p, \Delta = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* = \{1, 2, \dots, p-1\}$ Durumu:

Bu durumda, Denklem 4 ile verilen hareket aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{pmatrix} px & y \\ pz & pw \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} pXr + ys \\ pZr + pws \end{pmatrix} \quad (7)$$

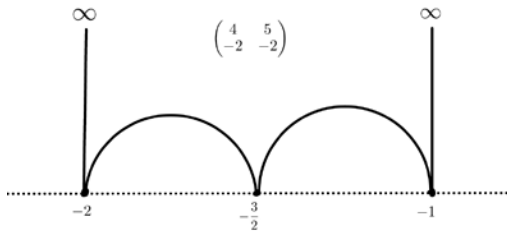
Bu hareket ile $\infty = \frac{1}{0}$ elemanının yörüngesi hesaplandığında elde edilen köşe dizisinin ilk birkaç terimi Denklem 8 ile gösterilebilir.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} yz + px^2 \\ p(xz + zw) \end{pmatrix} \rightarrow \dots \quad (8)$$

Ayrıca bu başlıkta ele aldığımızda, eliptik dönüşümler için sadece, $Q = 2$ veya $Q = 3$ durumları söz konusudur.

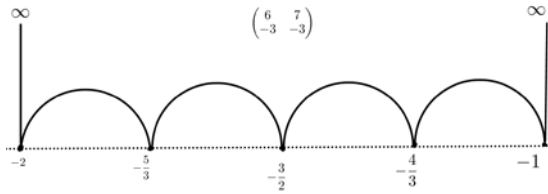
Çünkü; $\begin{pmatrix} Qx & y \\ nz & Qw \end{pmatrix}$ dönüşümünün eliptik olması için $|x + w|\sqrt{Q} < 2$ eşitsizliği sağlanmalıdır. Böylece, $Q = 2$ için dördüncü mertebe, $Q = 3$ için altıncı mertebe eliptik elemanlar bulunabilir [8]. Bunu aşağıdaki örneklerle açıklayabiliriz.

Örnek 2. $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ eliptik dönüşümü için uzunluğu 4 olan ve Şekil 3 ile üst yarı düzlemde gösterilen, $\infty \rightarrow -2 \rightarrow -\frac{3}{2} \rightarrow -1 \rightarrow \infty$ devresi elde edilir.



Şekil 3. $\infty \rightarrow -2 \rightarrow -\frac{3}{2} \rightarrow -1 \rightarrow \infty$ Devresi.

$\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ eliptik dönüşümü için ise uzunluğu 6 olan ve Şekil 4 ile üst yarı düzlemde gösterilen, $\infty \rightarrow -2 \rightarrow -\frac{5}{3} \rightarrow -\frac{3}{2} \rightarrow -\frac{4}{3} \rightarrow -1 \rightarrow \infty$ devresi elde edilir.



Şekil 4. $\infty \rightarrow -2 \rightarrow -\frac{5}{3} \rightarrow -\frac{3}{2} \rightarrow -\frac{4}{3} \rightarrow -1 \rightarrow \infty$ Devresi.

Not 1. $|x + w|\sqrt{Q} \geq 2$ eşitsizliğinin sağlanması durumunda parabolik ve hiperbolik dönüşümler söz konusu olacaktır ve bu durumda; sonsuz uzunluklu devreler elde edilecektir. Ayrıca, $n = p \geq 3$ için $h = 1$ olmak zorunda olacağından $n = 2$ durumunu göz önüne almayacağız. Başka bir ifadeyle n doğal sayısını tek asal sayılardan seçeceğiz.

iii) $Q = 1, \Delta = \{1, p - 1\}$ Durumu:

Bu durumda Denklem 4 ile verilen hareket Denklem 9'daki gibi olur:

$$\begin{pmatrix} px + 1 & y \\ pz & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} pxr + r + ys \\ pzs + ws \end{pmatrix} \quad (9)$$

Bu hareket ile; $\infty = \frac{1}{0}$, elemanın yörüngesi Denklem 10 ve Denklem 11'deki gibi elde edilir:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} px + 1 \\ pz \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} pyz + (px + 1)^2 \\ pz(px + w + 1) \end{pmatrix} \rightarrow \dots \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} px - 1 \\ pz \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} pyz + (px - 1)^2 \\ pz(px + w - 1) \end{pmatrix} \rightarrow \dots \quad (11)$$

Bu durumda, eliptik dönüşümleri belirlemek için Teorem 1 geçerli olur.

Örnek 3. $p > 2$ bir asal olmak üzere, $H_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p & p + 1 \end{pmatrix}$ hiperbolik ($\tau(H_p) = p + 2 > 2$) matrisine karşılık gelen

$z \rightarrow \frac{z+1}{pz+(p+1)}$ dönüşümünü göz önüne alalım. Bu dönüşümün genişletilmiş rasyonel sayılar ($\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$) üzerindeki hareketi ile $\infty = \frac{1}{0}$ elemanın yörüngesi aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\infty \rightarrow \frac{1}{p} \rightarrow \frac{p+1}{p(p+2)} \rightarrow \frac{p^2+3p+1}{p(p+1)(p+3)} \rightarrow \dots \quad (12)$$

Burada eliptik dönüşümlerin aksine sonsuz uzunluklu bir yol elde edilir. Ayrıca bu dönüşümün sabit noktaları;

$$\frac{z+1}{pz+p+1} = z \text{ denkleminin kökleri olan,}$$

$$z_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2+4p}}{2p}$$

reel sayıları olarak elde edilir. Denklem 12 ile; ilk dört terimi verilen $\{H_p^k(\infty)\}$ dizisi, bu sabit noktalardan birine yakınsar. Bu sabit noktalar ile ilgili olarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 1. Yukarıdaki gibi tanımlanan dönüşümün sabit noktaları olan $z_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2+4p}}{2p}$ ve $z_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2+4p}}{2p}$ sayıları irrasyoneldir.

İspat. p asal sayı olmak üzere $p^2 + 4p$ sayılarının tam kare olmayacağını göstermemiz yeterlidir. Bunun için, $p^2 + 4p = n^2$ olacak şekilde bir n tamsayısının bulunamayacağını göstermeliyiz. Buradan;

$$p^2 + 4p - n^2 = 0 \quad (13)$$

p için ikinci derece denklemi elde edilir. (13) denkleminin tamsayı çözümlerinin bulunması, $\Delta = 4n^2 + 16$ diskriminantının tam kare olmasına bağlıdır. Bunun için $4n^2 + 16 = t^2$ denkleminin tamsayı çözümlerine bakalım:

- $n = 0$ için $\Delta = 4$ olur, ancak bu durumda (13) denklemini sağlayan p sayısı bulunamaz.
- $n \neq 0$ durumunda ise; $t^2 - n^2 = 4$ denkleminin tamsayı çözümlerinin olmadığı kolaylıkla görülebilir. Dolayısıyla hiçbir p asal sayısı için $p^2 + 4p$ bir tam kare olamaz ve ispat biter. **Denklemleri buraya yazın.**

Diğer taraftan, Denklem 9 ile verilen $\begin{pmatrix} px + 1 & y \\ pz & w \end{pmatrix}$ dönüşümün sabit noktası a ile gösterilsin. Bu durumda, $\frac{(px+1)a+y}{pza+w} = a \Rightarrow pza^2 + (w - px - 1)a - y = 0$, ikinci derece denklemin kökleri, sabit noktaları verir. Denklemin diskriminantı; $\Delta = (w - px - 1)^2 - 4py$ ve dönüşümün determinantı; $pxw + w - pzy = 1$ olduğu göz önüne alınırsa, sabit noktalar;

$$a = \frac{(1+px-w) \mp \sqrt{(w+px+1)^2 - 4py}}{2pz} \quad (10)$$

şeklinde elde edilir.

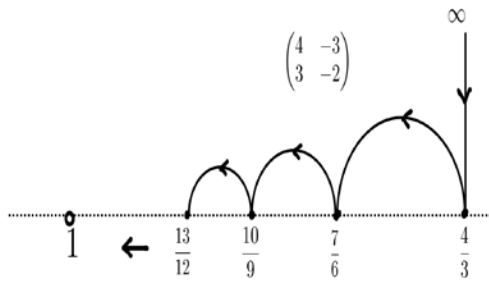
Teorem 2. $S = \begin{pmatrix} px + 1 & y \\ pz & w \end{pmatrix}$ dönüşümünün parabolik olması için gerek ve yeter koşul $px + zy = 0$ olmasıdır

ve bu durumda $z \neq 0$ için sabit nokta; $a = \frac{x}{z} = -\frac{y}{p}$ rasyonel sayıdır.

İspat. $\tau(S) = (px + w + 1)^2 = 4$, $\det(S) = 1$ olduğu göz önüne alınırsa, istenilen kolaylıkla elde edilir. ■

Örnek 4. $p = 3$, $x = 1$, $y = -3$ ve $w = -2$ alınırsa; S tipli özel bir parabolik dönüşüm elde edilir. Bu dönüşümün ürettiği sonsuz uzunluklu yol; Şekil 5 ile gösterildiği gibi 1 sayısına yakınsayan bir rasyonel dizi ile etiketlenebilir.

$$\infty \rightarrow \frac{4}{3} \rightarrow \frac{7}{6} \rightarrow \dots \rightarrow \frac{3n+1}{3n} \rightarrow \dots \quad (14)$$



Şekil 5. Denklem 14 ile elde edilen sonsuz uzunluklu yol.

iv) $Q = p$, $\Delta = \{1, p - 1\}$ Durumu:

$x \equiv \mp 1 \pmod{p}$ olmak üzere hareket Denklem 14 ile verilebilir.

$$\begin{pmatrix} px & y \\ pz & pw \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} pxr + ys \\ pZR + pws \end{pmatrix} \quad (15)$$

Eğer, $w = -x$ ise; her $p \geq 3$ asalı için, $px^2 + zy + 1 = 0$ denklemini sağlayan x, z, y tamsayıları ile elde edilen eliptik dönüşümler; Denklem 15 ile gösterildiği gibi 2 uzunluklu devreler üretir:

$$\infty \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} px^2 + yz \\ 0 \end{pmatrix} = \infty \quad (16)$$

Eğer, $|w + x| = 1$ ve $p = 3$ ise, dönüşüm eliptik olup, bu tipli dönüşümler; Denklem 16 ile gösterildiği gibi 3 uzunluklu devreler üretirler.

$$\infty \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} px^2 + yz \\ \pm pz \end{pmatrix} \rightarrow \infty \quad (17)$$

Eğer, $|w + x| \geq 1$ ve $p > 3$ ise, Denklem 14 ile verilen $\begin{pmatrix} px & y \\ pz & pw \end{pmatrix}$ dönüşümü hiperbolik olup, bu durumda;

$$a = \frac{p(x-w) \mp \sqrt{p^2(w+x)^2 - 4p}}{2pz}$$

reel sayılarına yakınsayan sonsuz uzunluklu yollar elde edilir.

TARTIŞMA ve SONUÇ

Bilindiği gibi, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ çarpımsal grubunun aşikâr alt gruplarından başka alt grupları da vardır. Bu alt gruplar için benzer yolları ve devreleri bulma problemi; çok daha detaylı bir çalışma gerektirecektir ve bunların irdelenmesi daha sonraki çalışmaların konusu olabilir. Bu çalışma ile sunulan yöntem ve fikir doğrultusunda Modüler grup ve benzeri grupların genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi üzerindeki doğal hareketinden doğan devreler ve yollar çok daha fazla merak uyandırabilir. Ayrıca, özellikle sonsuz uzunluklu yolların ürettiği rasyonel sayı dizilerinin sayılar teorisi açısından ilginç sonuçları bulunabilmektedir [5]. Örneğin, (13) klem 12 ile verilen yolun rasyonel köşelerinin bu açıdan araştırmaya değer olduğu söylenebilir. Sonuç olarak bu çalışmada; modüler grubun bazı özel kongrüans alt grupların $PSL_2(\mathbb{R})$ deki normalliyenleri ele alındı. Bu alt grupların genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi üzerindeki hareketi belli kısıtlamalar altında ayrı ayrı ele alındı. Eliptik elemanların ürettiği 2, 3, 4 ve 6 uzunluklu devrelere örnekler verildi. Hiperbolik ve parabolik elemanların ürettiği sonsuz uzunluklu yollar gösterildi (sırasıyla Örnek 3 ve 4). Buradaki grafların köşelerinin etiketlendiği sayı dizileri ile dönüşümlerin tipleri arasında ilişkiler ortaya kondu. Ayrıca sonsuz uzunluklu yolların yakınsadığı nokta ile üretici dönüşümün sabit noktaları arasındaki ilişkiler irdelendi.

KAYNAKÇA

- [1] Newman, M., The normalizer of certain modular subgroups, Canadian Journal of Mathematics, 8, 29-31, 1956.
- [2] Lehner, J., Newman, M., Weierstrass point of $\Gamma_0(N)$, Annals of Mathematics, 79(2), 260-368, 1964.
- [3] Im, B., Jeon D., Kim, C.H., Normalizers of intermediate congruence subgroups of the hecke subgroups, Open Mathematics, 15(1), 787-799, 2007.
- [4] Güler, B.O., Beşenk, M., Değer, A.H., Kader, S., Elliptic elements and circuits in suborbital graphs, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 40(2), 203-210, 2011.
- [5] Şanlı, Z., Köroğlu, T., Some group actions and Fibonacci numbers, Communications Faculty Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics, 3, 273-284, 2022.
- [6] Akbaba, Ü., Değer, A.H., On applications of pell and pell-lucas numbers with matrix method, Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 44(6), 10703-10707, 2023.
- [7] Conway, C., Norton, S., Monstrous and moonshine, Bulletin of the London Mathematical Society, 11, 308-339, 1979.
- [8] Akbaş M., The normalizer of modular subgroups, Faculty of Mathematical Studies University of Southampton, PhD Thesis, 1989.
- [9] Palka, B. P., An introduction to complex function theory, Springer New York, NY, 405s, 1991.
- [10] Köroğlu, T., Güler, B. Ö., Şanlı, Z., Suborbital graphs for the Atkin Lehner group, Turkish Journal of Mathematics, 41, 235-243, 2017.