



# Bozok Journal of Engineering and Architecture

e-ISSN: 3023-4298  
Araştırma Makalesi

## Burulmaya maruz kalan dairesel içi boş kesitlerin efektif en kesit tasarımı

Mirali NURALİYEV<sup>1</sup>, Hamza Kemal AKYILDIZ<sup>1</sup>, Mehmet Akif DÜNDAR<sup>1</sup>, \*

<sup>1</sup> Yozgat Bozok Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Yozgat, Türkiye

### MAKALE BİLGİSİ

#### Makale Tarihleri:

Geliş tarihi  
07.03.2025  
Kabul tarihi  
11.04.2025  
Yayın tarihi  
31.06.2025

#### Anahtar Kelimeler:

Analitik yöntem  
İçi dolu dairesel kesit  
İçi boş dairesel kesit  
Burulma  
Etkif en kesit tasarımı

### ÖZET

Bu çalışma, burulmaya tabi dairesel boşluklu kesitlerin burulma rijitliğini artırırken ağırlıklarını azaltmaya yönelik olarak, dairesel boşluklu kesitlerin optimal etkili kesit boyutlarını belirlemek için analitik yöntemler geliştirmeye adanmıştır. Bu amaçla, içi boş dairesel kesit tasarımına referans teşkil edecek içi dolu dairesel bir kesitin yarıçapı belirlenmiş ve bu kesite dayalı olarak "Eşdeğer Kesit 1" ve "Eşdeğer Kesit 2" olmak üzere iki farklı içi boş dairesel kesit tasarım modeli geliştirilmiştir. Kesitler arasındaki eşdeğerlik, mekanik ve geometrik parametrelerin karşılaştırılması yoluyla sağlanmıştır. "Eşdeğer Kesit 1" modeli kullanılarak elde edilen tasarım sonuçları, bu modelin önemli ölçüde malzeme tasarrufu sağladığını ve bu malzeme tasarrufunun %70'e kadar çıkabildiğini ortaya koymuştur. Buna ek olarak, "Eşdeğer Kesit 2" modeli kullanılarak elde edilen sonuçlar, içi dolu dairesel kesit ile aynı ağırlığa sahip olarak tasarlanan içi boş dairesel kesitlerde maksimum kayma gerilmesinin %77, maksimum birim burulma açısının ise %90 azaldığını ve bu iyileşmelerin sonucunda da burulma rijitliğinin 9 kat arttığını göstermiştir. Burulma yüklemesine maruz kalan içi boş dairesel kesitlerin efektif en kesit boyutlarını belirlemeye yönelik türetilen analitik ifadeler, pratik mühendislik tasarımlarında kullanılabilirliklerini sağlamak amacıyla erişime sunulmuştur. Bu sonuçlar, optimize edilmiş kesit tasarımlarının burulma dayanımını artırırken malzeme kullanımını önemli ölçüde azalttığını ve mühendislik uygulamalarında yapısal verimliliği artırabileceğini ortaya koymuştur.

## Effective cross-section design of circular hollow sections subjected to torsion

### ARTICLE INFO

#### Article history:

Received  
07.03.2025  
Accepted  
11.04.2025  
Published  
31.06.2025

#### Keywords:

Analytical method  
Circular solid section  
Circular hollow section  
Torsion  
Effective cross-section design

### ABSTRACT

This study has been devoted to developing analytical methods for determining the optimal effective cross-sectional dimensions of circular hollow sections subjected to torsion, with the aim of enhancing their torsional rigidity while reducing their weight. To this end, the radius of a solid circular section, which serves as a reference for the circular hollow section design, has been determined, and two different circular hollow section design models, namely "Equivalent Section 1" and "Equivalent Section 2," have been developed based on this reference section. The equivalence between the sections has been ensured through the comparison of mechanical and geometric parameters. The design results obtained using the "Equivalent Section 1" model have demonstrated that this model achieves significant material savings, with the material savings reaching up to 70%. Furthermore, the results obtained using the "Equivalent Section 2" model have shown that, despite being designed with the same weight as the solid circular section, the circular hollow sections reduce the maximum shear stress by 77% and the maximum unit twist angle by 90%, resulting in a ninefold increase in torsional rigidity. The analytical expressions derived to determine the effective cross-sectional dimensions of circular hollow sections subjected to torsion have been made available to ensure their applicability in practical engineering designs. These findings have revealed that optimized cross-sectional designs can significantly enhance torsional resistance while reducing material use, thereby improving structural efficiency in engineering applications.

ORCID ID: Mirali Nuraliyev: 0000-0002-3063-8414; Hamza Kemal Akyıldız: 0000-0002-5670-2314; Mehmet Akif Dunder: 0000-0001-5463-6774

\*Sorumlu yazar: Yozgat Bozok Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Yozgat, Türkiye

Tel: +90 354 2421113

Fax: +90 354 2421005

E-mail: m.akif.dundar@yobu.edu.tr

Bu makaleye atıfta bulunmak için: M. Nuraliyev, H. K. Akyıldız, M. A. Dunder, "Burulmaya maruz kalan dairesel içi boş kesitlerin efektif en kesit tasarımı", Bozok Journal of Engineering and Architecture, vol. 4, no. 1, pp. 32-55, June 2025.

## 1. GİRİŞ

Dairesel boş kesitler (DBK), yüksek burulma rijitliği, etkin yük aktarımı ve homojen gerilme dağılımı gibi üstün mekanik avantajlarıyla yapısal mühendislikte önemli bir yere sahiptir [1–3]. Kapalı kesit geometrileri, burulma etkisi altında üstün performans sergileyerek burkulmaya karşı yüksek direnç sağlar [1,4]. Bu özellikleri sayesinde DBK, köprüler, açık deniz yapıları ve enerji iletim kuleleri gibi yüksek dayanım gerektiren mühendislik uygulamalarında vazgeçilmez bir seçenek haline gelmiştir [5,6]. Bir kesitin yapısal etkinliği, maruz kaldığı yüklemeye türüne bağlı olarak büyük ölçüde değişkenlik gösterir [1,7,8]. Eksenel çekme altında, taşıma kapasitesini belirleyen temel faktör kesit alanıdır ve aynı kesit alanına sahip elemanlar benzer yük taşıma kapasitesine sahiptir [1,9,10]. Ancak, eğilme yükü söz konusu olduğunda kesit geometrisinin önemi artar; içi boş kutu kesitler ve I-kesitler, aynı kesit alanına sahip dolu kesitlere kıyasla daha yüksek mukavemet sunar [1]. Benzer şekilde, burulma yükü altında belirli kesit şekilleri daha avantajlıdır [1]. Örneğin, DBK'lar, dolu kesitlere ve I-kesitlere kıyasla çok daha yüksek burulma direnci göstererek, burulma rijitliğinin kritik olduğu mühendislik uygulamalarında en etkili çözüm olarak öne çıkmaktadır [1,10]. Ancak, DBK'nın burulma altındaki etkin kesit tasarımı hala kapsamlı araştırmalar gerektiren önemli bir mühendislik problemidir [2,11,12]. Yerel burkulma, malzeme akma sınırı ve kesit deformasyonları gibi etkiler, taşıma kapasitesini doğrudan etkileyerek güvenli ve ekonomik tasarım süreçlerini zorlaştırmaktadır. Bu nedenle, DBK'nın burulma davranışına dair daha derinlemesine araştırmalar, mühendislik yapılarının verimliliğini artırmak ve sınırlarını genişletmek adına büyük bir gereklilik olarak karşımıza çıkmaktadır. Buna rağmen, bu alanda yapılan çalışmaların geneli, burulma altındaki dikdörtgen veya kare içi boş kesitlere yoğunlaşmışken [13,14], DBK'lar için genelde bu durum, beton dolgu çelik yapılarla sınırlı kalmıştır [15,16]. Bu çalışmalar [13–16], söz konusu kesitlerin burulma altındaki performanslarını deneysel veya sayısal olarak incelemişlerdir. Bu deneysel ve sayısal çalışmaların ötesinde, içi boş kesitlerin burulma davranışlarının teorik analizleri, kesit kalınlığı boyunca kayma gerilmesinin nasıl ele alındığına göre iki ana gruba ayrılmıştır ve bunlar ince duvarlı ve kalın duvarlı teoriler olarak adlandırılmıştır [17–20]. Kalın duvarlı teoriler, kesitin kalınlığı boyunca kayma gerilmesinin değişimini dikkate alarak daha gerçekçi bir burulma analizi sunmayı amaçlamıştır [17–20]. Bu teoriler, özellikle kalın duvarlı boruların burulma davranışını daha doğru bir şekilde modellenmesine olanak tanımakta ve bu da mühendislik tasarımlarında önemli bir avantaj sağlamaktadır. Bu yaklaşımların ötesinde, Doğrudan Dayanım Yöntemi (DDY) veya Sürekli Dayanım Yöntemi (SDY) burulmaya maruz içi boş kesitlerin en-kesit tasarımlarına uygulanan en önemli iki değişik yaklaşım olarak karşımıza çıkmaktadır [4,21,22]. Fakat, bu her iki yaklaşım burulmaya maruz DBK'lar için kapsamlı bir en-kesit tasarım modeli sunmamaktadır [4] ve bu da DBK'ların gerçek dünya uygulamalarındaki genel yapısal bütünlüğünü iyileştirecek etkin en-kesit tasarım yaklaşımlarının geliştirilmesi için daha fazla analitik çalışma yapılmasının önemini ortaya koymaktadır [4]. Diğer bir ifadeyle, bu yöntemler burulma altındaki DBK'ların en kesit tasarımında bazı önemli kısıtlamalara sahiptir. Örneğin, DDY esas olarak basit eğilme ve eksenel yüklemeye dayalı olup, burkulma sonrası rijitlik ve burulma etkilerini doğrudan hesaplamalara katmamaktadır [23]. Bu yöntem, kesitlerin dayanım kapasitesini hesaplamak için malzemenin akma sınırını esas alır ve genellikle yerel burkulmanın önemli olmadığı veya idealize edilmiş yüklemeye koşulları altında geçerlidir [24]. DDY, kesit alanı ve moment eğrisini dikkate alarak, malzemenin gerilme-gerinim davranışını kullanır, ancak karmaşık gerilme durumlarında, yerel ve genel burkulmanın etkileşime girdiği koşullarda ve kalın cidarlı kesitlerde güvenilirliğini kaybedebilmektedir. Bu, DDY'nin daha sınırlı bir uygulama alanına sahip olmasına ve burulma gibi yüklemeye durumları karşısında yetersiz kalmasına yol açmaktadır. Özellikle, yüksek burulma momentine maruz kalan DBK'larda, DDY yöntemi gerçek davranışı tam olarak yansıtamamaktadır. Öte yandan, SDY, malzemenin dayanım kapasitesini, kayma gerilmesi ve momentlerin sürekli dağılımı üzerinde değerlendirerek hesaplar [25]. SDY, burulma etkilerini dolaylı olarak ele alır ve kesitteki kayma gerilmesinin sürekli değişen bir dağılımını dikkate alır. Fakat bu yöntem daha karmaşık yüklemeye koşullarında, özellikle kesitteki farklı noktalarındaki gerilme durumlarını göz önünde bulundurarak daha kapsamlı bir analiz sunar. Ancak, SDY de burkulma sonrası davranışa yönelik sınırlı bir çerçeve sunmakta olup, burulma yükü altındaki yapıların davranışları tam olarak belirleyememektedir ve bu da SDY'nin burulmaya maruz yapıların en-kesit tasarımında kullanılmasını önemli ölçüde kısıtlamaktadır [25].

Yukarıdaki literatür incelemesi, burulmaya maruz DBK'ların efektif en kesit tasarımına yönelik mevcut yaklaşımların büyük ölçüde ampirik yöntemlere veya sayısal simülasyonlara dayandığını ve kapsamlı bir analitik çerçevenin eksik olduğunu açıkça ortaya koymuştur. Bu eksiklik, en kesit parametrelerini burulma performansı ile doğrudan ilişkilendiren sistematik bir metodolojiye duyulan ihtiyacı vurgulamaktadır. Bu ihtiyaca yanıt olarak, bu çalışma, DBK'lar için daha efektif en kesit tasarımı sağlamak amacıyla temel yapı mekaniği prensiplerini entegre eden yenilikçi bir analitik yaklaşım sunmaktadır. Önceki araştırmalar çoğunlukla belirli sayısal modeller veya deneysel bulgular üzerine yoğunlaşırken, önerilen metodoloji, geniş bir tasarım yelpazesine uygulanabilir genel bir formülasyon sunmaktadır. Bu yenilik, yalnızca teorik anlayışı geliştirmekle kalmayıp, aynı zamanda mühendislik uygulamalarında DBK'ların efektif en kesit optimizasyonuna yönelik pratik kılavuzlar sağlamaktadır.

Burulma altında yapısal bütünlüğü korurken ağırlık azaltımını sağlamak amacıyla “Eşdeğer Kesit 1” ve “Eşdeğer Kesit 2” olmak üzere iki en kesit modeli geliştirilmiş ve analiz edilmiştir. Etkili en kesit tasarım stratejisi, maksimum kayma gerilmesi ve maksimum burulma açısını sistematik olarak dikkate alarak, dayanım ve malzeme verimliliği arasında etkili bir denge sağlamaktadır. Bu kritik

parametrelerin tasarım sürecine entegre edilmesi sayesinde, burulma performansından ödün verilmeden malzeme kullanımı en aza indirilmektedir. Bu yaklaşım yalnızca DBK'ların yük taşıma kapasitesini artırmakla kalmayıp, aynı zamanda havacılık, otomotiv ve açık deniz mühendisliği gibi ağırlık hassasiyetinin yüksek olduğu sektörlerdeki uygulanabilirliğini de geliştirmektedir. Geliştirilen modeller, geleneksel tasarım yaklaşımlarına kıyasla önemli bir ilerleme sunarak, burulma yükleri altındaki DBK'ların efektif en uygun en kesit konfigürasyonlarının belirlenmesine yönelik gelişmiş analitik bir çerçeve sunmaktadır. Önerilen model, geleneksel DDY ve SDY yöntemlerine kıyasla daha sistematik ve doğrudan en kesit tasarımı yapabilen bir analitik çerçeve sunarak, burulma yükleri altındaki DBK'ların en uygun enkesit konfigürasyonlarının belirlenmesine önemli bir katkı sağlamaktadır. İlave olarak, geliştirilen model en kesit tasarım süreçlerini daha verimli hale getirirken, türetilen analitik ifadeler ilgili pratik mühendislik uygulamalarında kullanılmak üzere çalışmada ayrıntılı bir şekilde sunulmuştur.

## 2. İÇİ BOŞ DAİRESEL KESİTLERİN MEVCUT EN KESİT TASARIMINA KISA BİR BAKIŞ

İçi boş dairesel kesitler, burulma momentine karşı direnç gösterme açısından dolu kesitli yapılara kıyasla daha verimlidir [1,4]. Dolu dairesel kesitlerde kayma gerilmeleri, kesitin yüzeyinde maksimum değere ulaşırken, kesit merkezinde sıfırdır. Bu nedenle, dolu bir kesitteki malzeme, kesit merkezine yakın bölgelerde daha düşük kayma gerilmesi seviyelerinde çalışmaktadır. Buna karşın, tipik bir içi boş dairesel kesitte malzemenin büyük bir kısmı, kayma gerilmesinin en yüksek olduğu dış sınırdaki yoğunlaşmaktadır. Bu özellik, içi boş dairesel kesitlerin, ağırlık ve malzeme tasarrufu sağlama açısından dolu kesitlere göre daha avantajlı olmasını mümkün kılar. Dolayısıyla, büyük tahrik elemanları, pervaneler ve jeneratörler gibi uygulamalarda, dolu kesitler yerine içi boş dairesel kesitlerin kullanılması, hem yapısal verimliliği artırmak hem de malzeme kullanımı açısından tasarruf sağlamak için tercih edilmektedir [1,26]. İçi boş dairesel kesitlerin tasarımında, iç yarıçap ( $c_1$ ) ve dış yarıçap ( $c_2$ ) olmak üzere iki temel parametre yer almaktadır. Bununla birlikte, en kesit tasarımı için iki temel denklem bulunmaktadır. Bunlardan biri, mukavemet kriterine veya mukavemet dayanımı şartlarına dayanan  $\tau_{max} \leq \tau_{em}$  denklemi, diğeri ise açısız deformasyon kriterine veya burulma rijitliği şartına dayanan  $\theta_{max} \leq \theta_{em}$  denklemdir [27]. Burada iki bilinmeyene karşılık gelen iki tane denklem bulunmaktadır ve dolayısıyla çözüm ( $\tau_{max} = \tau_{em}$ ,  $\theta_{max} = \theta_{em}$ ) sınır durumu için Denklem (1)'de sunulan ifade kullanılarak elde edilebilir.

$$\left. \begin{aligned} \tau_{max} &= \frac{Tc_2}{I_p} = \tau_{em} \\ \theta_{max} &= \frac{T}{GI_p} = \theta_{em} \end{aligned} \right\} \Rightarrow c_2 = \frac{\tau_{em}}{G\theta_{em}} \quad (1)$$

Burada  $\tau_{max}$  içi boş dairesel kesitte meydana gelen maksimum kayma gerilmesini temsil etmektedir.  $\tau_{em}$  ise emniyetli kayma gerilmesidir ve  $\tau_{em} = \tau_{AK}/S$  olarak tanımlanır [26]. Burada,  $\tau_{AK}$  kayma akma sınırını temsil ederken,  $S$  emniyet katsayısıdır. Ayrıca,  $G$  kayma modülünü,  $\theta_{max}$  birim uzunluğa düşen maksimum burulma açısını veya maksimum birim burulma açısını temsil etmektedir. İlave olarak,  $\theta_{em}$  emniyetli birim burulma açısı olup genellikle  $\theta_{em} = 0.250 \dots 10/m$  alınır.  $I_p$  ise içi boş mil kesitinin polar atalet momenti,  $c_2$  ise içi boş milin dış yarıçapıdır.

Her ne kadar Denklem (1) malzemenin mekanik özelliklerine dayalı bir sonuç verse de, elde edilen bu sonuç her zaman uygulanabilir değildir. Çünkü Denklem (1) ile içi boş dairesel kesitin dış yarıçapı  $c_2$ , burulma momenti  $T$ 'ye bağlı olmayan sabit bir değer olarak belirlenmiş olur. Örneğin,  $T = 1500 \text{ N.m}$  büyüklüğündeki torku aktaran çelik içi boş çubuğun çapı, malzeme özellikleri ( $\tau_{em} = 40 \text{ MPa}$ ,  $\theta_{em} = 0.25^\circ/m = 0,00436 \text{ rad/m}$ ,  $G = 80 \text{ GPa}$ ) Denklem (1)'de yerine yazıldığında  $c_2 = 114.68 \text{ mm}$  olarak bulunur. Bulunan bu değer, verilen torku aktarmak için ne kadar büyük bir değer olduğunu gösterebilmek adına, içi dolu dairesel kesitin yarıçapı ile karşılaştırılması yeterli olacaktır. İçi dolu dairesel kesitin yarıçapı, mukavemet ve deformasyon kriterlerine göre aşağıdaki denklemler ile belirlenir.

$$c_{dm} = \sqrt[3]{\frac{2T}{\pi\tau_{em}}} \quad (2)$$

$$c_{dd} = \sqrt[4]{\frac{2T}{\pi\theta_{em}G}} \quad (3)$$

Burada,  $T$  burulma momentini temsil ederken,  $c_{dm}$ , ve  $c_{dd}$  sırasıyla mukavemet ve deformasyon kriterlerine göre belirlenen içi dolu dairesel kesitin yarıçapını temsil etmektedir.  $\tau_{em}$  ve  $\theta_{em}$  sırasıyla emniyetli kayma gerilmesi ve emniyetli birim burulma açısıdır. Ayrıca,  $G$  kayma modülüdür. Verilen torku aktarmak için içi dolu dairesel kesitin yarıçapı mukavemet kriterine Denklem (2)'de sunulan ifade kullanılarak  $c_{dm} = 28.79 \text{ mm}$  olarak hesaplanırken, deformasyon kriterine göre Denklem (3)'de verilen ifade yardımıyla  $c_{dd} = 40.68 \text{ mm}$  olarak belirlenir. Sonuç olarak, bu hesaplamalardan elde edilen değerler içerisinde daha büyük olan

değer içi dolu dairesel kesitin yarıçapı olarak kabul edilir. İçi dolu dairesel kesitin yarıçapı ( $c_{dd} = 40.68 \text{ mm}$ ) içi boş dairesel kesitin dış yarıçapı ( $c_2 = 114.68 \text{ mm}$ ) ile karşılaştırıldığında, içi boş dairesel kesitin dış yarıçapının yaklaşık üç kat daha büyük olduğu görülmektedir. Bu durum, hem ekonomik açıdan hem de konstrüksiyon açısından önemli dezavantajlar yaratmaktadır. Bu sonuç, içi boş dairesel kesitlerin en kesit boyutlarının analitik olarak belirlenmesinde, mukavemet ve deformasyon kriterlerinin sınır durumu ( $\tau_{max} = \tau_{em}$ ,  $\theta_{max} = \theta_{em}$ ) için birlikte değerlendirilmesinin uygun bir yaklaşım olmadığını ortaya çıkarmaktadır. Dolayısıyla, burulmaya maruz kalan içi boş dairesel kesitlerin en kesit boyutları, öncelikle mukavemet veya deformasyon kriterlerinden biri esas alınarak belirlenmeli, ardından diğer kriter doğrultusunda uygunluğu değerlendirilmelidir. Bu yaklaşım, her iki kriterin eş zamanlı uygulanmasının tasarım açısından uygun olmadığını ve belirli bir kriterin önceliklendirilmesi gerektiğini ortaya koymaktadır. Ancak bu durumda,  $c_1$  ve  $c_2$  gibi iki bilinmeyen olmasına rağmen yalnızca tek bir denklem ( $\tau_{max} = \tau_{em}$  veya  $\theta_{max} = \theta_{em}$ ) çözüm için yeterli olmamaktadır. Bu eksikliği gidermek için, mevcut tasarım yaklaşımlarında genellikle  $c_1/c_2$  (yarıçap oranı) veya  $c_2/t$  (dış yarıçap/cidar kalınlığı) oranı önceden belirlenen bir parametre olarak tasarıma eklenmektedir. Fakat, bu tür bir tasarım ne optimum ne de efektif bir tasarım olarak değerlendirilebilir. Bu durum, mühendislik tasarımlarında hem ekonomik hem de yapısal verimlilik açısından sınırlamalar yaratmaktadır. Bu bağlamda, bu çalışmada önerilen "Eşdeğer Kesit Tasarım Modeli", içi boş dairesel kesitlerin tasarımına yönelik önemli bir yenilik sunmaktadır. Çalışma, teorik temellere dayalı ve ileri düzeyde bir çözüm önerisi getirerek, klasik yöntemlerin ötesine geçmeyi hedeflemiştir.

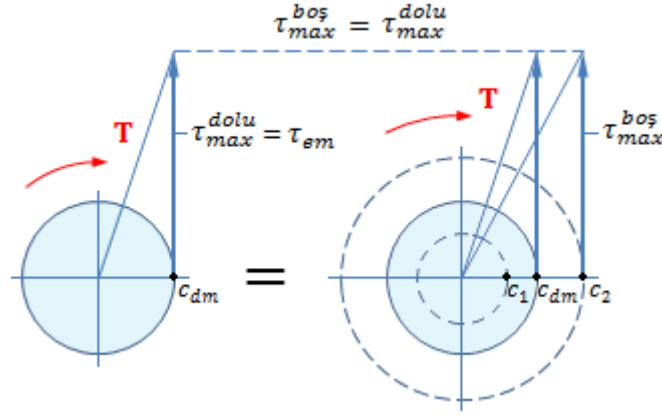
Önerilen modelde, ilk adım olarak verilen burulma momenti (T) ve malzeme özellikleri kullanılarak içi dolu dairesel bir kesit belirlenir. Daha sonra, bu kesit referans alınarak içi boş dairesel kesit ile karşılaştırılacak bir eşdeğer tasarım modeli oluşturulur. Burada, içi dolu ve içi boş dairesel kesitler arasındaki mekanik ve geometrik ilişkiler titizlikle ele alınarak, içi boş dairesel kesitin iç ve dış yarıçapları daha hassas bir şekilde belirlenir. Çalışma, bu süreci iki alternatif tasarım üzerinden optimize eder: "Eşdeğer Kesit 1" ve "Eşdeğer Kesit 2". Önerilen bu tasarım modeli, mevcut çözümleri sadece iyileştirmekle kalmamış, aynı zamanda mühendislik tasarımındaki verimlilik sorunlarına daha bilimsel ve etkin bir yaklaşım getirmiştir. Çalışmanın en önemli katkısı, tasarım sürecini daha doğru ve efektif hale getirerek, ekonomik maliyetleri azaltmayı ve yapıların dayanıklılığını artırmayı amaçlamasında yatmaktadır. Bu nedenle, bu çalışma, geleneksel mühendislik tasarım yöntemlerinin ötesine geçerek, onlardan daha etkili sonuçlar elde edebilecek yeni bir model sunmaktadır.

### 3. "EŞDEĞER KESİT 1" MODELİNE GÖRE GERÇEKLEŞTİRİLEN İÇİ BOŞ DAİRESEL KESİTLERİN EFEKTİF EN KESİT TASARIMI

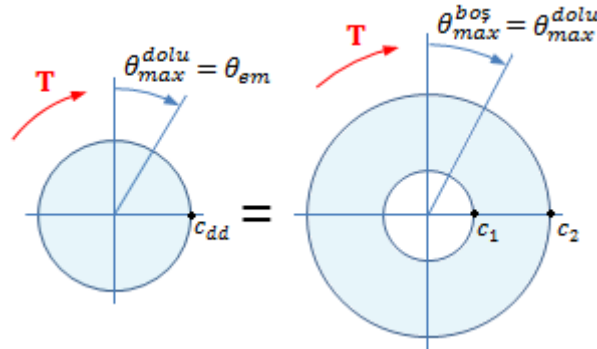
"Eşdeğer Kesit 1" modeli temel alınarak yapılan tasarım, dairesel kesitler için iki farklı yaklaşımla gerçekleştirilebilir. İlk yaklaşımda, içi boş dairesel kesitte oluşan maksimum kayma gerilmesi, referans olarak alınan dolu dairesel kesitteki maksimum kayma gerilmesine eşit alınır ( $\tau_{max}^{boş} = \tau_{max}^{dolu}$ ). İkinci yaklaşımda ise, içi boş dairesel kesitte meydana gelen maksimum birim burulma açısı, referans dolu dairesel kesitteki maksimum birim burulma açısına eşit alınarak tasarım yapılır ( $\theta_{max}^{boş} = \theta_{max}^{dolu}$ ). Her iki durumda da eşdeğer içi boş dairesel kesitin kesit alanı, referans olarak alınan dolu dairesel kesitin kesit alanından daha küçüktür; yani  $A_{boş} = \alpha A_{dolu}$  olup, burada  $\alpha < 1$ 'dir. "Eşdeğer Kesit 1" yaklaşımıyla oluşturulan efektif en kesit tasarım modelleri, matematiksel olarak Denklem (4) ve Denklem (5) ile ifade edilmiş ve Şekil 1 ve Şekil 2'de ise diyagram şeklinde sunulmuştur.

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{max}^{boş} = \tau_{max}^{dolu} \\ A_{boş} = \alpha A_{dolu} \end{array} \right\}, \text{ eğer } c_{dm} > c_{dd} \quad (4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \theta_{max}^{boş} = \theta_{max}^{dolu} \\ A_{boş} = \alpha A_{dolu} \end{array} \right\}, \text{ eğer } c_{dm} < c_{dd} \quad (5)$$



Şekil 1. Maksimum kayma gerilmesine göre "Eşdeğer Kesit 1" tasarım modeli



Şekil 2. Maksimum burulma açısına göre "Eşdeğer Kesit 1" tasarım modeli

Efektif tasarımın, Denklem (4) veya Denklem (5) üzerinden gerçekleştirilmesine yönelik karar, mukavemet ve deformasyon kriterlerine bağlı olarak belirlenen referans dolu kesitin yarıçapına bağlıdır. Eğer mukavemet kriteri veya mukavemet dayanım şartına göre belirlenen referans dolu kesitin yarıçapı ( $c_{dm}$ ), deformasyon kriteri veya rijitlik şartına göre belirlenen yarıçaptan ( $c_{dd}$ ) daha büyükse, efektif tasarım maksimum kayma gerilmesine göre Denklem (4) ile yapılmalıdır. Aksi durumda, yani,  $c_{dm} < c_{dd}$  olduğunda, efektif tasarım maksimum burulma açısına göre Denklem (5) ile gerçekleştirilmelidir. "Eşdeğer Kesit 1" yaklaşımıyla yapılan her iki efektif tasarımın temel amacı, malzeme tasarrufu sağlamaktır.

### 3.1 "Eşdeğer Kesit 1" Tasarım Modeli ile Maksimum Kayma Gerilmesine Göre Efektif Tasarım

Yukarıda belirtildiği gibi, mukavemet ve deformasyon kriterlerine göre belirlenen dolu referans kesitin yarıçapları karşılaştırıldığında, eğer  $c_{dm} > c_{dd}$  ise, bu durumda efektif tasarım, maksimum kayma gerilmesine göre, Şekil 1'de gösterilen "Eşdeğer Kesit 1" tasarım modeline göre gerçekleştirilir. Bilindiği üzere, Denklem (2) ile belirlenen  $c_{dm}$  yarıçapına sahip dolu bir mil, T burulma momentini emniyetle karşılamaktadır. Önerilen tasarım modeline göre, alternatif bir içi boş dairesel kesit belirlenmelidir ki bu kesitte oluşan maksimum kayma gerilmesi ( $\tau_{max}^{boş}$ ), referans olarak alınan dolu kesitteki maksimum kayma gerilmesine ( $\tau_{max}^{dolu}$ ) eşit olsun. İlaveten, belirlenen içi boş kesitin alanı ( $A_{boş}$ ), içi dolu referans kesitin alanından daha küçük olmalı, böylece malzeme tasarrufu sağlanabilmelidir. Aksi takdirde, içi dolu bir kesit varken içi boş kesit tasarımına gerek duyulmazdı. Buna göre, en uygun veya en efektif tasarımı gerçekleştirebilmek için maksimum kayma gerilmesine göre "Eşdeğer Kesit 1" tasarım modelini temsil eden ve Denklem (4)'de sunulan ifadeler aşağıda verildiği gibi yeniden tanımlanmıştır.

$$\begin{cases} \frac{2Tc_2}{\pi(c_2^4 - c_1^4)} = \frac{2T}{\pi c_{dm}^3} \\ \pi(c_2^2 - c_1^2) = \alpha \pi c_{dm}^2 \end{cases} \quad (6)$$

Burada  $c_2$  içi boş dairesel kesitin dış yarıçapı,  $c_1$  içi boş dairesel kesitin iç yarıçapı ve  $\alpha$  içi boş kesit alanının içi dolu kesit alanına oranını temsil eden bir katsayı olup aldığı değerler 0 ile 1 arasındadır ( $\alpha = A_{boş}/A_{dolu}$ ).

İçi boş dairesel kesitlerin efektif en kesit tasarımının esas şartları olarak kabul edilen ve Denklem (6)'da sunulan eşitlikler, boyutsuz kesit parametreleri  $\frac{c_2}{c_{dm}}$  ve  $\frac{c_1}{c_{dm}}$  cinsinden aşağıda verildiği gibi ifade edilmiştir.

$$\begin{cases} \left(\frac{c_2}{c_{dm}}\right)^4 - \left(\frac{c_1}{c_{dm}}\right)^4 = \frac{c_2}{c_{dm}} & 7(a) \\ \left(\frac{c_2}{c_{dm}}\right)^2 - \left(\frac{c_1}{c_{dm}}\right)^2 = \alpha & 7(b) \end{cases}$$

Elde edilen Denklem 7(a) ve Denklem 7(b) eşitliklerini sağlayan burulmaya zorlanan içi boş dairesel kesit, hiçbir zaman hasara uğramaz ve dolu kesite kıyasla  $(1 - \alpha)$  oranında malzeme tasarrufu sağlar. Bu durum, tasarımda hem güvenliği hem de verimliliği artırarak, içi boş kesitlerin malzeme kullanımı açısından önemli avantajlar sunduğunu gösterir. Denklem 7(a) ve Denklem 7(b)'de tanımlanan efektif tasarım şartları birlikte ele alındığında, tüm parametreler tek bir denklemde birleştirilerek aşağıda verildiği gibi ifade edilir.

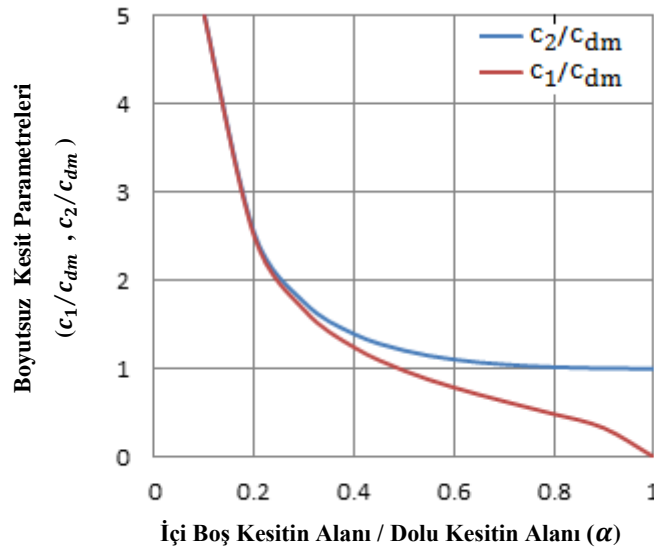
$$2\alpha \left(\frac{c_2}{c_{dm}}\right)^2 - \frac{c_2}{c_{dm}} - \alpha^2 = 0 \quad (8)$$

Öncelikle, Denklem (8)  $\frac{c_2}{c_{dm}}$  oranına göre ve ardından Denklem 7(b)  $\frac{c_1}{c_{dm}}$  oranına göre çözümlenerek, en uygun boyutsuz kesit parametreleri için aşağıdaki analitik ifadeler elde edilmiştir.

$$\frac{c_2}{c_{dm}} = \frac{1 + \sqrt{1 + 8\alpha^3}}{4\alpha} \quad (9)$$

$$\frac{c_1}{c_{dm}} = \frac{1}{4\alpha} [2 + 2\sqrt{1 + 8\alpha^3} - 8\alpha^3]^{1/2} \quad (10)$$

Denklem (9) ve Denklem (10)'da sunulan ifadelerden görüldüğü üzere, eğer  $\alpha = 1$  ise, bu durumda  $\frac{c_2}{c_{dm}} = 1$  ve  $\frac{c_1}{c_{dm}} = 0$  olur. Yani,  $c_2 = c_{dm}$  ve  $c_1 = 0$  olduğunda, alandan elde edilen malzeme tasarrufu sıfırdır. Bu durumda, eşdeğer kesit tam dolu kesit haline gelir ve borunun cidar kalınlığı  $t = c_2 - c_1 = c_{dm}$  olur. Eğer  $\alpha \rightarrow 0$  olursa, bu durumda  $\frac{c_2}{c_{dm}} \rightarrow \infty$  ve  $\frac{c_1}{c_{dm}} \rightarrow \infty$  olur. Bunun sonucunda,  $c_2$  ve  $c_1$  yarıçapları birbirine sonsuz derecede yaklaşır. Bu durumda alandan elde edilen malzeme tasarrufu maksimum olur. Böylece, eşdeğer kesit teorik olarak cidar kalınlığı  $t = 0$  olan bir çemberden ibaret hale gelir. Malzeme tasarrufu ve kesit parametrelerinin ilişkisinin daha iyi anlaşılabilmesi için, Denklem (9) ve Denklem (10) kullanılarak elde edilen diyagramlar Şekil 3'te gösterilmiştir.

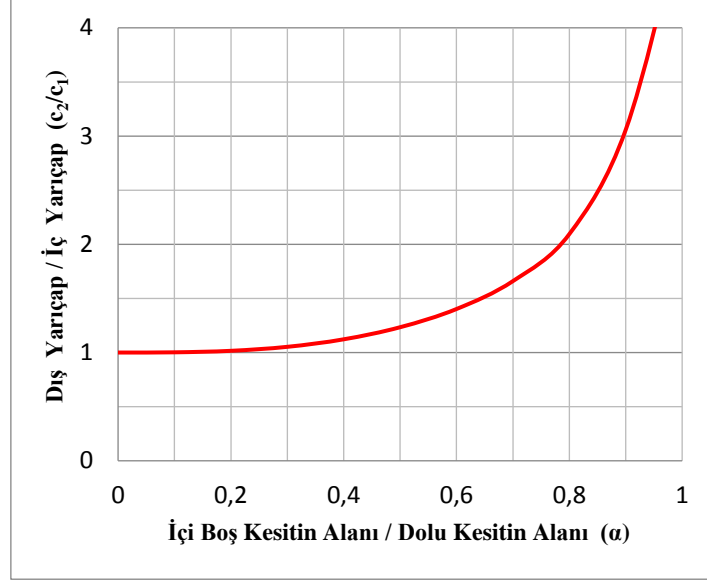


Şekil 3.  $\frac{c_2}{c_{dm}} = f(\alpha)$  ve  $\frac{c_1}{c_{dm}} = f(\alpha)$  diyagramları

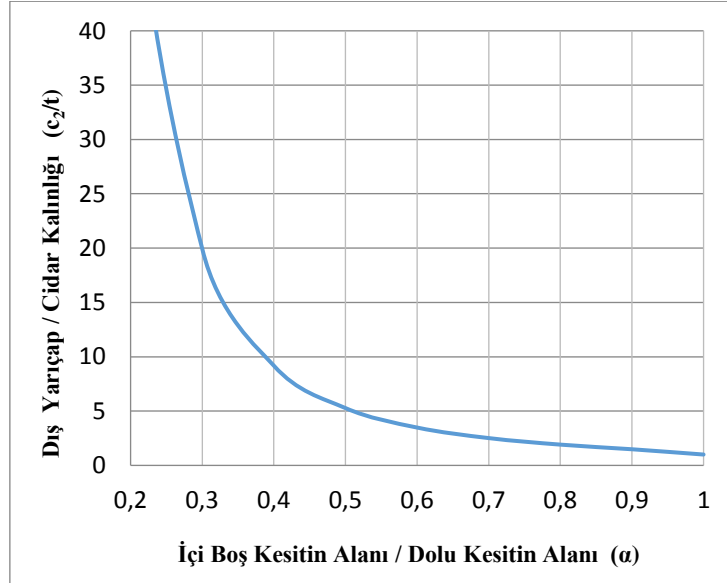
Şekil 3'te sunulan diyagramlardan görüldüğü üzere,  $\alpha$  oranının 0 ile 0.3 değerleri arasında  $\frac{c_2}{c_{dm}} \approx \frac{c_1}{c_{dm}}$  olduğundan, dolu kesite alternatif olarak oluşturulan eşdeğer içi boş dairesel kesit oldukça ince cidarlı bir yapıya sahip olmaktadır. Bu bağlamda,  $\alpha = 0 \dots 0.3$  aralığında  $\frac{c_2}{c_1} = (1 \dots 1.05)$  ve  $\frac{c_2}{t} = (\infty \dots 20)$  değerleri elde edilmektedir. Bu durumu, Denklem (11) ve Denklem (12) ile çizilen ve sırasıyla Şekil 4 ve Şekil 5'te gösterilen  $\frac{c_2}{c_1} = f(\alpha)$  ve  $\frac{c_2}{t} = f(\alpha)$  diyagramları üzerinden de kolaylıkla gözlemlenebilir.

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 8\alpha^3}}{\sqrt{2 + 2\sqrt{1 + 8\alpha^3} - 8\alpha^3}} \quad (11)$$

$$\frac{c_2}{t} = \frac{1 + \sqrt{1 + 8\alpha^3}}{1 + \sqrt{1 + 8\alpha^3} - \sqrt{2 + 2\sqrt{1 + 8\alpha^3} - 8\alpha^3}} \quad (12)$$



Şekil 4.  $\frac{c_2}{c_1} = f(\alpha)$  diyagramı



Şekil 5.  $\frac{c_2}{t} = f(\alpha)$  diyagramı

Bir torku iletmek için içi boş dairesel kesit tasarlandığında, t duvar kalınlığının, kesitin kırışmasını veya burkulmasını önleyecek kadar büyük olduğundan emin olunmalıdır. Bu güvence, yarıçap/kalınlık oranının maksimum değeri  $(c_2/t)_{max} = k$  alınarak ve Denklem (12) ile belirlenen  $\alpha$  oranının  $\alpha > \alpha_{min}$  değerleriyle sağlanabilir.

$$\alpha_{min} = \frac{1}{2} \left[ \frac{4k^2}{2k^2 - 2k + 1} \left( \frac{4k^2}{2k^2 - 2k + 1} - 2 \right) \right]^{1/3} \quad (13)$$

Burada, yarıçap/kalınlık oranının maksimum değeri  $k = 12$  olarak kabul edilebilir [26]. Bu değer, Denklem (13)'de yerine yazıldığında,  $\alpha_{min} = 0.36$  sonucu elde edilir. Bu durum, maksimum kayma gerilmesine göre "Eşdeğer Kesit 1" ile yapılan içi boş bir dairesel kesitin efektif tasarımında en fazla  $(1 - \alpha)100\% = \%64$  malzeme tasarrufu sağlanabileceğini göstermektedir. "Eşdeğer Kesit 1" ile maksimum kayma gerilmesine dayalı olarak önerilen efektif tasarımın, belirli bir içi boş dairesel kesitin burulma durumu

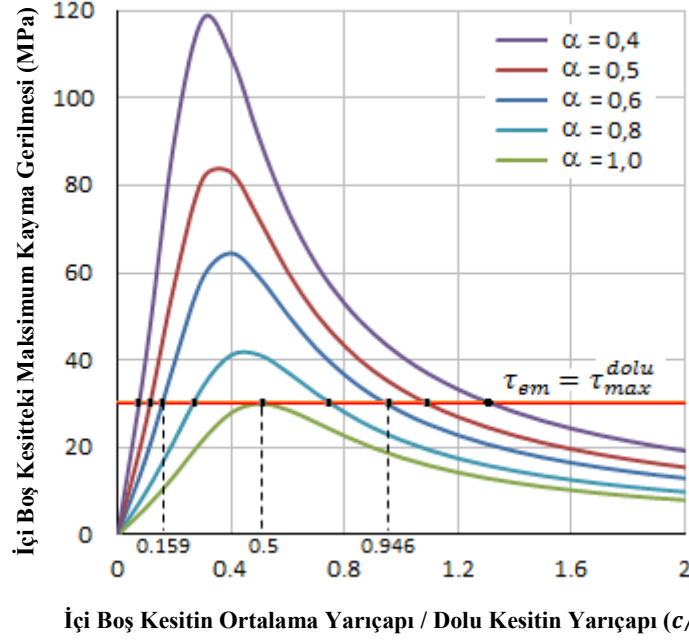
için en uygun çözümü sunduğunu kanıtlayabilmek amacıyla, kesitteki maksimum kayma gerilmesi, kesitin ortalama yarıçapı ( $c$ ) ve cidar kalınlığı ( $t$ ) ile ilişkilendirilerek Denklem (14) ile aşağıda verildiği gibi tanımlanmıştır.

$$\tau_{max}^{boş} = \frac{4T \left[ 4 \left( \frac{c}{c_{dm}} \right)^3 + \alpha \left( \frac{c}{c_{dm}} \right) \right]}{\pi \alpha c_{dm}^3 \left[ \alpha^2 + 16 \left( \frac{c}{c_{dm}} \right)^4 \right]} \quad (14)$$

Denklem (14)'ün türetilmesinde aşağıda Denklem (15)'de verilen matematiksel dönüşümler kullanılmıştır.

$$\begin{cases} c_2^2 + c_1^2 = \frac{1}{2}(4c^2 + t^2) \\ c_2^2 - c_1^2 = 2ct \\ c_2^2 - c_1^2 = \alpha c_{dm}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2^4 - c_1^4 = ct(4c^2 + t^2) \\ 2 \left( \frac{c}{c_{dm}} \right) \left( \frac{t}{c_{dm}} \right) = \alpha \end{cases} \quad (15)$$

Burada,  $\frac{c}{c_{dm}}$  oranı içi boş dairesel kesitin ortalama yarıçapının  $(c_1 + c_2)/2$ , dolu dairesel kesitin yarıçapına oranını ifade eder. Maksimum kayma gerilmesinin  $\frac{c}{c_{dm}}$  oranına bağlı değişimini gösteren diyagramlar Denklem (14) kullanılarak elde edilmiş ve Şekil 6'da sunulmuştur. Bu diyagramlar, dolu kesit alanı ile karşılaştırıldığında, farklı  $\alpha$  oranlarında sağlanan tasarruf miktarını açıkça göstermektedir. Diyagramların çiziminde örnek olarak  $T = 65$  kNm,  $\tau_{em} = 30$  MPa ve  $c_{dm} = 51.67$  mm değerleri kullanılmıştır.



Şekil 6. Farklı  $\alpha$  oranları için  $\tau_{max}^{boş} = f(c/c_{dm})$  bağıntıları

Şekil 6'da görüldüğü üzere,  $\tau_{em} = \tau_{max}^{dolu}$  yatay doğrusu,  $\alpha$  oranının farklı değerleri için çizilen her bir  $\tau_{max}^{boş} = f\left(\frac{c}{c_{dm}}\right)$  eğrisini iki noktada kesmektedir. Örneğin,  $\alpha = 0.6$  için çizilen eğriyi kesen noktalardan eğrinin tepe noktasına göre sağda yer alan kesişme noktasının apsisi  $\frac{c}{c_{dm}} = 0.946$ , solda yer alan kesişme noktasının apsisi ise  $\frac{c}{c_{dm}} = 0.159$  olarak elde edilmiştir. Soldaki kesişme noktası, içi boş dairesel kesit için geçerli bir çözüm değildir. Bu durum,  $\frac{c}{c_{dm}} = n$  ifadesi alınarak, Denklem (16) üzerinden  $\frac{c_2}{c_{dm}} \geq 1$  ve  $\frac{c_1}{c_{dm}} \geq 0$  koşulları göz önünde bulundurularak açıklanabilir.

$$\frac{c}{c_{dm}} = \frac{(c_1 + c_2)/2}{c_{dm}} = n \Rightarrow \frac{c_1}{c_{dm}} + \frac{c_2}{c_{dm}} = 2n \Rightarrow 2n \geq 1 \Rightarrow n \geq 0.5 \quad (16)$$

Denklem (16)'dan görüldüğü üzere,  $\frac{c}{c_{dm}}$  oranı en az 0.5 olabilmektedir. Bu durum, Şekil 6'da  $\alpha = 1$  oranı için çizilen eğrinin tepe noktasına denk gelmektedir. Bu durumda içi boş dairesel kesit, dolu dairesel kesitin kendisinden ibarettir. Yani,  $\frac{c_2}{c_{dm}} = 1$  ve  $\frac{c_1}{c_{dm}} = 0$  veya  $c_2 = c_{dm}$  ve  $c_1 = 0$  olduğundan, kesit alanından elde edilen malzeme tasarrufu da  $(1 - \alpha) = 0$  olmaktadır.

$\alpha = 0.6$  oranı için çizilen  $\tau_{max}^{boş} = f\left(\frac{c}{c_{dm}}\right)$  eğrisini kesen diğer noktanın apsisi  $\frac{c}{c_{dm}} = 0.946$  değeri, içi boş dairesel kesit için geçerli ve aynı zamanda en iyi çözümdür. Bu oran için, Denklem (15) ile  $\frac{t}{c_{dm}} = 0.317$ ,  $c_1 = 40.69$  mm ve  $c_2 = 57.07$  mm olarak bulunur. Elde edilen bu çözümün en iyi çözüm olduğu, Şekil 6'da  $(1 - \alpha)100\% = \%40$  malzeme tasarrufu için çizilen  $\tau_{max}^{boş} = f\left(\frac{c}{c_{dm}}\right)$  eğrisi üzerinden açıklanabilir. Şöyle ki,  $\frac{c}{c_{dm}}$  oranının  $(0...0.159)$  aralığına giren değerlerinin içi boş dairesel kesitler için geçersiz olduğu yukarıda açıklanmıştır.  $(0.159...0.946)$  aralığına giren değerlerde ise içi boş dairesel kesitte ortaya çıkan maksimum kayma gerilmesinin, emniyet gerilmesinin üstünde olduğu için bu aralıkta da geçersizdir. Bu durum Şekil 6'da sunulan sonuçlardan açıkça görülmektedir. Bu sonuç,  $\frac{c}{c_{dm}}$  oranı için yalnızca 0.946 ve üzeri değerlerin alınabileceğini ortaya koymaktadır.  $\frac{c}{c_{dm}}$  oranının 0.946'dan büyük değerleri hesaba katılarak tasarlanan içi boş dairesel kesitte, her ne kadar maksimum kayma gerilmesinin emniyet gerilmesinin altında olduğu görülse de, tasarıma uygun olarak dairesel kesitin dış ve iç yarıçapları da büyümektedir. Bu durum daha açık şekilde bir örnek üzerinden açıklanabilir. Şöyle ki, istenen  $(1 - \alpha)100\% = \%40$  malzeme tasarrufunu sağlayan en iyi  $\frac{c}{c_{dm}}$  oranı 1.2 dir. Bu durumda,  $\alpha = 0.6$  oranı için, Denklem (15)'e göre  $\frac{t}{c_{dm}} = 0.25$ ,  $c_1 = 55.55$  mm ve  $c_2 = 68.47$  mm olarak hesaplanır. İlginç bir şekilde,  $\frac{c}{c_{dm}} = 0.946$  oranına sahip içi boş dairesel kesit ile aynı malzeme tasarrufu sağlanmasına rağmen,  $\frac{c}{c_{dm}} = 1.2$  olan içi boş dairesel kesitte dış yarıçap  $(68.47 - 57.07) = 11.4$  mm artmıştır. Sonuç olarak, istenen bir  $\alpha$  tasarruf oranını karşılayan en iyi  $\frac{c}{c_{dm}}$  oranına veya boyutsuz kesit parametresine sahip içi boş dairesel kesit, Denklem (17)'de verilen analitik ifadeyi/eşitliği sağlamaktadır.

$$\tau_{max}^{boş} = \tau_{max}^{dolu} \Rightarrow \frac{4T \left[ 4 \left( \frac{c}{c_{dm}} \right)^3 + \alpha \left( \frac{c}{c_{dm}} \right) \right]}{\pi \alpha c_{dm}^3 \left[ \alpha^2 + 16 \left( \frac{c}{c_{dm}} \right)^4 \right]} = \frac{2T}{\pi c_{dm}^3} \quad (17)$$

İçi boş dairesel kesitin boyutsuz  $\frac{c}{c_{dm}}$  parametresi, her bir  $\alpha$  tasarruf oranı için Denklem (18) kullanılarak belirlenebilir.

$$16\alpha \left( \frac{c}{c_{dm}} \right)^4 - 8 \left( \frac{c}{c_{dm}} \right)^3 - 2\alpha \left( \frac{c}{c_{dm}} \right) + \alpha^3 = 0 \Rightarrow \frac{c}{c_{dm}} = f(\alpha) \quad (18)$$

Yukarıda ele alınan örnek değerlerle, Denklem (15) ve Denklem (18) üzerinden yapılan efektif tasarım hesapları Tablo 1'de verilmiştir. Burada dikkat edilmesi gereken önemli bir nokta, "Eşdeğer Kesit 1" ile maksimum kayma gerilmesi dikkate alındığında elde edilen sonuçların, Denklem (9) ve Denklem (10) ile yapılan hesaplamalarla veya Denklem (15) ve Denklem (18) ile yapılan hesaplamalar ile tamamen örtüşüştüğüdür. Bu durum, Örnek 1'de Denklem (9) ve Denklem (10) ile elde edilen sonuçları, Denklem (15) ve Denklem (18) kullanılarak elde edilen ve Tablo 1'de  $\alpha = 0.6$  için verilen değerler ile karşılaştırıldığında açıkça görülmektedir.

**Tablo 1.** Denklem (15) ve Denklem (18) kullanılarak gerçekleştirilen efektif tasarım hesap sonuçları

$\alpha$	$c/c_{dm}$	$t/c_{dm}$	$c$ , mm	$t$ , mm	$c_1$ , mm	$c_2$ , mm	Tasarruf, %
<b><math>T = 6500 \text{ Nm}</math>, <math>\tau_{em} = 30 \text{ MPa}</math>, <math>c_{dm} = 51.67 \text{ mm}</math></b>							
<b>0.4</b>	1.318	0.152	68.101	7.854	64.174	72.028	60
<b>0.6</b>	0.946	0.317	48.880	16.379	40.691	57.070	40
<b>0.8</b>	0.752	0.532	38.856	27.488	25.112	52.600	20
<b>1.0</b>	0.500	1.000	25.835	51.67	0.000	51.670	0

İlgili hesaplama yöntemlerinin açıklanması ve konunun daha iyi anlaşılması amacıyla, Örnek 1'de kapsamlı bir çözüm sunulmuştur.

**Örnek 1:**  $T = 6500$  Nm büyüklüğünde torku aktarmak için, içi boş dairesel kesitin dolu dairesel kesit ile karşılaştırıldığında en kesit alanında  $\%40$ 'lık bir azalma sağlanması hedeflenerek efektif tasarım yapılması istenmektedir. Dairesel kesitlerin üretildiği çelik malzemesi için  $\tau_{em} = 30 \text{ MPa}$ ,  $G = 80 \text{ GPa}$ ,  $\theta_{em} = 0.5^\circ/m = 8.73 \cdot 10^{-3} \text{ rad/m}$  değerleri verilmiştir [28,29].

1. Mukavemet ve deformasyon kriterlerine göre içi dolu referans kesitin yarıçapı:

$$c_{dm} = \sqrt[3]{\frac{2T}{\pi\tau_{em}}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 6500 \cdot 10^3}{\pi \cdot 30}} = 51.67 \text{ mm}$$

$$c_{dd} = \sqrt[4]{\frac{2T}{\pi\theta_{em}G}} = \sqrt[4]{\frac{2 \cdot 6500 \cdot 10^3}{\pi \cdot 8.73 \cdot 10^{-6} \cdot 80 \cdot 10^3}} = 49.34 \text{ mm}$$

Burada,  $c_{dm} > c_{dd}$  olduğu için, içi dolu referans kesitin yarıçapı  $c_{dm} = 51.67 \text{ mm}$  alınarak efektif tasarım "Eşdeğer Kesit 1" ile maksimum kayma gerilmesine göre yapılacaktır.

2. İçi boş dairesel kesitin efektif en kesit parametreleri:

En kesit alanında %40 düşüş sağlamak için gerekli  $\alpha$  oranı:

$$\alpha = 1 - \frac{\Delta A}{A_{dolu}} = 1 - 0.4 = 0.6$$

$\alpha = 0.6$  oranı ile içi boş dairesel kesitin en kesit parametreleri, Denklem (9) ve Denklem (10) kullanılarak aşağıda verildiği gibi belirlenir.

$$\frac{c_2}{c_{dm}} = \frac{1 + \sqrt{1 + 8\alpha^3}}{4\alpha} = \frac{1 + \sqrt{1 + 8 \cdot 0.6^3}}{4 \cdot 0.6} = 1.105 \Rightarrow c_2 = 57.095 \text{ mm}$$

$$\frac{c_1}{c_{dm}} = \frac{1}{4\alpha} \sqrt{2 + 2\sqrt{1 + 8\alpha^3} - 8\alpha^3} = \frac{1}{4 \cdot 0.6} \sqrt{2 + 2\sqrt{1 + 8 \cdot 0.6^3} - 8 \cdot 0.6^3} = 0.788 \Rightarrow c_1 = 40.716 \text{ mm}$$

3. İçi boş dairesel eşdeğer kesitte rijitlik kontrolü:

$$\theta_{max}^{boş} = \frac{2T}{\pi(c_2^4 - c_1^4)G} = \frac{2 \cdot 6500 \cdot 10^3}{\pi \cdot (57.095^4 - 40.716^4) \cdot 80 \cdot 10^3} = 6.57 \cdot 10^{-6} \frac{\text{rad}}{\text{mm}} < \theta_{em} = 8.73 \cdot 10^{-6} \frac{\text{rad}}{\text{mm}}$$

4. İçi boş eşdeğer kesitte gerilme kontrolü:

$$\tau_{max}^{boş} = \frac{2Tc_2}{\pi(c_2^4 - c_1^4)} = \frac{2 \cdot 6500 \cdot 10^3 \cdot 57.095}{\pi \cdot (57.095^4 - 40.716^4)} = 29.99 \text{ MPa} = \tau_{em} = 30 \text{ MPa}$$

5. İçi boş dairesel eşdeğer kesitte burulma burkulması kontrolü:

$$\frac{c_2}{t} = \frac{c_2}{c_2 - c_1} = \frac{57.095}{57.095 - 40.716} = 3.49 < \left(\frac{c_2}{t}\right)_{max} = 12$$

6. İstenen % 40 malzeme tasarrufunun kontrol edilmesi:

$$A_{dolu} = \pi c_{dm}^2 = \pi \cdot 51.67^2 = 8387 \text{ mm}^2$$

$$A_{boş} = \pi(c_2^2 - c_1^2) = \pi(57.095^2 - 40.716^2) = 5033 \text{ mm}^2$$

$$\Delta A/A_{dolu} = (A_{dolu} - A_{boş})/A_{dolu} = 3354/8387 = 0.40$$

Yukarıdaki hesaplamalardan açıkça anlaşıldığı üzere, "Eşdeğer Kesit 1" ile maksimum kayma gerilmesine göre gerçekleştirilen efektif tasarım istenilen %40 malzeme tasarrufuna cevap vermekte ve karşılamaktadır. Sonuç olarak, önerilen efektif tasarım yöntemiyle  $\tau_{max}^{boş} = \tau_{max}^{dolu} = 30 \text{ MPa}$  ve  $A_{boş} = 0.6A_{dolu}$  şartlarını sağlayan  $c_1 = 40.716 \text{ mm}$  ve  $c_2 = 57.095 \text{ mm}$  boyutlara sahip en uygun içi boş dairesel kesit elde edilmiştir. Fakat, burada önemli bir soru ortaya çıkmaktadır, o da; Elde edilen tasarımın dışında tasarım şartlarını sağlayan başka bir içi boş dairesel kesit mevcut mudur? Bu sorunun cevabını bulabilmek için  $c_1 = 48 \text{ mm}$  ve  $c_2 = 62 \text{ mm}$  olarak alınmış ve bunlara göre hesaplamalar sonucunda maksimum kayma gerilmesi  $\tau_{max}^{boş} = 27.1 \text{ MPa}$  olarak hesaplanmıştır. Bu ölçülere sahip içi boş dairesel kesit  $\tau_{max}^{boş} = 27.1 \text{ MPa} < \tau_{em} = 30 \text{ MPa}$  şartını sağlamaktadır. Fakat, içi dolu dairesel kesitin en kesit alanı ile bu içi boş dairesel kesitin en kesit alanı ( $A_{boş} = 4838 \text{ mm}^2$ ) kıyaslandığında elde edilen malzeme tasarrufu %42.3 olarak hesaplanmıştır. Burada malzeme tasarrufu açısından rastgele seçilen içi boş dairesel kesit daha iyi gibi görünse de aslında % 42.3 malzeme tasarrufu sağlayan ve rastgele seçilen  $c_1 = 48 \text{ mm}$  ve  $c_2 = 62 \text{ mm}$  en kesit ölçüleri önerilen tasarım modeline göre dezavantajlı değerlerdir. Şöyle ki, % 42.3 malzeme tasarrufu elde etmek için geliştirilen tasarım modeline Denklem (9) ve Denklem (10) kullanılarak bu değerler  $c_1 = 42.49 \text{ mm}$  ve  $c_2 = 57.91 \text{ mm}$  olarak hesaplanmıştır. Bu hesaplamalar açıkça göstermiştir ki, içi boş dairesel kesit için rastgele seçilen en kesit ölçü değerleri geliştirilen tasarım modeli ile hem %40 hemde %42.3 malzeme tasarrufu elde etmek için belirlenen en kesit ölçü değerlerinden daha büyüktür.

### 3.2 “Eşdeğer Kesit 1” Tasarım Modeli ile Maksimum Burulma Açısına Göre Efektif Tasarım

Eğer dolu içi dolu referans kesitin deformasyon kriterine göre belirlenen yarıçapı, mukavemet kriterine göre belirlenen yarıçapından büyük olursa ( $c_{dd} > c_{dm}$ ), bu halde içi boş dairesel kesitin efektif en kesit tasarımı, maksimum birim burulma açısına veya rijitlik şartına göre Şekil 2’de gösterilen “Eşdeğer Kesit 1” tasarım modeli üzerinden yapılır. Söz konusu modeli temsil eden Denklem (5)’de verilen analitik ifadeler aşağıda verildiği gibi yeniden düzenlenmiştir.

$$\begin{cases} \frac{2T}{\pi(c_2^4 - c_1^4)G} = \frac{2T}{\pi c_{dd}^4 G} \\ \pi(c_2^2 - c_1^2) = \alpha \pi c_{dd}^2 \end{cases} \quad (19)$$

İçi boş dairesel kesitin efektif en kesit tasarımının esas şartları olarak kabul ve Denklem (19)’da verilen ifadeler, boyutsuz en kesit kesit parametreleri ( $\frac{c_2}{c_{dd}}$  ve  $\frac{c_1}{c_{dd}}$ ) cinsinden Denklem (20)’de verildiği gibi tanımlanmıştır.

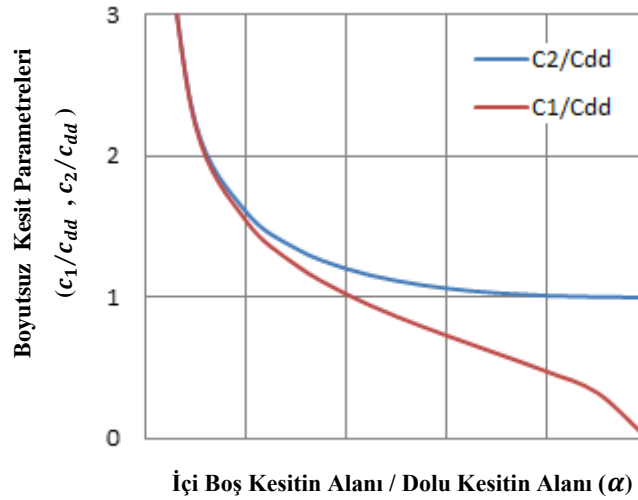
$$\begin{cases} \left(\frac{c_2}{c_{dd}}\right)^4 - \left(\frac{c_1}{c_{dd}}\right)^4 = 1 \\ \left(\frac{c_2}{c_{dd}}\right)^2 - \left(\frac{c_1}{c_{dd}}\right)^2 = \alpha \end{cases} \quad (20)$$

Denklem (20)’de verilen ifadeler birlikte çözüldükten sonra  $c_{dd}$  yarıçapına sahip içi dolu dairesel kesite eşdeğer olan içi boş dairesel kesiti en uygun boyutsuz kesit parametrelerinin belirlenebilmesi için aşağıdaki analitik ifadeler elde edilmiştir.

$$\frac{c_2}{c_{dd}} = \sqrt{\frac{1+\alpha^2}{2\alpha}} \quad (21)$$

$$\frac{c_1}{c_{dd}} = \sqrt{\frac{1-\alpha^2}{2\alpha}} \quad (22)$$

Denklem (21) ve Denklem (22)’de verilen ifadeler kullanılarak çizilen  $\frac{c_2}{c_{dd}} = f(\alpha)$  ve  $\frac{c_1}{c_{dd}} = f(\alpha)$  diyagramları Şekil 7’de verilmiştir.



Şekil 7.  $\frac{c_2}{c_{dd}} = f(\alpha)$  ve  $\frac{c_1}{c_{dd}} = f(\alpha)$  diyagramları

Şekil 7’de sunulan diyagramlardan görüldüğü üzere  $\alpha$  oranının 0.2’den küçük değerlerinde  $\frac{c_2}{c_{dd}} \approx \frac{c_1}{c_{dd}}$  olduğundan, içi dolu dairesel referans kesite alternatif olarak oluşturulan eşdeğer içi boş dairesel kesit, duvar kalınlığı  $t \approx 0$  olan bir çemberden ibaret olmaktadır.  $\alpha$  oranının 0.7’den büyük değerlerinde ise  $\frac{c_2}{c_{dd}} \approx 1$  yani  $c_2 \approx c_{dd}$  olduğundan eşdeğer içi boş dairesel kesit, içi dolu dairesel referans kesitin kendisinden ibaret olmaktadır.

Daha önce de belirtildiği gibi klasik yaklaşıma göre içi boş dairesel kesitlerin tasarımında  $c_2/c_1$  veya  $c_2/t$  oranı giriş parametresi olarak mutlaka önceden verilmelidir. Yalnız bu değerlerin verilmiş olduğu durumlarda  $c_2$  ve  $c_1$  değerleri belirlenebilir ve bu değerler belirlendikten sonra içi dolu dairesel kesitin alanı ile kıyaslanarak elde edilen malzeme tasarrufu hesaplanır. önerilen tasarım modelinde ise bu klasik yaklaşımın aksine tasarımın ana amacı olan malzeme tasarrufunu gösteren  $\alpha$  oranı önceden verilmekte ve istenilen/talep edilen bu tasarrufu karşılayan  $c_2/c_1$  ve  $c_2/t$  oranları en son işlem olarak aşağıda Denklem (23) ve Denklem (24)'de verilen ifadeler kullanılarak belirlenmektedir.

$$\frac{c_2}{c_1} = \sqrt{\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}} \quad (23)$$

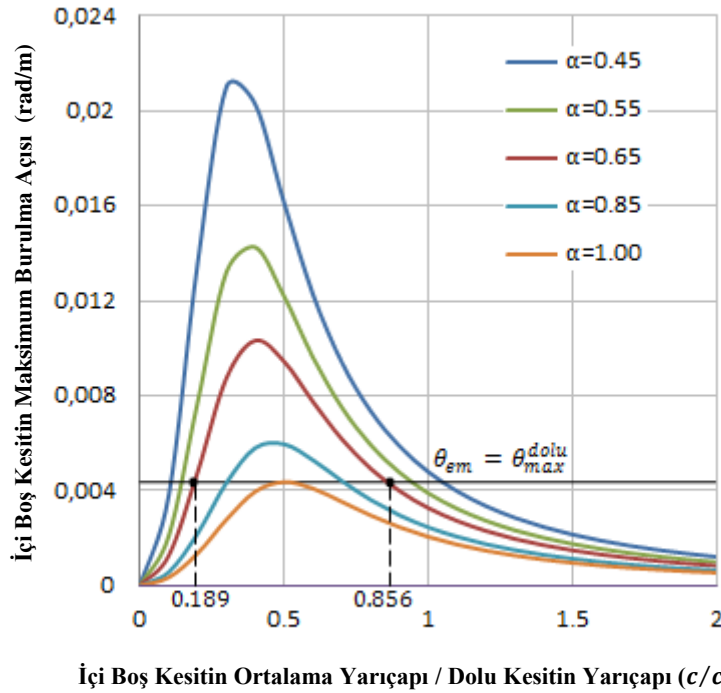
$$\frac{c_2}{t} = \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\sqrt{1+\alpha^2}-\sqrt{1-\alpha^2}} \quad (24)$$

Burada,  $\alpha$  parametresinin alabileceği en küçük değer bilindiğinde, Denklem (23) ve Denklem (24) kullanılarak açılmal deformasyona göre yapılan efektif tasarımın en fazla ne kadar malzeme tasarrufu sağladığı belirlenebilir.  $\alpha$  oranı küçüldükçe elde edilen malzeme tasarrufu  $(1-\alpha)$  büyümekte. Fakat  $\alpha$  oranı 0'a yaklaştıkça,  $c_2/c_1$  oranı 1'e ve  $c_2/t$  oranı ise  $\infty$ 'a yaklaşır. Yani  $\alpha$  oranının çok küçük bir değer alındığı durumlarda içi boş dairesel kesit burulma burkulmasına karşı çok hassas bir yapıya dönüşmüş olur. Buna göre  $(c_2/t)_{max} = 12$  alınarak, Denklem (24)'den  $\alpha_{min} = 0.30$  bulunur. Buradan çıkarılan önemli bir sonuç açılmal deformasyon veya burulma rijitliği şartına göre yapılan efektif tasarımın en fazla  $(1-\alpha)100\% = \%70$  malzeme tasarrufu sağladığıdır.

“Eşdeğer Kesit 1” ile maksimum burulma açısına göre gerçekleştirilen efektif tasarımın içi boş dairesel kesit için en uygun çözüm olduğunu ispatlamak için içi boş dairesel kesitte oluşan maksimum burulma açısı  $\theta_{max}^{boş}$  ve  $\alpha$  tasarruf oranı kesitin ortalama yarıçapı ( $c$ ) ve cidar kalınlığı ( $t$ ) ile Denklem (25)'de verildiği gibi ilişkilendirilmiştir.

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_{max}^{boş} = \frac{2T}{\pi G c_{dd}^4 \left[ 4 \left( \frac{t}{c_{dd}} \right) \left( \frac{c}{c_{dd}} \right)^3 + \left( \frac{c}{c_{dd}} \right) \left( \frac{t}{c_{dd}} \right)^3 \right]} \\ \alpha = 2 \left( \frac{c}{c_{dd}} \right) \left( \frac{t}{c_{dd}} \right) \end{array} \right\} \Rightarrow \theta_{max}^{boş} = \frac{16T \left( \frac{c}{c_{dd}} \right)^2}{\pi \alpha G c_{dd}^4 \left[ 16 \left( \frac{c}{c_{dd}} \right)^4 + \alpha^2 \right]} \quad (25)$$

İçi dolu dairesel kesit ile kıyaslandığında, değişik  $\alpha$  oranlarında malzeme tasarrufu elde etmek için tasarlanan içi boş dairesel kesitte oluşan maksimum kayma gerilmesinin  $\frac{c}{c_{dd}}$  oranına bağlı değişimini gösteren diyagramlar Denklem (25) yardımıyla elde edilmiş ve bu diyagramlar Şekil 8'de gösterilmiştir.



Şekil 8. Değişik  $\alpha$  oranları için  $\theta_{max}^{boş} = f \left( \frac{c}{c_{dd}} \right)$  diyagramları

Şekil 8' de sunulan diyagramların çiziminde  $T = 1200 \text{ Nm}$ ,  $\theta_{em} = 0.25^0/m = 4.36 \cdot 10^{-3} \text{ rad/m}$  ve  $c_{dd} = 38.47 \text{ mm}$  değerleri hesaplamalara katılmıştır. Şekil 8'de verilen diyagramlardan açıkça görüldüğü üzere  $\theta_{em} = \theta_{max}^{dolu}$  yatay doğrusu,  $\alpha$  oranının farklı değerleri için çizilen her bir  $\theta_{max}^{bos} = f\left(\frac{c}{c_{dd}}\right)$  eğrisini iki noktada kesmektedir. Burada, istenen her bir  $\alpha$  tasarruf oranı için bu noktaların apsisi,  $\theta_{max}^{bos} = \theta_{max}^{dolu}$  eşitliğinden elde edilen ve aşağıda verilen denklemin  $\left(\frac{c}{c_{dd}}\right)_1$  ve  $\left(\frac{c}{c_{dd}}\right)_2$  kökleridir.

$$16\alpha \left(\frac{c}{c_{dd}}\right)^4 - 8\left(\frac{c}{c_{dd}}\right)^2 + \alpha^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{c}{c_{dd}}\right)_1 = \left[\frac{1-\sqrt{1-\alpha^4}}{4\alpha}\right]^{\frac{1}{2}} < 0.5, \alpha \in (0 \dots 1) \\ \left(\frac{c}{c_{dd}}\right)_2 = \left[\frac{1+\sqrt{1-\alpha^4}}{4\alpha}\right]^{\frac{1}{2}} \geq 0.5, \alpha \in (0 \dots 1) \end{cases} \quad (26)$$

Denklem (26)'dan açıkça görüldüğü üzere  $\alpha$  oranının  $(0 \dots 1)$  değerleri için  $\left(\frac{c}{c_{dd}}\right)_1 < 0.5$ 'dir, yani  $(c_1 + c_2) < c_{dd}$ 'dir. Bu durum gerçekte içi boş dairesel bir kesit için imkânsızdır ve bu yüzden  $\left(\frac{c}{c_{dd}}\right)_1$  oranı geçerli bir değer değildir. Böylece "Eşdeğer Kesit 1" ile maksimum burulma açısına göre tasarlanan içi boş dairesel kesit için tek geçerli boyutsuz kesit parametresi  $\left(\frac{c}{c_{dd}}\right)_2$ 'dir ve bu en az 0.5 ve üzeri değerler alabilmektedir. Örneğin  $\alpha = 0.65$  için çizilen  $\theta_{max}^{bos} = f\left(\frac{c}{c_{dd}}\right)$  eğrisini kesen ve eğrinin tepesine göre solunda bulunan noktanın apsisi  $\left(\frac{c}{c_{dd}}\right)_1 = 0.189$ , sağında bulunan noktanın apsisi ise  $\left(\frac{c}{c_{dd}}\right)_2 = 0.856$  olmaktadır.  $\left(\frac{c}{c_{dd}}\right)_1 = 0.189$  değeri geçersiz olduğundan efektif tasarımın en uygun boyutsuz parametresi  $\frac{c}{c_{dd}} = 0.856$  alınır ve buna göre Denklem (25) aracılığı ile  $\frac{t}{c_{dd}} = 0.38$  olarak belirlenir.

$\alpha$  oranının izin verilen  $\alpha_{min} = 0.30$ ' dan büyük olan bazı değerleri için Denklem (25) ve Denklem (26) kullanılarak elde edilen efektif tasarım hesap sonuçları Tablo 2 de verilmiştir.

Burada dikkat çekilmesi gereken önemli bir nokta, "Eşdeğer Kesit 1" ile maksimum burulma açısına göre elde edilen ister Denklem (21) ve Denklem (22) isterse de Denklem (25) ve Denklem (26) aracılığı ile yapılan efektif en kesit tasarım sonuçları aynıdır. Bu durum, Örnek 2'de Denklem (21) ve Denklem (22) kullanılarak elde edilen hesap sonuçlarının  $\alpha = 0.65$  için Denklem (25) ve Denklem (26) kullanılarak elde edilen ve Tablo 2'de sunulan hesap sonuçları ile karşılaştırılarak açıklığa kavuşturulmuştur.

**Tablo 2.** Denklem (25) ve Denklem (26) kullanılarak elde edilen efektif tasarım hesap sonuçları

$\alpha$	$c/c_{dd}$	$t/c_{dd}$	$c, \text{ mm}$	$t, \text{ mm}$	$c_1, \text{ mm}$	$c_2, \text{ mm}$	Tasarruf, %
	$T = 1200 \text{ Nm}, \theta_{em} = 0.25^0/m = 4.36 \cdot 10^{-3} \text{ rad/m}, c_{dd} = 38.47 \text{ mm}$						
<b>0.35</b>	1.193	0.167	45.895	6.424	42.683	49.107	65
<b>0.45</b>	1.049	0.214	40.355	8.233	36.239	44.472	55
<b>0.65</b>	0.856	0.380	32.930	14.619	25.621	40.240	35
<b>0.85</b>	0.705	0.603	27.121	23.197	15.523	38.720	15
<b>1.00</b>	0.500	1.000	19.235	38.470	0.000	38.470	0

Konuya ilişkin hesaplama yöntemlerinin daha iyi anlaşılmasına katkı sağlamak amacıyla, Örnek 2'de kapsamlı bir çözüm verilmiştir.

**Örnek 2.**  $T = 1200 \text{ Nm}$  büyüklüğünde torku aktarmak için içi boş dairesel kesitin içi dolu dairesel kesit ile kıyaslandığında kesit alanında % 35 düşüş sağlanması ve buna göre efektif en kesit tasarımının yapılması istenmektedir. Kesitlerin üretildiği çelik malzemesi için  $\tau_{em} = 30 \text{ MPa}$ ,  $G = 80 \text{ GPa}$ ,  $\theta_{em} = 0.25^0/m = 4.36 \cdot 10^{-3} \text{ rad/m}$  değerleri verilmiştir [28,29].

1. Mukavemet ve deformasyon kriterlerine göre içi dolu referans kesitin yarıçapı:

$$c_{dm} = \sqrt[3]{\frac{2T}{\pi\tau_{em}}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 1200 \cdot 10^3}{\pi \cdot 30}} = 29.42 \text{ mm}$$

$$c_{dd} = \sqrt[4]{\frac{2T}{\pi\theta_{em}G}} = \sqrt[4]{\frac{2 \cdot 1200 \cdot 10^3}{\pi \cdot 4.36 \cdot 10^{-6} \cdot 80 \cdot 10^3}} = 38.47 \text{ mm}$$

Burada,  $c_{dd} > c_{dm}$  bulunduğundan dolayı içi dolu referans kesitin yarıçapı  $c_{dd} = 38.47 \text{ mm}$  alınarak efektif tasarım "Eşdeğer Kesit 1" tasarım modeli ile maksimum burulma açısına göre yapılır.

2. İçi boş dairesel kesitin efektif en kesit parametreleri:

En kesit alanında % 35 düşüşü sağlamak için gerekli  $\alpha$  oranı aşağıda verildiği gibi hesaplanır.

$$\alpha = 1 - \frac{\Delta A}{A_{dolu}} = 1 - 0.35 = 0.65$$

Denklem (21) ve Denklem (22) kullanılarak,  $\alpha = 0.65$  oranı için içi boş dairesel kesitin en kesit parametreleri aşağıda verildiği gibi belirlenir.

$$\frac{c_2}{c_{dd}} = \sqrt{\frac{1+\alpha^2}{2\alpha}} = \sqrt{\frac{1+0.65^2}{2 \cdot 0.65}} = 1.046 \Rightarrow c_2 = 40.240 \text{ mm}$$

$$\frac{c_1}{c_{dd}} = \sqrt{\frac{1-\alpha^2}{2\alpha}} = \sqrt{\frac{1-0.45^2}{2 \cdot 0.45}} = 0.666 \Rightarrow c_1 = 25.621 \text{ mm}$$

3. İçi boş dairesel eşdeğer kesitte gerilme kontrolü:

$$\tau_{max}^{boş} = \frac{2Tc_2}{\pi(c_2^4 - c_1^4)} = \frac{2 \cdot 1200 \cdot 10^3 \cdot 40.24}{\pi \cdot (40.240^4 - 25.621^4)} = 14.03 \text{ MPa} < \tau_{em} = 30 \text{ MPa}$$

4. İçi boş dairesel eşdeğer kesitte rijitlik kontrolü:

$$\theta_{max}^{boş} = \frac{2T}{\pi(c_2^4 - c_1^4)G} = \frac{2 \cdot 1200 \cdot 10^3}{\pi \cdot (40.240^4 - 25.621^4) \cdot 80 \cdot 10^3} = 4.36 \cdot 10^{-6} \frac{\text{rad}}{\text{mm}} = \theta_{em}$$

5. İçi boş dairesel eşdeğer kesitte burulma burkulması kontrolü:

$$\frac{c_2}{t} = \frac{c_2}{c_2 - c_1} = \frac{40.240}{40.240 - 25.621} = 2.75 < \left(\frac{c_2}{t}\right)_{max} = 12$$

6. İstenen % 35 malzeme tasarrufunun kontrol edilmesi:

$$A_{dolu} = \pi c_{dd}^2 = \pi \cdot 38.47^2 = 4649 \text{ mm}^2$$

$$A_{boş} = \pi(c_2^2 - c_1^2) = \pi(40.240^2 - 25.621^2) = 3025 \text{ mm}^2$$

$$\Delta A/A_{dolu} = (A_{dolu} - A_{boş})/A_{dolu} = 1624/4649 = 0.35$$

Sonuç olarak "Eşdeğer Kesit 1" tasarım modeli ile maksimum burulma açısına göre yapılan efektif tasarım neticesinde içi dolu dairesel kesit ile kıyaslandığında % 35 oranında malzeme tasarrufu sağlayan  $c_1 = 25.621 \text{ mm}$  ve  $c_2 = 40.240 \text{ mm}$  boyutlara sahip olan en uygun içi boş dairesel kesit tasarlanmıştır.

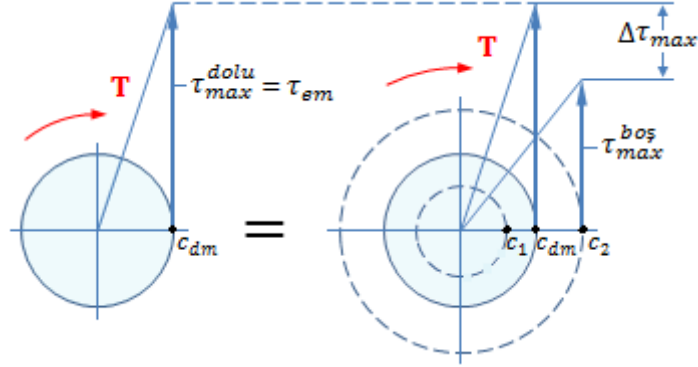
#### 4. "EŞDEĞER KESİT 2" MODELİNE GÖRE GERÇEKLEŞTİRİLEN İÇİ BOŞ DAİRESEL KESİTLERİN EFEKTİF EN KESİT TASARIMI

"Eşdeğer Kesit 2" modeli üzerinden yapılan efektif tasarım iki şekilde gerçekleştirilebilir: İlk olarak, içi boş dairesel kesitteki maksimum kayma gerilmesinin içi dolu dairesel referans kesitteki maksimum kayma gerilmesinden küçük olduğu kabul edilerek, yani  $\tau_{max}^{boş} = \beta \tau_{max}^{dolu}$  ( $\beta < 1$ ), ya da içi boş dairesel kesitteki maksimum birim burulma açısının içi dolu dairesel referans kesitteki maksimum birim burulma açısından küçük olduğu kabul edilerek, yani  $\theta_{boş} = \beta' \theta_{dolu}$  ( $\beta' < 1$ ) yapılır. Her iki durumda da, referans dolu kesitin alanı, alternatif olarak oluşturulan içi boş dairesel kesitin alanına eşittir, yani  $A_{boş} = A_{dolu}$  dur. "Eşdeğer Kesit 2 ile yapılan efektif tasarım modelleri, matematiksel olarak Denklem (27) ve Denklem (28) ile ifade edilmiştir. Ayrıca, bu modellerin diyagramları Şekil 9 ve Şekil 10'da gösterilmiştir.

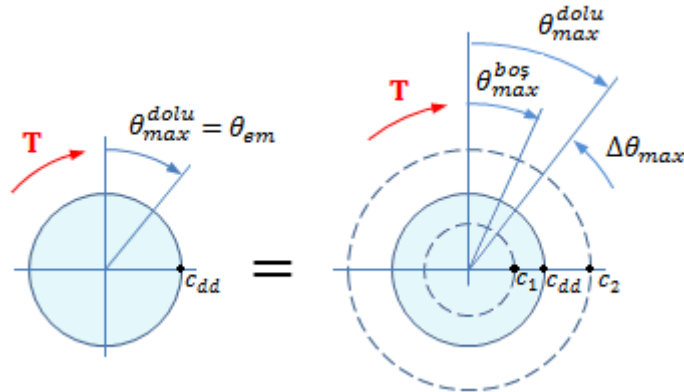
$$\left. \begin{aligned} \tau_{max}^{boş} &= \beta \tau_{max}^{dolu} \\ A_{boş} &= A_{dolu} \end{aligned} \right\}, \text{ eğer } c_{dm} > c_{dd} \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta_{max}^{boş} &= \beta' \theta_{max}^{dolu} \\ A_{boş} &= A_{dolu} \end{aligned} \right\}, \text{ eğer } c_{dm} < c_{dd} \quad (28)$$

Burada,  $\beta$  içi boş dairesel kesitteki maksimum kayma gerilmesinin, içi dolu dairesel kesitteki maksimum kayma gerilmesine oranını belirten bir katsayıdır ve değeri 0 ile 1 arasında değişmektedir ( $\beta = \tau_{max}^{boş}/\tau_{max}^{dolu}$ ). Benzer şekilde,  $\beta'$  içi boş dairesel kesitteki maksimum birim burulma açısının, içi dolu dairesel kesitteki maksimum birim burulma açısına oranını temsil eden bir katsayıdır ve değeri 0 ile 1 arasında değişmektedir ( $\beta' = \theta_{max}^{boş}/\theta_{max}^{dolu}$ ).



Şekil 9. Maksimum kayma gerilmesine göre "Eşdeğer Kesit 2" tasarım modeli



Şekil 10. Maksimum birim burulma açısına göre "Eşdeğer Kesit 2" tasarım modeli

Efektif tasarımın, Denklem (27) ve Denklem (28) üzerinden hangisiyle yapılacağına karar verilmesi, mukavemet ve deformasyon kriterlerine dayalı olarak belirlenen içi dolu dairesel referans kesitin yarıçap değeri ortaya koyacaktır. Şöyle ki, eğer mukavemet şartına göre Denklem (2) ile belirlenen referans içi dolu dairesel kesitin yarıçapı  $c_{dm}$ , burulma rijitliği şartına göre Denklem (3) ile belirlenen  $c_{dd}$  'den büyükse, bu durumda efektif tasarım maksimum kayma gerilmesi açısından Denklem (27) ile yapılmalıdır. Aksi halde, maksimum birim burulma açısına göre Denklem (28) kullanılmalıdır. İlk durumda, efektif tasarımın amacı, eşdeğer içi boş dairesel kesitteki maksimum kayma gerilmesini büyük ölçüde düşürerek mukavemet dayanımı açısından daha zayıf ancak ucuz malzeme seçimini sağlamaktır. İkinci durumda ise, efektif tasarımın amacı, eşdeğer kesitteki burulma açısını düşürerek içi boş dairesel milin burulma rijitliğini istenen seviyeye çıkarmaktır.

#### 4.1 "Eşdeğer Kesit 2" Tasarım Modeli ile Maksimum Kayma Gerilmesine Göre Efektif Tasarım

Eğer referans olarak ele alınan içi dolu dairesel kesitin mukavemet kriterine göre belirlenen yarıçapı, deformasyon kriterine göre belirlenen yarıçapından büyükse ( $c_{dm} > c_{dd}$ ), bu durumda içi boş dairesel kesitin efektif tasarımı, Şekil 10'da verilen "Eşdeğer Kesit 2" tasarım modeli üzerinden maksimum kayma gerilmesine göre yapılacaktır. İlgili modeli temsil eden analitik ifadeler Denklem (27) 'de verilmiştir.

$$\begin{cases} \frac{2Tc_2}{A(c_2^2 + c_1^2)} = \beta \frac{2T}{Ac_{dm}} \\ \pi(c_2^2 - c_1^2) = \pi c_{dm}^2 \end{cases} \quad (29)$$

Burada,  $A$  içi dolu dairesel referans kesitin ve ona alternatif olarak tasarlanan içi boş dairesel kesitin birbirine eşit olan en kesit alanıdır ( $A_{boş} = A_{dolu} = A$ ). Efektif tasarımının esas şartları olarak kabul edilen ve Denklem (29)'da verilen eşitlikler boyutsuz kesit parametreleri ( $\frac{c_2}{c_{dm}}$  ve  $\frac{c_1}{c_{dm}}$ ) cinsinden aşağıda verildiği gibi tanımlanmıştır.

$$\begin{cases} \left(\frac{c_2}{c_{dm}}\right)^2 + \left(\frac{c_1}{c_{dm}}\right)^2 = \frac{1}{\beta} \left(\frac{c_2}{c_{dm}}\right) \\ \left(\frac{c_2}{c_{dm}}\right)^2 - \left(\frac{c_1}{c_{dm}}\right)^2 = 1 \end{cases} \quad (30)$$

Denklem (30)'da verilen eşitliklerin birlikte çözülmesiyle içi boş dairesel kesitin boyutsuz kesit parametrelerinin ( $\frac{c_2}{c_{dm}}$  ve  $\frac{c_1}{c_{dm}}$ ) belirlenmesi için Denklem (31) ve Denklem (32)'de verilen analitik ifadeler türetilmiştir.

$$\frac{c_2}{c_{dm}} = \frac{1 + \sqrt{1 + 8\beta^2}}{4\beta} \quad (31)$$

$$\frac{c_1}{c_{dm}} = \frac{1}{4\beta} [2 + 2\sqrt{1 + 8\beta^2} - 8\beta^2]^{1/2} \quad (32)$$

$\frac{c_2}{c_{dm}}$  ve  $\frac{c_1}{c_{dm}}$  boyutsuz kesit parametrelerinin  $\beta$  oranına bağlı değişim diyagramları “Eşdeğer Kesit 1” tasarım durumundakiler ile hemen hemen aynı olduğu için burada verilmesine gerek görülmemiştir. Fakat, “Eşdeğer Kesit 2” ile maksimum kayma gerilmesine göre yapılan efektif tasarımın sağlayacağı maksimum malzeme tasarrufu nedir sorusu burada cevaplanması gereken önemli bir soru olarak ortaya çıkmaktadır. Bu soruyu cevaplandırmak için  $\frac{c_2}{t}$  oranının bilinmesi gerekir. Bu ilgili oran, Denklem (31) ve Denklem (32) yardımıyla aşağıda verildiği gibi belirlenmiştir.

$$\frac{c_2}{t} = \frac{1 + \sqrt{1 + 8\beta^2}}{1 + \sqrt{1 + 8\beta^2} - \sqrt{2 + 2\sqrt{1 + 8\beta^2} - 8\beta^2}} \quad (33)$$

“Eşdeğer Kesit 2” ile maksimum kayma gerilmesine göre tasarlanan içi boş dairesel kesitte burulma burkulmasının meydana gelmemesi için Denklem (33)'de  $(c_2/t)_{max} = 12$  alınarak  $\beta$  oranının izin verilen minimum değeri  $\beta_{min} = 0.22$  bulunur. Yani “Eşdeğer Kesit 2” ile maksimum kayma gerilmesine göre yapılan efektif tasarım en fazla  $(1 - \beta)100\% = \%78$  gerilme tasarrufu sağlayabilmektedir. Maksimum kayma gerilmesindeki azalma miktarı ise Denklem (34) aracılığı ile belirlenebilir.

$$\frac{\Delta\tau_{max}^{dolu}}{\tau_{max}^{dolu}} = 1 - \beta \Rightarrow \Delta\tau_{max} = (1 - \beta)\tau_{em} \quad (34)$$

Maksimum kayma gerilmesinde elde edilen  $\Delta\tau_{max}$  düşüşüne göre, içi boş dairesel kesitte kullanılan malzemenin mukavemet dayanımı, içi dolu dairesel kesitte kullanılan daha dayanıklı ve pahalı malzemenin daha düşük seçilerek maliyet avantajı sağlanmış olur. Acaba maksimum kayma gerilmesine göre tasarlanan içi boş dairesel kesitin burulma rijitliğinde içi dolu dairesel kesit ile kıyaslandığında nasıl bir değişiklik olur sorusu önemli bir sorudur ve bu soru aşağıda yapılan matematiksel işlemler aracılığı ile cevaplanmıştır.

$$\left. \begin{cases} \tau_{max}^{boş} = \frac{2Tc_2}{\pi(c_2^2 - c_1^2)} = c_2 G \theta_{max}^{boş} \\ \tau_{max}^{dolu} = \frac{2T}{\pi c_{dm}^3} = c_{dm} G \theta_{max}^{dolu} \end{cases} \right\} \Rightarrow \frac{\theta_{max}^{boş}}{\theta_{max}^{dolu}} = \frac{1}{(c_2/c_{dm})} \frac{\tau_{max}^{boş}}{\tau_{max}^{dolu}} \Rightarrow \beta' = \frac{\beta}{(c_2/c_{dm})} \quad (35)$$

Son eşitlikte  $c_2/c_{dm} > 1$  ve  $\beta < 1$  olduğu için  $\beta' < 1$  olduğu açıktır. Yani “Eşdeğer Kesit 2” tasarım modeli aracılığıyla maksimum kayma gerilmesinde  $\beta$  oranında azalmanın sağlanmasıyla tasarlanan içi boş dairesel kesit, içi dolu dairesel kesite göre

her zaman daha düşük açı değerlerinde burulacaktır. Bu durumda maksimum burulma açısında ortaya çıkan düşüş miktarı ve burulma rijitliğinde ortaya çıkan artış miktarı Denklem (36) ve Denklem (37)'de verilen analitik ifadeler kullanılarak belirlenebilir.

$$\Delta\theta_{max} = \theta_{max}^{dolu} - \theta_{max}^{bos} = (1 - \beta')\theta_{max}^{dolu} = \left[1 - \frac{4\beta^2}{1+\sqrt{1+8\beta^2}}\right] \theta_{max}^{dolu} \quad (36)$$

$$\Delta(GI_p) = GI_p^{bos} - GI_p^{dolu} = \left(\frac{1}{\beta'} - 1\right) \frac{T}{\theta_{max}^{dolu}} = \left[\frac{1+\sqrt{1+8\beta^2}}{4\beta^2} - 1\right] \frac{T}{\theta_{max}^{dolu}} \quad (37)$$

Burada,  $GI_p^{dolu}$  ve  $GI_p^{bos}$  sırasıyla referans içi dolu ve eşdeğer içi boş dairesel kesitlerin burulma rijitlikleridir. İçi dolu dairesel kesitteki maksimum kayma gerilmesinde örneğin  $\beta = 0.4$  oranında yani % 60 oranında azalma sağlanmasıyla tasarlanan içi boş dairesel kesitte maksimum burulma açısı % 74.5 oranında azalırken, burulma rijitliği ise % 292 oranında artmaktadır.

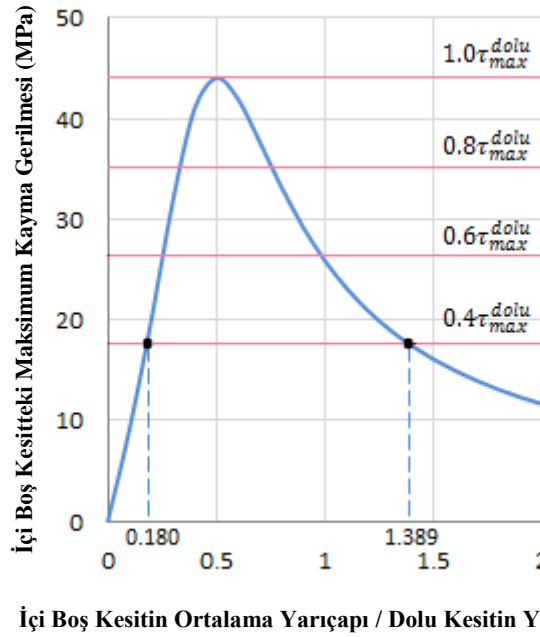
Elde edilen sonuçların içi boş bir dairesel kesit için en uygun çözüm olduğunu gösterebilmemiz için Denklem (27)'de tanımlanan tasarım şartları ( $c/c_{dm}$ ) ve ( $t/c_{dm}$ ) oranları cinsinden aşağıda verildiği gibi yazılmıştır.

$$\left\{ \frac{2T}{\pi c_{dm}^3} \frac{8(c/c_{dm})^3 + 2(c/c_{dm})}{(1 + 16(c/c_{dm})^4)} = \beta \frac{2T}{\pi c_{dm}^3} \right. \quad (38(a))$$

$$\left. 2 \left(\frac{c}{c_{dm}}\right) \left(\frac{t}{c_{dm}}\right) = 1 \right. \quad (38(b))$$

Denklem 38 (a)'nın grafiksel çözümü Şekil 11'de verilmiştir. Diyagramların çiziminde  $T = 18$  kNm,  $\tau_{em} = 44$  MPa ve  $c_{dm} = 63.86$  mm değerleri dikkate alınmıştır. Grafikten görüldüğü üzere, içi dolu dairesel kesit ile kıyaslandığında maksimum kayma gerilmesindeki her bir  $\beta$  düşüş oranına iki farklı ( $c/c_{dm}$ ) boyutsuz kesit parametresi karşılık gelmektedir. Örneğin,  $\beta = 0.4$  düşüş oranına  $c/c_{dm} = 0.180$  ve  $c/c_{dm} = 1.389$  değerleri karşılık gelmektedir. Ancak önceki bölümlerde belirtildiği gibi,  $c/c_{dm}$  oranı yalnızca 0.5'ten büyük değerler alabileceğinden,  $c/c_{dm} = 0.180$  değeri içi boş dairesel kesit için geçerli değildir. Bu nedenle, içi boş dairesel kesitin efektif tasarımı için  $c/c_{dm} = 1.389$  alınarak Denklem (30) yardımıyla  $t/c_{dm} = 0.360$  bulunur. İstenen  $\beta$  oranına karşılık gelen en uygun  $c/c_{dm}$  oranı veya boyutsuz kesit parametresi aşağıda verilen Denklem (39) aracılığıyla belirlenebilir.

$$16\beta \left(\frac{c}{c_{dm}}\right)^4 - 8 \left(\frac{c}{c_{dm}}\right)^3 - 2 \left(\frac{c}{c_{dm}}\right) + \beta = 0 \Rightarrow \frac{c}{c_{dm}} = f(\beta) \quad (39)$$



Şekil 11.  $\tau_{max}^{bos} = \beta\tau_{max}^{dolu}$  denkleminin grafiksel çözümü

Yukarıda dikkate alınan örnek değerler ile Denklem 38(a), Denklem 38(b) ve Denklem (39) üzerinden yapılan efektif tasarım hesap sonuçları Tablo 3'te verilmiştir.

**Tablo 3.** Denklem 38(a), Denklem 38(b) ve Denklem (39) ile yapılan efektif tasarım hesap sonuçları

$\beta$	$c/c_{dm}$	$t/c_{dm}$	$c, \text{ mm}$	$t, \text{ mm}$	$c_1, \text{ mm}$	$c_2, \text{ mm}$	Tasarruf, %
$T = 18000 \text{ Nm}, \tau_{em} = 44 \text{ MPa}, c_{dm} = 63.86 \text{ mm}$							
<b>0.4</b>	1.389	0.360	88.702	22.990	77.207	100.197	60
<b>0.6</b>	0.983	0.508	62.774	32.505	46.553	78.994	40
<b>0.8</b>	0.754	0.663	48.150	42.339	26.981	69.320	20
<b>1.0</b>	0.500	1.000	31.930	63.86	0.000	63.86	0

Burada not etmek gerekir ki, "Eşdeğer Kesit 2" ile maksimum kayma gerilmesine göre elde edilen ister Denklem (31) ve Denklem (32) ile, isterse de Denklem (38) ve Denklem (39) ile yapılan efektif tasarım sonuçları aynıdır. Bunu, Örnek 3'te Denklem (31) ve Denklem (32) ile yapılan hesap sonuçları ile, Denklem (38) ve Denklem (39) ile yapılan ve Tablo 3'te  $\beta = 0.6$  için verilen hesap sonuçlarını karşılaştırılarak doğrulanmıştır. Konuya ilişkin hesaplama yöntemlerinin açıklanması ve daha iyi anlaşılması amacıyla, Örnek 3'te detaylı bir çözüm sunulmuştur.

**Örnek 3.**  $T = 18000 \text{ Nm}$  büyüklüğündeki burulma momentini aktarmak için, en kesit alanı içi dolu dairesel kesitin en kesit alanına eşit olan içi boş dairesel kesitin, maksimum kayma gerilmesinin % 40 oranında düşürülmesi şartıyla efektif tasarımı istenmektedir. Kesitlerin üretildiği çelik Fe 60 malzemesi için kayma akma sınırı  $\tau_{AK} = 220 \text{ MPa}$ ,  $G = 80 \text{ GPa}$ ,  $\theta_{em} = 0.65^\circ/m = 11.34 \cdot 10^{-3} \text{ rad/m}$ , emniyet katsayısı  $S = 5$  değerleri verilmiştir [28,29].

1. Mukavemet ve deformasyon kriterlerine göre içi dolu dairesel referans kesitin yarıçapı:

$$\tau_{em} = \frac{\tau_{AK}}{S} = \frac{220}{5} = 44 \text{ MPa}$$

$$c_{dm} = \sqrt[3]{\frac{2T}{\pi\tau_{em}}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 18000 \cdot 10^3}{\pi \cdot 44}} = 63.86 \text{ mm}$$

$$c_{dd} = \sqrt[4]{\frac{2T}{\pi\theta_{em}G}} = \sqrt[4]{\frac{2 \cdot 18000 \cdot 10^3}{\pi \cdot 11.34 \cdot 10^{-6} \cdot 80 \cdot 10^3}} = 59.62 \text{ mm}$$

Burada,  $c_{dm} > c_{dd}$  olduğu için referans içi dolu dairesel referans kesitin yarıçapı  $c_{dm} = 63.86 \text{ mm}$  alınır.

2. İçi boş dairesel kesitin efektif en kesit parametreleri:

Maksimum kayma gerilmesinde % 40 düşüşü sağlamak için gerekli  $\beta$  oranı :

$$\beta = 1 - \frac{\Delta\tau_{max}}{\tau_{max}} = 1 - 0.4 = 0.6$$

$\beta = 0.6$  için içi boş dairesel kesitin en kesit parametreleri Denklem (31) ve Denklem (32) yardımıyla aşağıda verildiği gibi belirlenir.

$$\frac{c_2}{c_{dm}} = \frac{1 + \sqrt{1 + 8\beta^2}}{4\beta} = \frac{1 + \sqrt{1 + 8 \cdot 0.6^2}}{4 \cdot 0.6} = 1.237 \Rightarrow c_2 = 78.99 \text{ mm}$$

$$\frac{c_1}{c_{dm}} = \frac{1}{4\beta} [2 + 2\sqrt{1 + 8\beta^2} - 8\beta^2]^{1/2} = \frac{1}{4 \cdot 0.6} [2 + 2\sqrt{1 + 8 \cdot 0.6^2} - 8 \cdot 0.6^2]^{1/2} = 0.729 \Rightarrow c_1 = 46.55 \text{ mm}$$

3. İçi boş dairesel eşdeğer kesitte maksimum kayma gerilmesindeki düşüş miktarı:

$$\tau_{max}^{dolu} = \frac{2T}{\pi c_{dm}^3} = \frac{2 \cdot 18000 \cdot 10^3}{\pi \cdot 63.86^3} = 44 \text{ MPa} = \tau_{em}$$

$$\tau_{max}^{boş} = \frac{2Tc_2}{\pi(c_2^4 - c_1^4)} = \frac{2 \cdot 18000 \cdot 10^3 \cdot 78.99}{\pi \cdot (78.99^4 - 46.55^4)} = 26.4 \text{ MPa}$$

$$\Delta\tau_{max} = \tau_{max}^{dolu} - \tau_{max}^{boş} = 44 - 26.4 = 17.6 \text{ MPa}$$

Maksimum kayma gerilmesinde elde edilen bu düşüş Denklem (34) ile aşağıda verildiği gibi kontrol edilir.

$$\Delta\tau_{max} = (1 - \beta)\tau_{em} = (1 - 0.6) \cdot 44 = 17.6 \text{ MPa}$$

4. İçi boş eşdeğer dairesel kesitte maksimum birim burulma açısındaki düşüş miktarı:

$$\theta_{max}^{dolu} = \frac{2T}{\pi c_{dm}^4 G} = \frac{2 \cdot 18000 \cdot 10^3}{\pi \cdot 63.86^4 \cdot 80 \cdot 10^3} = 8.61 \cdot 10^{-6} \text{ rad/mm}$$

$$\theta_{max}^{boş} = \frac{2T}{\pi (c_2^4 - c_1^4) G} = \frac{2 \cdot 18000 \cdot 10^3}{\pi \cdot (78.99^4 - 46.55^4) \cdot 80 \cdot 10^3} = 4.18 \cdot 10^{-6} \text{ rad/mm}$$

$$\Delta\theta_{max} = \theta_{max}^{dolu} - \theta_{max}^{boş} = 8.61 \cdot 10^{-6} - 4.18 \cdot 10^{-6} = 4.43 \cdot 10^{-6} \text{ rad/mm}$$

Yukarıdaki sonucun doğruluğu Denklem (36) ile aşağıda verildiği gibi kontrol edilir.

$$\Delta\theta_{max} = \left[ 1 - \frac{4\beta^2}{1 + \sqrt{1 + 8\beta^2}} \right] \theta_{max}^{dolu} = \left[ 1 - \frac{4 \cdot 0.6^2}{1 + \sqrt{1 + 8 \cdot 0.6^2}} \right] \cdot 8.61 \cdot 10^{-6} = 4.43 \cdot 10^{-6} \text{ rad/mm}$$

“Eşdeğer Kesit 2” ile maksimum kayma gerilmesine göre tasarlanan içi boş dairesel kesitin burulma açısı içi dolu dairesel kesite göre  $(\Delta\theta_{max}/\theta_{max}^{dolu})100\% = \% 51$  oranında düşürülmüştür.

5. İçi dolu dairesel kesit ile karşılaştırıldığında, birim uzunluktaki ( $L = 1 \text{ m}$ ) içi boş dairesel kesitin burulma rijitliğinde ki artış miktarı:

$$GI_p^{dolu}/(L = 1 \text{ m}) = \frac{\pi}{2} c_{dm}^4 G = \frac{\pi}{2} \cdot (63.86 \cdot 10^{-3})^4 \cdot 80 \cdot 10^9 = 2.09 \cdot 10^6 \text{ Nm}$$

$$GI_p^{boş}/(L = 1 \text{ m}) = \frac{\pi}{2} (c_2^4 - c_1^4) G = \frac{\pi}{2} (0.07899^4 - 0.04655^4) \cdot 80 \cdot 10^9 = 4.30 \cdot 10^6 \text{ Nm}$$

$$\Delta(GI_p) = GI_p^{boş} - GI_p^{dolu} = 4.30 \cdot 10^6 - 2.08 \cdot 10^6 = 2.22 \cdot 10^6 \text{ Nm}$$

Elde edilen bu sonuç Denklem (37) ile aşağıda verildiği gibi kontrol edilir.

$$\Delta(GI_p) = \left[ \frac{1 + \sqrt{1 + 8\beta^2}}{4\beta^2} - 1 \right] \frac{T}{\theta_{max}^{dolu}} = \left[ \frac{1 + \sqrt{1 + 8 \cdot 0.6^2}}{4 \cdot 0.6^2} - 1 \right] \frac{18000}{8.61 \cdot 10^{-3}} = 2.22 \cdot 10^6 \text{ Nm/rad}$$

Sonuç olarak “Eşdeğer Kesit 2” ile maksimum kayma gerilmesine göre tasarlanan içi boş dairesel kesitin burulma rijitliği içi dolu dairesel kesite göre  $[\Delta(GI_p)/GI_p^{dolu}]100\% = \% 106$  oranında artırılmıştır.

6. Yeni malzeme seçimi:

"Eşdeğer Kesit 2" kullanılarak yapılan efektif tasarım sonucunda, içi boş dairesel kesitin dış çapı yaklaşık %24 oranında ( $c_2/c_{dm} = 1.237$ ) büyütülmüş ve bu durumda maksimum kayma gerilmesi %40 oranında düşürülmüştür. Elde edilen bu sonuç, içi boş dairesel kesitteki maksimum kayma gerilmesinin en az S katına eşit olan ( $\tau_{AK} \geq S\tau_{max}^{boş}$ ) yeni bir malzeme seçimi yapılmasını mümkün kılmaktadır. Yeni seçilecek malzeme, mevcut Fe 60 malzemesinden daha düşük mukavemete sahip olacağından, aynı zamanda birim fiyatı da daha düşük olacaktır. Yeni malzemenin kayma akma dayanımı  $\tau_{AK} \geq S\tau_{max}^{boş} = 5 \cdot 26.44 = 132.2 \text{ MPa}$ 'dan büyük olmalıdır. Bu koşullara uygun olarak, kayma akma dayanımı  $\tau_{AK} = 140 \text{ MPa}$  olan Fe 37 çeliği seçilebilir.

#### 4.2 “Eşdeğer Kesit 2” Tasarım Modeli ile Maksimum Burulma Açısına Göre Efektif Tasarım

Eğer referans olarak ele alınan içi dolu dairesel kesitin deformasyon kriterine göre belirlenen yarıçapı, mukavemet kriterine göre belirlenen yarıçapından büyük olursa ( $c_{dd} > c_{dm}$ ), bu durumda içi boş dairesel kesitin efektif tasarımı Şekil 10'da verilen "Eşdeğer Kesit 2" tasarım modeli üzerinden maksimum burulma açısına göre yapılır. Bu tasarım modelini temsil eden ve Denklem (28)'de verilen analitik ifadeler aşağıda verildiği gibi yeniden düzenlenmiştir.

$$\begin{cases} \frac{2T}{AG(c_2^2+c_1^2)} = \beta' \frac{2T}{AGc_{dd}^2} \\ \pi(c_2^2 - c_1^2) = \pi c_{dd}^2 \end{cases} \quad (40)$$

İçi dolu dairesel referans kesite alternatif eşdeğer içi boş dairesel kesit için tasarım şartları Denklem (40)'da verilen eşitliklerinden aşağıda verildiği gibi tanımlanmıştır.

$$\begin{cases} \left(\frac{c_2}{c_{dd}}\right)^2 + \left(\frac{c_1}{c_{dd}}\right)^2 = \frac{1}{\beta'} \\ \left(\frac{c_2}{c_{dd}}\right)^2 - \left(\frac{c_1}{c_{dd}}\right)^2 = 1 \end{cases} \quad (41)$$

Denklem (41)'de verilen eşitlikler birlikte çözülerek, boyutsuz kesit parametreleri  $(c_1/c_{dd})$  ve  $(c_2/c_{dd})$  için Denklem (42) ve Denklem (43)'de verilen analitik ifadeler türetilmiştir.

$$\frac{c_2}{c_{dd}} = \sqrt{\frac{1+\beta'}{2\beta'}} \quad (42)$$

$$\frac{c_1}{c_{dd}} = \sqrt{\frac{1-\beta'}{2\beta'}} \quad (43)$$

$\frac{c_2}{c_{dd}}$  ve  $\frac{c_1}{c_{dd}}$  boyutsuz kesit parametrelerinin  $\beta'$  oranına bağlı değişimini gösteren diyagram "Eşdeğer Kesit 1" tasarım durumundaki diyagram ile hemen hemen aynı olduğu için burada verilmesine gerek görülmemiştir. İçi boş dairesel kesitte burulma burkulması meydana gelmesin diye kabul edilen  $(c_2/t)_{max} = 12$  değerine karşılık gelen  $\beta'$  oranının izin verilen minimum değeri Denklem (44) kullanılarak  $\beta'_{min} \approx 0.09$  olarak hesaplanmıştır.

$$\frac{c_2}{t} = \frac{\sqrt{1+\beta'}}{\sqrt{1+\beta'} - \sqrt{1-\beta'}} \quad (44)$$

Elde edilen  $\beta'_{min} \approx 0.09$  sonucunun ortaya koymuş olduğu en önemli sonuçlardan bir "Eşdeğer Kesit 2" ile yapılan efektif tasarımın maksimum birim burulma açısında en fazla %91 tasarruf sağladığıdır. Başka bir ifadeyle, içi dolu dairesel referans kesite alternatif olarak tasarlanan içi boş dairesel eşdeğer kesitte birim burulma açısı en fazla %91 oranında düşürülebilir. Birim burulma açısındaki azalma miktarı Denklem (45) üzerinden kolaylıkla belirlenebilir.

$$\Delta\theta_{max} = (1 - \beta')\theta_{max}^{dolu} = (1 - \beta')\theta_{em} \quad (45)$$

İçi dolu dairesel kesite alternatif olarak tasarlanan içi boş dairesel kesitte birim burulma açısında meydana gelen  $\Delta\theta_{max}$  düşüşüne karşılık gelen burulma rijitliğindeki artış miktarı Denklem (46) kullanılarak hesaplanabilir.

$$\Delta(GI_p) = GI_p^{boş} - GI_p^{dolu} = \left(\frac{1}{\beta'} - 1\right) \frac{T}{\theta_{max}^{dolu}} = \gamma \frac{T}{\theta_{em}} \quad (46)$$

Burada  $GI_p^{dolu}$  ve  $GI_p^{boş}$  sırasıyla içi dolu referans ve içi boş dairesel çubukların burulma rijitlikleri,  $\gamma = \left(\frac{1}{\beta'} - 1\right)$  burulma rijitliğinde ki artış oranıdır. Görüldüğü üzere birim burulma açısındaki  $(1 - \beta')$  oranındaki düşüş, burulma rijitliğinde  $\gamma = \left(\frac{1}{\beta'} - 1\right)$  oranında artışa neden olmaktadır. Acaba bu durumda maksimum kayma gerilmesinde hangi büyüklükte bir azalma meydana gelmektedir sorusu aşağıda yapılan matematiksel işlemler üzerinden cevaplandırılabilir.

$$\left. \begin{aligned} \theta_{max}^{boş} &= \frac{2T}{\pi(c_2^4 - c_1^4)G} = \frac{\tau_{max}^{boş}}{c_2 G} \\ \theta_{max}^{dolu} &= \frac{2T}{\pi c_{dd}^4 G} = \frac{\tau_{max}^{dolu}}{c_{dd} G} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\tau_{max}^{boş}}{\tau_{max}^{dolu}} = \frac{c_2}{c_{dd}} \frac{\theta_{max}^{boş}}{\theta_{max}^{dolu}} \Rightarrow \beta = \frac{c_2}{c_{dd}} \beta' \quad (47)$$

Yukarıda yazılan son eşitlik açıkça göstermektedir ki burulma açısında  $\beta'$  oranında düşüşü sağlayan “Eşdeğer Kesit 2” efektif tasarım modeli, maksimum kayma gerilmesinde bunun  $\frac{c_2}{c_{dd}}$  katı kadar bir düşüşe neden olmaktadır. Maksimum kayma gerilmesindeki bu düşüş miktarı Denklem (48) aracılığı ile belirlenebilir.

$$\Delta\tau_{max} = \left(1 - \frac{c_2}{c_{dd}}\beta'\right)\tau_{max}^{dolu} = \left[1 - \sqrt{\frac{\beta'}{2}(1 + \beta')}\right]\tau_{max}^{dolu} \quad (48)$$

Örneğin  $\beta'$  oranı 0.6 alınarak “Eşdeğer Kesit 2” ile maksimum burulma açısına göre tasarlanan içi boş dairesel kesitte ortaya çıkan maksimum kayma gerilmesi içi dolu dairesel kesitte meydana gelen maksimum kayma gerilmesinden yaklaşık %31 azdır. Hesaplama yöntemlerinin daha iyi anlaşılmasına yardımcı olmak amacıyla, Örnek 4'te kapsamlı bir çözüm verilmiştir.

**Örnek 4.**  $T = 1200$  Nm büyüklüğündeki burulma momentini aktarmak için, en kesit alanı içi dolu dairesel kesitin en kesit alanına eşit olan, içi boş dairesel kesitin burulma rijitliğinin % 65 oranında yükseltilmesi şartıyla efektif tasarımı istenmektedir. Kesitlerin üretildiği çelik malzemesi için  $\tau_{em} = 35$  MPa,  $G = 80$  GPa,  $\theta_{em} = 0.5^0/m = 8.73 \cdot 10^{-3}$  rad/m değerleri verilmiştir [28,29].

1. Mukavemet ve deformasyon kriterlerine göre içi dolu dairesel referans kesitin yarıçapı:

$$c_{dm} = \sqrt[3]{\frac{2T}{\pi\tau_{em}}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 1200 \cdot 10^3}{\pi \cdot 35}} = 27.95 \text{ mm}$$

$$c_{dd} = \sqrt[4]{\frac{2T}{\pi\theta_{em}G}} = \sqrt[4]{\frac{2 \cdot 1200 \cdot 10^3}{\pi \cdot 8.73 \cdot 10^{-6} \cdot 80 \cdot 10^3}} = 32.34 \text{ mm}$$

$c_{dd} > c_{dm}$  olduğu içi dolu dairesel referans kesitin yarıçapı  $c_{dd} = 32.34$  mm alınır.

2. İçi boş dairesel kesitin efektif en kesit parametreleri:

Burulma rijitliğinde % 65 artışı sağlamak için gerekli  $\beta'$  oranı

$$\gamma = \frac{1}{\beta'} - 1 = 0.65 \Rightarrow \beta' = 0.606$$

$\beta' = 0.606$  oranı ile içi boş dairesel kesitin en kesit parametreleri Denklem (42) ve Denklem (43) kullanılarak belirlenir.

$$\frac{c_2}{c_{dd}} = \sqrt{\frac{1+\beta'}{2\beta'}} = \sqrt{\frac{1+0.606}{2 \cdot 0.606}} = 1.151 \Rightarrow c_2 = 37.22 \text{ mm}$$

$$\frac{c_1}{c_{dd}} = \sqrt{\frac{1-\beta'}{2\beta'}} = \sqrt{\frac{1-0.606}{2 \cdot 0.606}} = 0.570 \Rightarrow c_1 = 18.43 \text{ mm}$$

3. İçi boş dairesel eşdeğer kesitte maksimum birim burulma açısındaki düşüş miktarı:

$$\theta_{max}^{dolu} = \frac{2T}{\pi c_{dd}^4 G} = \frac{2 \cdot 1200 \cdot 10^3}{\pi \cdot 32.34^4 \cdot 80 \cdot 10^3} = 8.73 \cdot 10^{-6} \frac{\text{rad}}{\text{mm}} = \theta_{em}$$

$$\theta_{max}^{boş} = \frac{2T}{\pi(c_2^4 - c_1^4)G} = \frac{2 \cdot 1200 \cdot 10^3}{\pi \cdot (37.22^4 - 18.43^4) \cdot 80 \cdot 10^3} = 5.29 \cdot 10^{-6} \text{ rad/mm}$$

$$\Delta\theta_{max} = \theta_{max}^{dolu} - \theta_{max}^{boş} = 8.73 \cdot 10^{-6} - 5.29 \cdot 10^{-6} = 3.44 \cdot 10^{-6} \text{ rad/mm}$$

Bu sonucun doğruluğu Denklem (45) aracılığı ile kontrol edilebilir.

$$\Delta\theta_{max} = (1 - \beta')\theta_{em} = (1 - 0.606) \cdot 8.73 \cdot 10^{-6} = 3.44 \cdot 10^{-6} \text{ rad/mm}$$

4. İçi boş dairesel eşdeğer kesitte maksimum kayma gerilmesindeki düşüş miktarı:

$$\tau_{max}^{dolu} = \frac{2T}{\pi c_{dd}^3} = \frac{2 \cdot 1200 \cdot 10^3}{\pi \cdot 32.34^3} = 22.59 \text{ MPa}$$

$$\tau_{max}^{boş} = \frac{2Tc_2}{\pi(c_2^4 - c_1^4)} = \frac{2 \cdot 1200 \cdot 10^3 \cdot 37.22}{\pi \cdot (37.22^4 - 18.43^4)} = 15.76 \text{ MPa}$$

$$\Delta\tau_{max} = \tau_{max}^{dolu} - \tau_{max}^{boş} = 22.59 - 15.76 = 6.83 \text{ MPa}$$

Elde edilen bu sonucun doğruluğu Denklem (48) ile kontrol edilebilir.

$$\Delta\tau_{max} = \left[ 1 - \sqrt{\frac{\beta'}{2}(1 + \beta')} \right] \tau_{max}^{dolu} = \left[ 1 - \sqrt{\frac{0.606}{2}(1 + 0.606)} \right] \cdot 22.59 = 6.83 \text{ MPa}$$

Burada, efektif tasarım maksimum kayma gerilmesinde ( $\Delta\tau_{max}/\tau_{max}^{dolu}$ ) 100% = %30.2 düşüş sağlamaktadır.

5. İçi dolu dairesel kesit ile kıyaslandığında birim uzunluktaki ( $L = 1 \text{ m}$ ) içi boş dairesel kesitin burulma rijitliğindeki artış miktarı:

$$GI_p^{dolu}/(L = 1 \text{ m}) = \frac{\pi}{2} c_{dd}^4 G = \frac{\pi}{2} \cdot (32.34 \cdot 10^{-3})^4 \cdot 80 \cdot 10^9 = 1.37 \cdot 10^5 \text{ Nm}$$

$$GI_p^{boş}/(L = 1 \text{ m}) = \frac{\pi}{2} (c_2^4 - c_1^4) G = \frac{\pi}{2} (0.03722^4 - 0.01843^4) \cdot 80 \cdot 10^9 = 2.26 \cdot 10^5 \text{ Nm}$$

$$\Delta(GI_p) = GI_p^{boş} - GI_p^{dolu} = 2.26 \cdot 10^5 - 1.37 \cdot 10^5 = 0.89 \cdot 10^5 \text{ Nm}$$

Elde edilen bu sonuç Denklem (46) aracılığı ile kontrol edilebilir.

$$\Delta(GI_p) = \left( \frac{1}{\beta'} - 1 \right) \frac{T}{\theta_{em}} = \left( \frac{1}{0.606} - 1 \right) \frac{1200}{8.73 \cdot 10^{-3}} = 0.65 \cdot 137457 = 0.89 \cdot 10^5 \text{ Nm/rad}$$

Aşağıda verildiği gibi, efektif tasarım ile oluşturulan içi boş dairesel kesitin rijitliğindeki artış oranı, problemin şartında istenen % 65 oran ile örtüşmektedir.

$$\left[ \frac{\Delta(GI_p)}{GI_p^{dolu}} \right] 100\% = \left( \frac{0.89 \cdot 10^5}{1.37 \cdot 10^5} \right) 100\% = \% 65$$

Böylece içi dolu dairesel kesit ile mukayesede kesit alanında her hangi bir artışa gidilmeden tasarlanan içi boş dairesel kesitte oluşan maksimum kayma gerilmesi % 30.2 oranında düşürülmüş ve burulma rijitliğinde ise % 65 oranında artış sağlanmıştır.  $\beta'$  oranının,  $\beta'_{min} \approx 0.09$  dan büyük olan bazı diğer değerleri için yapılan efektif tasarım sonuçları Tablo 4' de verilmiştir. Örneğin  $\beta' = 0.5$  oranı için yapılan hesap sonuçları, içi boş dairesel kesitin içi dolu dairesel kesit ile kıyaslandığında maksimum kayma gerilmesinin % 39 daha düşük, burulma rijitliğinin ise %100 daha büyük ve kesit alanı içi dolu kesitin en kesit alanı ile aynı olmakla birlikte sadece dış yarıçapının %22 daha büyük olduğunu göstermektedir.

**Tablo 4.**  $\beta'$  oranının bazı değerleri için yapılan efektif tasarım sonuçları

İçi boş ve dolu dairesel kesitlerin burulma açı oranları	İçi boş dairesel kesitin iç yarıçapı	İçi boş dairesel kesitin dış yarıçapı	İçi boş ve dolu kesitlerin yarıçap oranları	İçi boş dairesel kesitin cidar kalınlığı	İçi boş dairesel kesitin dış yarıçapının cidar kalınlığına oranı	Maksimum kayma gerilmesindeki azalma oranı	Burulma rijitliğindeki artış oranı
$(\beta')$	$c_1, \text{ mm}$	$c_2, \text{ mm}$	$(c_2/c_{da})$	$t, \text{ mm}$	$(c_2/t)$	$\left(\frac{\Delta\tau_{max}}{\tau_{max}^{dolu}}\right)$	$\left(\frac{\Delta(GI_p)}{GI_p^{dolu}}\right)$
0.1	68.60	75.84	2.35	7.24	10.48	0.77	9.00
0.2	45.74	56.01	1.73	10.27	5.45	0.65	4.00
0.3	34.93	47.60	1.47	12.67	3.76	0.56	2.33
0.5	22.87	39.61	1.22	16.74	2.37	0.39	1.00
0.7	14.97	35.64	1.10	20.67	1.72	0.23	0.43
0.9	7.62	33.23	1.03	25.61	1.30	0.08	0.11
1.0	0	32.34	1.00	32.34	1	0	0

## 5. SONUÇLAR

Bu çalışmada, burulmaya zorlanan içi boş dairesel kesitlerin en uygun en kesit tasarımı için Eşdeğer En Kesit Tasarım Modeli önerilmiştir. İçi dolu dairesel referans kesite alternatif olarak geliştirilen “Eşdeğer Kesit 1” ve “Eşdeğer Kesit 2” tasarım modelleri ile malzeme tasarrufu sağlanırken, burulma rijitliği artırılmıştır. İstenilen mukavemet ve deformasyon kriterlerine göre pratik analitik çözümler türetilmiştir.

“Eşdeğer Kesit 1” tasarım modeli, içi boş dairesel kesitlerin en uygun kesit boyutlarını ( $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_2/t$ ) belirlemek için analitik ifadeler türetmiştir. Maksimum tasarruf oranı %70 olarak belirlenmiş, daha yüksek tasarruf oranlarında burkulma riski meydana geldiği tespit edilmiştir. %70'in üzerindeki tasarruf oranlarında cidar kalınlığı oldukça incelemekte ve kesit burkulma açısından tehlikeli bir yapıya dönüşmektedir. “Eşdeğer Kesit 2” tasarım modeli, maksimum kayma gerilmesi ve burulma açısına göre en uygun kesit parametrelerini belirlemek için analitik ifadeler geliştirmiştir. Maksimum kayma gerilmesine göre tasarlanan kesitte, kayma gerilmesinin %78 oranında azaltılabileceği bulunmuştur. Maksimum burulma açısına göre tasarlanan kesitte, burulma açısının %91 oranında düşürülebileceği ve burulma rijitliğinin de yaklaşık 9 kat artırılabilceği bulunmuştur. “Eşdeğer Kesit 2” tasarım modeliyle tasarlanan içi boş dairesel kesit, içi dolu dairesel kesite kıyasla yarıçapı %22 artarken, maksimum kayma gerilmesi %39 azalmakta ve burulma rijitliği %100 artış göstermektedir. Önerilen modeller, mühendislerin pratik tasarım süreçlerini önemli ölçüde kolaylaştırmakta olup, gelecek çalışmalarda eğilme ve bileşik yüklemeler için de adapte edilebilir. Fakat, bu çalışmada geliştirilen modellerin doğrulaması, ilerleyen çalışmalarda sonlu elemanlar yöntemiyle gerçekleştirilecek ve elde edilen bulgular bu kapsamda ayrıntılı olarak değerlendirilecektir.

## YAZAR KATKILARI

1. Yazar: Çalışmanın fikri temelini oluşturmuş, metodolojiyi tasarlamış, teorik hesaplamaları gerçekleştirmiş, örnek teorik çözümlerini gerçekleştirmiş ve makalenin yazımına katkıda bulunmuştur.
2. Yazar: Literatür taramasını gerçekleştirmiş, örnek teorik hesaplamaları yapmış, sonuçların yorumlanmasına katkıda bulunmuş ve makalenin yazımına destek olmuştur.
3. Yazar: Elde edilen bulguların kapsamlı şekilde değerlendirilmesine destek olmuş, makalenin yazımı ve düzenlemesine katkı sağlamıştır.

## ÇIKAR ÇATIŞMASI

Yazarlar, çıkar çatışması olmadığını beyan etmektedir.

**ETİK**

Bu makalenin yayınlanmasında herhangi bir etik sorun bulunmamaktadır

**KAYNAKLAR**

- [1] Ashby MF. Overview No. 92: Materials and shape. *Acta Metallurgica et Materialia* 1991;39:1025–39. [https://doi.org/10.1016/0956-7151\(91\)90189-8](https://doi.org/10.1016/0956-7151(91)90189-8).
- [2] Chan TM, Gardner L, Law KH. Structural design of elliptical hollow sections: a review. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Structures and Buildings* 2010;163:391–402. <https://doi.org/10.1680/stbu.2010.163.6.391>.
- [3] Wardenier J, Packer JA, Zhao X-L, Van der Vegte GJ. *Hollow sections in structural applications*. Bouwen met staal Rotterdam,, The Netherlands; 2002.
- [4] Devi SM, Devi SV, Singh TG. Behaviour and design of high strength steel circular hollow section member under pure torsion. *Thin-Walled Structures* 2024;195:111387. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.tws.2023.111387>.
- [5] Meng X. Testing, simulation and design of high strength steel tubular elements. Ph.D Dissertation, Imperial College of London, 2020. <https://doi.org/10.25560/84566>.
- [6] Smith A. 100 Years of the Forth Bridge. *Construction History* 1991;7:118–20.
- [7] Gere JM, Timoshenko SP. *Mechanics of Materials*, wadsworth, Inc, Belmont, California 1984:351–5.
- [8] Timoshenko SP, Gere JM. *Theory of elastic stability*. Courier Corporation; 2012.
- [9] Ashby MF. Materials selection in conceptual design. *Materials Science and Technology* 1989;5:517–25. <https://doi.org/10.1179/mst.1989.5.6>.
- [10] Ashby MF. Overview No. 80: On the engineering properties of materials. *Acta Metallurgica* 1989;37:1273–93. [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(89\)90158-2](https://doi.org/10.1016/0001-6160(89)90158-2).
- [11] Devi SV, Singh KD. The continuous strength method for circular hollow sections in torsion. *Eng Struct* 2021;242:112567. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.112567>.
- [12] Ghavami P. Torsion in Circular Sections. In: Ghavami P, editor. *Mechanics of Materials: An Introduction to Engineering Technology*, Cham: Springer International Publishing; 2015, p. 163–76. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-07572-3\\_7](https://doi.org/10.1007/978-3-319-07572-3_7).
- [13] Devi SV, Singh TG, Singh KD. Cold-formed steel square hollow members with circular perforations subjected to torsion. *J Constr Steel Res* 2019;162:105730. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2019.105730>.
- [14] Ridley-Ellis DJ, Owen JS, Davies G. Torsional behaviour of rectangular hollow sections. *J Constr Steel Res* 2003;59:641–63. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0143-974X\(02\)00060-3](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0143-974X(02)00060-3).
- [15] Han L-H, Yao G-H, Tao Z. Performance of concrete-filled thin-walled steel tubes under pure torsion. *Thin-Walled Structures* 2007;45:24–36. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.tws.2007.01.008>.
- [16] Beck J, Kiyomiya O. Fundamental pure torsional properties of concrete filled circular steel tubes. *Doboku Gakkai Ronbunshu* 2003;2003:285–96.
- [17] Byrne JG, Carré BA. Torsional Stress Concentrations at Rounded Corners of Rectangular Hollow Sections. *Journal of Mechanical Engineering Science* 1962;4:334–40. [https://doi.org/10.1243/JMES\\_JOUR\\_1962\\_004\\_045\\_02](https://doi.org/10.1243/JMES_JOUR_1962_004_045_02).
- [18] Abramyan BL. Torsion and bending of prismatic rods of hollow rectangular section. 1951.
- [19] Marshall J, Engineering U of StrathclydeD of C. Aspects of Torsion of Structural Rectangular Hollow Sections. 1972.
- [20] Marshall J. Derivation of Torsion Formulas for Multiply Connected Thick-Walled Rectangular Sections. *J Appl Mech* 1970;37:399–402. <https://doi.org/10.1115/1.3408519>.
- [21] Arrayago I, Rasmussen KJR, Real E. Full slenderness range DSM approach for stainless steel hollow cross-sections. *J Constr Steel Res* 2017;133:156–66. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2017.02.002>.
- [22] Gardner L. The continuous strength method. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Structures and Buildings* 2008;161:127–33. <https://doi.org/10.1680/stbu.2008.161.3.127>.
- [23] Rusch A, Lindner J. Remarks to the Direct Strength Method. *Thin-Walled Structures* 2001;39:807–20. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0263-8231\(01\)00023-4](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0263-8231(01)00023-4).
- [24] Zhang P, Alam MS. Accuracy of Buckling Strength Curves Using Direct Strength Method in Estimating Axial Strengths of Cold-Formed Steel Members under Compression: Critical Review. *Journal of Structural Engineering* 2023;149:04022262.
- [25] Gardner L. The continuous strength method. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Structures and Buildings* 2008;161:127–33.
- [26] Gere JM, Goodno BJ. *Mechanics of Materials*, SI Edition. Cengage Learning; 2012.
- [27] Gere JM, Timoshenko SP. *Mechanics of Materials*. ed. Boston, MA: PWS 1997.
- [28] Bozacı A, Koçaş İ, Çolak ÖÜ. *Makina elemanlarının projelendirilmesi*. Çağlayan Kitabevi; 2012.
- [29] Erdem KOÇ. *Makina Elemanları Çözümlü Problemler*. Akademisyen Kitabevi; 2019.