



Graf Teoride Geometrik Uygulamalar

Cansel AYCAN¹, Hatice Nur KOÇ^{*2}

¹Pamukkale Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 20160, Denizli, TÜRKİYE

²Pamukkale Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 20160, Denizli, TÜRKİYE

¹(ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9893-5642>)

²(ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-6023-7853>)

(Alınış / Received: 21.01.2025, Kabul / Accepted: 28.01.2025, Online Yayınlanma / Published Online: 31.01.2025)

*İlgili yazar ve danışmanı : hkoc182@gmail.com , c_aycan@pau.edu.tr

Öz: Matematiğin hızla gelişen ve geniş uygulama alanlarına sahip bir dalı olan graf teorisi, düğümler ve bu düğümleri birbirine bağlayan kenarların incelenmesi üzerine odaklanmaktadır. Bu çalışmada ilk olarak, Euler'in temelini attığı Königsberg köprü problemi üzerine doğan Graf Teori'nin temel özellikleri tanıtılmıştır. Graf yapılarının temel özellikleri hakkında bilgiler verilmiştir. Aynı zamanda Graf teorisinin kullanım alanları görsellerle zenginleştirilerek açıklanmıştır. Bunun üzerine çalışmanın özgün tarafı olarak Graf Teori'nin geometrik yapılar ile nasıl birleştirilebileceği üzerine geliştirdiğimiz örnekler ve ispatlarıyla birlikte çeşitli özellikleri sunulmuştur. Böylelikle Graf yapılarının teorik çalışmaları açıklayıcı örneklerle zenginleştiren bu çalışma, sadece temel kavramları aydınlatmakla kalmamakta aynı zamanda Graf teorisinin geometrik yapısını anlaşılır kılmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Graf teori, Yönlü graf, Basit graf, Örtü

Geometric Applications in Graph Theory

Abstract: Graph theory, a rapidly evolving branch of mathematics with broad application areas, focuses on the study of nodes and the edges connecting these nodes. In this study, the fundamental characteristics of Graph Theory, which originated from Euler's Königsberg Bridge Problem, are introduced. Basic properties of graph structures are explained. Additionally, the applications of Graph Theory are illustrated and enriched with visual aids. As an original aspect of this work, various examples and proofs are presented to demonstrate how Graph Theory can be combined with geometric structures. Thus, this study not only illuminates fundamental concepts but also makes the geometric structure of Graph Theory comprehensible by enriching theoretical studies of graph structures with illustrative examples.

Keywords: Graph theory, Directed graph, Simple graph, Cover

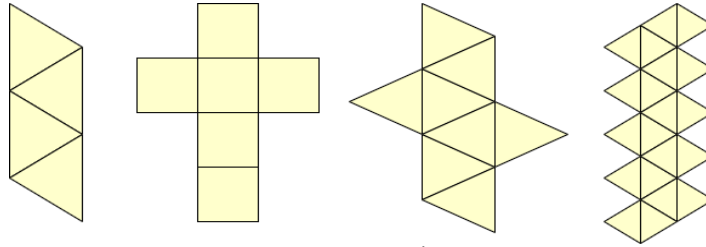
1.Giriş

Graf teorisinin ilk örneği olarak Königsberg köprüleri bilinmektedir. Fakat daha detaylı yapılan araştırmalarda Pisagor'un, bu teori üzerine örnek çalışmalar yaptığı görülmektedir. Antik Yunan'da Pisagorcular, tüm üç boyutlu cisimlerin yalnızca beş farklı türden oluştuğunu belirledi. Sonrasında Plato (Eflatun) öğrencileriyle yaptığı detaylı çalışmalar sonucunda bu cisimleri Platonik Cisimler olarak adlandırdı. Bu çalışmalar düğümler ve kenarlar arasındaki ilişkilerin ilk görselleştirilmiş örnekleri olarak kabul edildi.



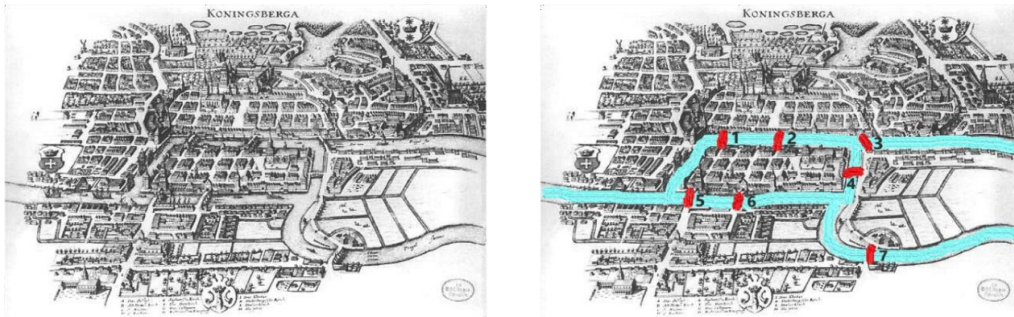
Şekil 1.1. Platonik Cisimlerin Üç Boyutlu Görünümü

Platonik cisimlerin üç boyutlu halinden kenarlarını kesiştirmeden iki boyutlu hale getirmek mümkün olur.



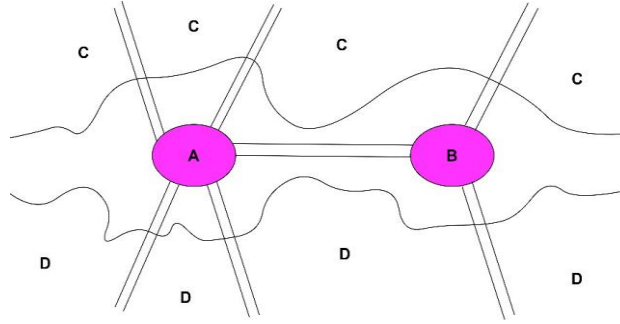
Şekil 1.2. Platonik Cisimlerin İki Boyutlu Görünümü

Platonik cisimlerin kenarlarını kesiştirmeden üç boyuttan iki boyuta indirgeme fikri üzerine çalışarak, bu yaklaşımı bir köprü problemiyle geliştiren ve Graf teorisinin bilinen ilk örneği olan "Königsberg Yedi Köprüsü" çalışmasını 1736 yılında yayımlayan İsviçreli matematikçi Leonhard Euler (1707-1783) olmuştur. Königsberg kentindeki Pregel nehri şehri dört ayrı bölgeye ayırmakta ve bu bölgeler nehrin üzerinde bulunan yedi köprü ile birleşmektedir. Şehirdeki insanların bu köprülerle oynadıkları oyun sonucunda oluşan ve merak edilen problem şöyledir: " Bütün köprüleri yalnızca bir defa kullanmak şartı ile başlanılan noktaya tekrar gelinebilir mi? "



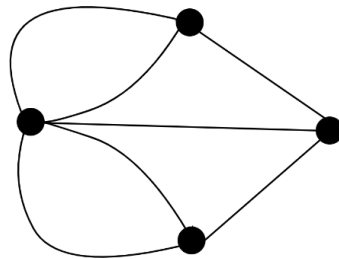
Şekil 1.3. Pregel Nehri Üzerindeki Königsberg Köprüleri

Probleme çözüm arayan Euler, bu problem için çalışmaları sonucunda Graf teorisinin de temellerini atan bilim insanı olmuştur. Köprünün bir farklı görünümü Şekil 1.4. 'teki gibi ifade edilebilir.



Şekil 1.4. Pregel Nehri Üzerindeki Königsberg Köprüleri

Çalışmaları sonucunda böyle bir turun mümkün olmadığını kanıtlayan Euler, problemi daha rahat çalışılabilir bir şekil ile ifade etmiştir. İfadesindeki şekilde noktalar bölgeleri, kenarlar ise köprüleri temsil ederek oluşturulmuştur.



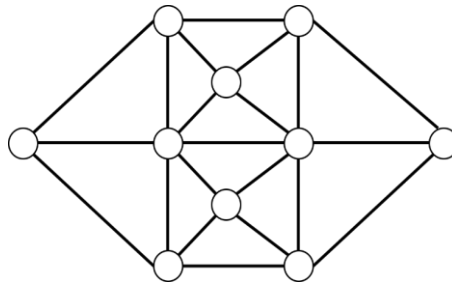
Şekil 1.5. Euler Grafi

1.1 Grafların Kullanım Alanları

Graf Teori Bilgisayar Bilimi ve Algoritmalar, Mühendislik ve İletişim Ağları, Biyoloji ve Sağlık, Kriptografi ve Güvenlik , Yapay Zeka ve Makine Öğrenimi gibi birçok farklı alanda kullanılmaktadır. Günlük hayatımızda graflar haritaların, yolların, güzergâhların çiziminde kullanılır.

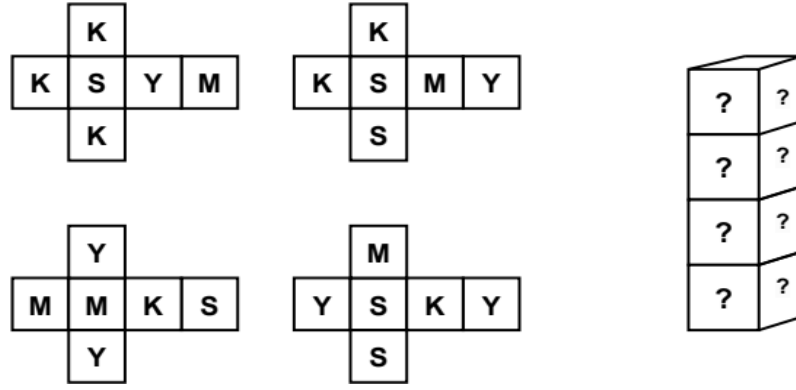
Birçok bulmacanın çözümü de Graf Teorideki kavramlar yardımıyla bulunabilir. Bunlar; Sekiz Çember problemi, Dört Küp problemi, Hampton Court Labirenti'dir.

Sekiz çember probleminde şekil 1.6'daki gösterilen sekiz tane çemberin içine 1,2,3,4,5,6,7 ve 8 rakamlarını, hiçbir şekilde bir fazlası ve bir eksiği ile bağlantılı olmayacak şekilde konumlandırıp konumlandırılmayacağını sorgulamaktadır. Her ihtimale bakmak gerekirse $8!=40320$ deneme yapılması gerekir fakat bunun kolay olmayacağı aşikârdır. Graf teori yardımıyla daha kolay bir şekilde çözülebilmektedir.



Şekil 1.6. Sekiz Çember Problemi

Dört küp problemindeki amaç; şekil 1.7'deki gibi açılımı gösterilen kırmızı, yeşil, mavi, sarı olarak dört farklı renk ile boyalı olan küpleri yine şekil 1.7'deki gibi üst üste yerleştirildiğinde her bir taraftan bakıldığında bu dört rengi de görülüp görülemeyeceğini belirlemektir. Dört küp probleminin çözümü ise her bir rengi bir köşe olarak kabul eden birer graf ile simgelenilerek yapılabilir.



Şekil 1.7. Dört Küp Problemi

2. Graf Yapılarda Temel Kavramlar

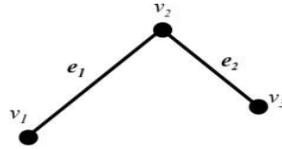
Bu bölümde Graf çeşitleri, Graf yapıların temel tanım ve özellikleri verilmiştir.

2.1.1. Tanım G grafi, nokta ve kenarlardan oluşan bir yapıdır. Şöyle ki, elemanları düğüm (nokta) olarak adlandırılan sonlu ve boş olmayan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ kümesi ile sonlu ve boş olmayan elemanları ise kenar olarak adlandırılan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ kümesinden oluşur.

$G = (V(G), E(G))$ şeklinde tanımlanır. Daha kısa bir gösterim ile $G = (V, E)$ ya da sadece G ile gösterilir. Bir grafi çizmek için düğüm(nokta) ile bu düğümler arasında geçişi sağlayan kenarlar gereklidir. Fakat bu düğüm ve kenarlar ile oluşturulabilecek graflar tek değildir (Demir,2021).

2.1.2. Tanım Bir $G = (V, E)$ grafında, aşağıdaki özelliği sağlayan iki noktaya komşu denir.

- G grafına ait olan iki noktayı birleştiren en az bir kenar vardır. G grafından alınan bir v_i noktasına komşu olan tüm noktalara, v_i noktasının bir komşuluğu denir.

Şekil 2.1.1. G grafi

Şekil 2.1.1 deki graftaki komşulukları;

$$\begin{aligned} e_1 &= v_1 v_2 \\ e_2 &= v_2 v_3 \end{aligned}$$

olduğundan v_1 ve v_2 noktaları ile v_2 ve v_3 noktaları komşudur. v_1 ile v_3 noktaları arasında bu noktaları birleştiren bir kenar bulunmadığından v_1 ile v_3 noktaları komşu değildir (Şentürk, 2024).

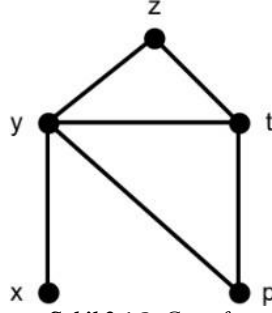
2.1.3. Tanım Bir grafta ortak noktaya sahip olan kenarlara bitişik kenarlar denir. Ayrıca herhangi bir $G = (V, E)$ grafında herhangi bir kenardan çizilebilen kenar sayısı, o noktanın derecesi olarak adlandırılır. Bu kenara v dersek $d(v)$ ile gösterilir. Bir grafın derecesi en küçük olan noktasına minimum dereceli nokta denir ve bir G grafının minimum dereceli noktasının derecesi $\delta(G)$ ile gösterilir. Bir grafın derecesi en büyük olan noktasına maksimum dereceli nokta denir ve bir G grafının maksimum dereceli noktasının derecesi $\Delta(G)$ ile gösterilir. $G = (V, E)$ bir graf olsun. Grafta bir noktanın derecesi 0 ise bu noktaya izole nokta denir. $u \in V$ için $d(u) = 1$ ise u ya sarkık nokta denir (West, 2001; Sunar, 2021).

2.1.4. Tanım Bir G grafına ait iki nokta arasına birden çok kenar çizilebiliyor ise, buna katlı kenarlar denir. G grafında bir kenarın uç noktaları aynı olursa bu kenar ilmek adını alır (Sunar, 2021; Vasudev,2006).

2.1.5. Tanım Bir grafın nokta sayısı; $|V|$ ve kenar sayısı; $|E|$ şeklinde gösterilir ve bir G grafının nokta sayısı ve kenar sayısı sonlu ($|V| < \infty$ ve $|E| < \infty$) ise sonlu graf denir (Sunar, 2021; Vasudev,2006).

2.1.6. Tanım Bir G grafında $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$ sonlu kenar dizisine yürüme(tur) denir. Bir yürüme(tur) $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow \dots \rightarrow v_n$ şeklinde de gösterilir. Burada önemli olan art arda gelen düğümler (noktalar) komşu olmalıdır. Bir yürümede(tur) çizilebilen kenarların hepsi birbirini tekrar etmiyor ise buna iz denir. Tüm noktaları farklı olan ize yol denir. Devir ise aşağıdaki komşuluğu sağlayan ize denir;

- En az bir kenar içerir.
- Başlangıç ve bitiş noktası aynı olan izdir (Demir,2021; Wilson, 1996).



Şekil 2.1.2. G grafi

Örnek vermek gerekirse şekil 2.1.2'deki

$x \rightarrow y \rightarrow p \rightarrow t$ yürüme,
 $t \rightarrow p \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow t \rightarrow y$ iz,
 $z \rightarrow t \rightarrow p \rightarrow y \rightarrow x$ yol,
 $y \rightarrow p \rightarrow t \rightarrow y$ ise bir devirdir .

2.1.7. Tanım $G=(V,E)$ bir bağlı graf olsun. G grafına ait $P(v_1, v_2)$ yollarının uzunluklarının minimumuna v_1 ve v_2 düğümleri arasındaki uzaklık denir ve $d(v_1, v_2)$ notasyonu ile gösterilir (West, 2001; Sunar, 2021).

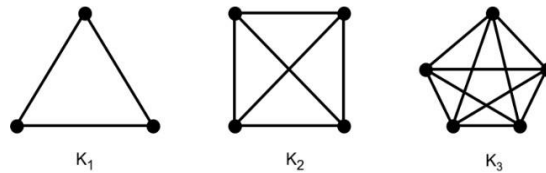
2.2. Graf Çeşitleri

2.2.1 Tanım Katlı kenar ve ilmek bulundurmeyen grafa basit graf denir.Eğer bir graf ilmek içeriyor ise buna yalancı graf (pseudo graf),denir. Eğer bir graf katlı kenar içeriyor ise buna da çoklu graf (multi graf) adı verilir (Sunar, 2021; Vasudev,2006).



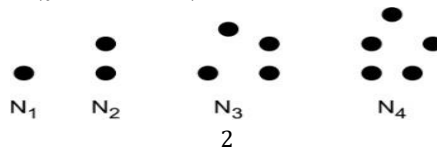
Şekil 2.2.1 Kenarlarına Göre Graf Çeşitleri (Basit Graf, Multi Graf, Yalancı Graf)

2.2.2 Tanım Bir grafın tam graf olması için,bu grafda alınan iki nokta arasında mutlaka bir kenar çizilebilmelidir. n noktalı bir tam graf K_n ile gösterilip, bu grafa ait bir noktanın derecesi ise $(n - 1)$ dir (Eroğlu, 2021). Tam grafların kenar sayısı $\frac{n(n-1)}{2}$ ile bulunabilir (Şentürk, 2024).



Şekil 2.2.2. Tam Graf Örnekleri

2.2.3. Tanım Sadece izole nokta veya düğümlerden oluşan dolayısıyla düğüm dereceleri sıfır olan grafa sıfır (null) graf denir. Sıfır graflar N_n ile gösterilir (Şentürk, 2024).



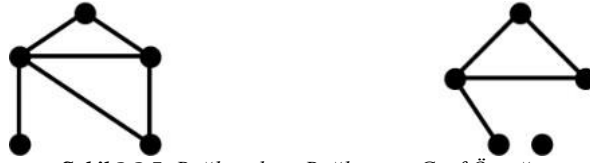
Şekil 2.2.3. Null Graf Örnekleri

2.2.4. Tanım Bir G grafının kenarları belli bir yönde çizilebiliyor ise buna yönlü graf denir. Aksi halde, yani yön belirtmiyorsa yönsüz graf adı verilir (Demir,2021; Wilson, 1996).



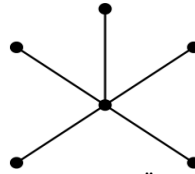
Şekil 2.2.4. Yönsüz ve Yönlü Graf Örneği

2.2.5.Tanım Bir G grafında her iki düğüm arasında bir yol oluşuyorsa buna bağlantılı graf denir. Aksi halde ise bağlantısız graf adı verilir (Demir,2021; Wilson, 1996).



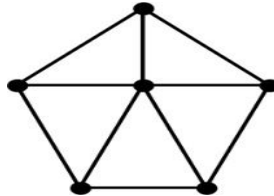
Şekil 2.2.5. Bağlantılı ve Bağlantısız Graf Örneği

2.2.6.Tanım n noktalı birleştirilmiş bir $G = (V, E)$ grafında $n - 1$ nokta bir dereceli ve bir nokta $n - 1$ dereceli ise bu graf yıldız (star) graf adını alır ve $K_{1,n-1}$ ile gösterilir (West, 2001; Armut, 2016).



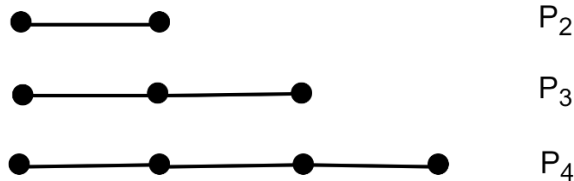
Şekil 2.2.6. Yıldız Graf Örneği $K_{1,5}$

2.2.7.Tanım n noktalı birleştirilmiş bir $G = (V, E)$ grafında, bir noktanın derecesi $n-1$, $n - 1$ adet noktanın dereceleri 3 ise buna tekerlek graf denir, $W_{1,n-1}$ ile gösterilir (West, 2001; Armut, 2016).



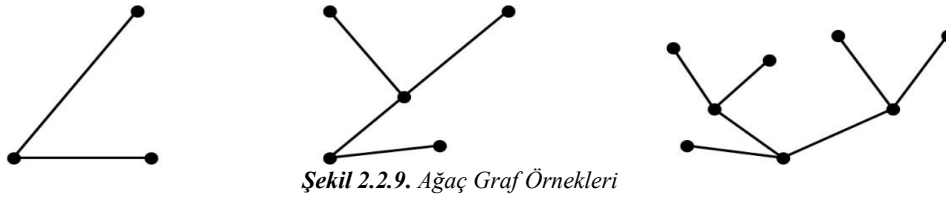
Şekil 2.2.7. Tekerlek Graf Örneği

2.2.8.Tanım Uç noktalarının derecesi 1, diğer tüm noktalarının derecesi 2 olan grafa yol graf denir ve P_n ile gösterilir (Şentürk, 2024).



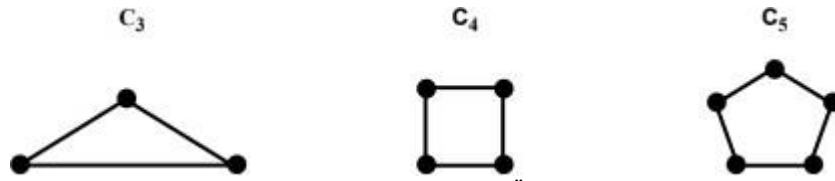
Şekil 2.2.8. Yol Graf Örnekleri

2.2.9. Tanım Ağaç graf devir içermeyen bir graftır. Dolayısıyla en basit ve sade graf çeşididir. Ağaç grafa örnek olarak yol, yıldız ve iki parçalı graflar verilebilir (Eroğlu, 2015).



Şekil 2.2.9. Ağaç Graf Örnekleri

2.2.10. Tanım Bir grafa ait noktaların derecesi 2 ise buna devir graf adı verilir ve C_n ile gösterilir. Bir çevre graf n noktalı ise aynı zamanda n kenarlıdır (Şentürk, 2024).

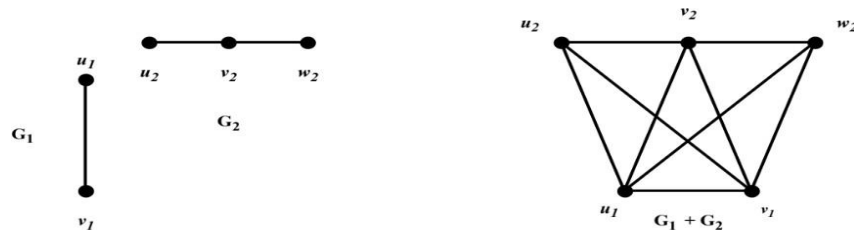


Şekil 2.2.10 Devir Graf Örnekleri

2.3. Graflarda İşlemler

2.3.1. Graflarda Toplama İşlemi G_1 ve G_2 , m ve n noktalı iki graf olsun. G_1 grafi ile G_2 grafinin her bir noktasının, aynı şekilde kenarlarının birleştirilmesiyle elde edilen grafa toplam graf denir ve $G_1 + G_2$ ile gösterilir (Eroğlu, 2015).

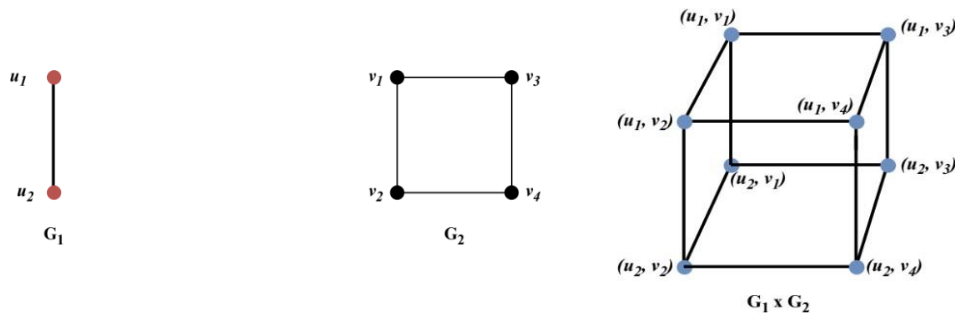
Örneğin şekil 2.3.1'de iki noktalı G_1 grafi ve üç noktalı G_2 graflarına ait $G_1 + G_2$ işlemi gösterilmiştir.



Şekil 2.3.1. $G_1 + G_2$ 'ye Ait Graf

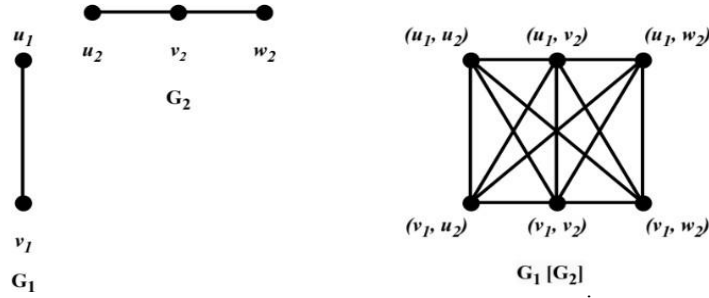
2.3.2. Kartezyen Çarpım G_1 ve G_2 iki basit graf olsun. G_1 grafinin köşe kümesi $V(G_1)$, G_2 grafinin köşe kümesi $V(G_2)$ olmak üzere $V(G_1) \times V(G_2)$ kartezyen kümesinden (u_1, u_2) ve (v_1, v_2) elemanlarını alalım.

Eğer, $u_1 = v_1$ ve u_2, v_2 komşu ise ya da $u_2 = v_2$ ve u_1, v_1 ile komşu ise bu iki nokta bir kenarla birleştirilir ve bu şartlar sağlanıyor ise (u_1, u_2) ile (v_1, v_2) köşeleri komşudur denir. Bu koşullar altında oluşan yeni grafa G_1 ve G_2 grafinin kartezyen çarpımı denir (Tecirli, 2021).



Şekil 2.3.2. $G_1 \times G_2$ Grafi

2.3.3. Graflarda Bileşke İşlemi G_1 'in bir noktası $u = (u_1, u_2)$, G_2 'nin bir noktası $v = (v_1, v_2)$ olmak üzere, eğer u_1 ve v_1 ya da u_2, v_2 noktaları komşu oluyorsa u ile v noktalarının bir kenar ile birleştirilebildiği söylenebilir. Bu şekilde oluşan birleşim grafına G_1 ve G_2 'nin bileşke grafi denir. $G_1[G_2]$ şeklinde gösterilir (Eroğlu, 2015).



Şekil 2.3.3. G_1 ve G_2 Grafları için $G_1[G_2]$ Bileşke İşlemi

2.4. Graflarda Bazı Geometri Yapılar ve Uygulamaları

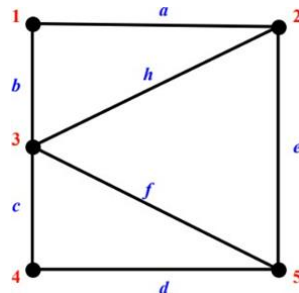
Bu bölümde alt graf, kapalı graf, graflarda örtü gibi kavramları ele aldık. Bu bölümde yapılan çalışmalar ve örnekler graflar üzerine geliştirdiğimiz yeni yorumları içermektedir.

2.4.1. Tanım Herhangi bir G grafinin bir alt grafi; tüm düğümleri G grafinin düğümlerinden, tüm kenarları G grafinin kenarlarından oluşan ve G grafinde bulunan aynı düğüm çiftleriyle bağlantıları olan graftır. G grafinin alt grafini G_{alt} olarak gösterelim. O halde ise $G_{alt} \subset G$ G 'nin alt grafi olarak tanımlanır. G grafinin alt grafları, G grafinin bir parçası olarak da düşünülebilir. Bir başka ifade ile $G_1 = (E_1, V_1)$ ve $G_2 = (E_2, V_2)$ graflarını alalım. Eğer $V_1 \subset V_2$ ve $E_1 \subset E_2$ ise G_1 grafi, G_2 grafinin bir alt grafi olarak kabul edilir. $G_1 \subset G_2$ olarak gösterildiği gibi $G_2 \supset G_1$ olarak da gösterilebilir (Şentürk, 2024).

Alt graflar için şu maddeler geçerlidir;

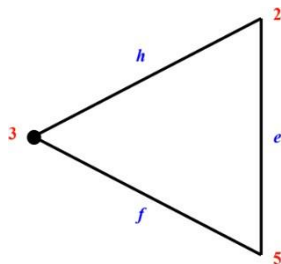
- 1) Her graf kendisinin bir alt grafidir.
- 2) G grafindeki herhangi bir düğüm tek olarak G 'nin alt grafidir.
- 3) G grafindeki bir kenar kendine ait düğüm çifti ile beraber G 'nin alt grafidir (Şentürk, 2024).

Alt graf yapısını daha iyi açıklamak için aşağıdaki örneği inceleyelim. Bu örnekte bir grafa düğüm ve ayrıt silinmesi ile alt grafların nasıl oluşacağını şekiller üzerinde gösterdik.



Şekil 2.4.1. G grafi

$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ düğümler kümesi ve $E = \{a, b, c, d, e, f, h\}$ kenarlar kümesiyle verilen $G = (V, E)$ grafinin,



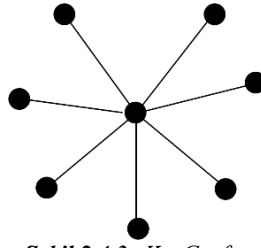
Şekil 2.4.2. Şekil 2.4.1'in Alt Graf Örneği

grafı bir alt grafıdır. Aynı zamanda kendisi ve her bir düğümü tek başına da bir alt grafını oluşturur (Şentürk, 2024).

2.4.2. Tanım G bir graf olsun. V , G 'nin düğümler kümesi ve E , G 'nin kenarlarının kümesi olarak verilsin. $H \subseteq V$, G grafının boş olmayan düğümler kümesinin alt kümesi olsun. G grafında bulunan tüm kenarların en az bir tane uç düğümü bu H kümesinde bulunuyorsa H kümesine örtü kümesi denilir. Yani, G grafında bulunan kenarların tümü H kümesindeki düğümler ile ilişkili olursa buna örtü denir. Bir graf için birden fazla örtü tanımlanabilir. Bir G grafının örtü kümelerinin içinden en az düğüm sayısına G grafının örtü sayısı denilir. Örtü sayısı $\alpha(G)$ şeklinde gösterilir. V sonlu bir küme olduğundan H örtü kümesi de sonlu bir kümedir (Şentürk, 2024).

Aşağıdaki örnekte basit bir graf yapısı için örtüyü ve örtü sayısını inceleyelim.

Örnek 1 $K_{1,7}$ grafının örtü sayısını bulunuz.

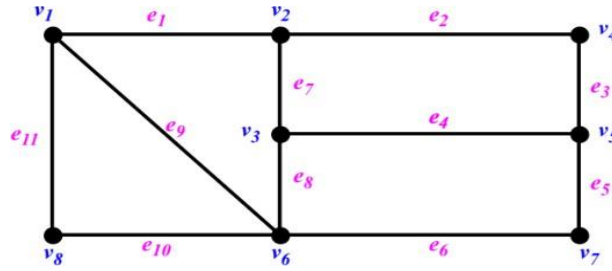


Şekil 2.4.3. $K_{1,7}$ Grafı

$H_1 = \{v_1\}$ benzer şekilde $H_2 = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ farklı örtü kümeleri bulunabilir. En az düğüm sayısı olan kümeyi bulduğumuz için $\alpha(K_{1,7}) = 1$ diyebiliriz (Şentürk, 2024).

Örnek 2 de daha açıklayıcı bir graf modeli geliştirerek bunun üzerinde örtü kavramı ile bu kavramın önemini sunmaya çalıştık.

Örnek 2 Bir grup insan tarafından, şekilde graf modeli verilen yerleşim alanına geri dönüşüm bilincini artırmak amacıyla geri dönüşüm için çöp kutuları konulmak isteniyor. Bununla birlikte yerleşim alanının her ana caddesine en az bir tane geri dönüşüm çöp kutusu koymayı hedefliyorlar. Bu hedefe ulaşabilmek için en az kaç tane geri dönüşüm kutusu gerekir? (Şentürk, 2024).



Şekil 2.4.4. Yerleşim Alanının Graf Modeli

Örnekte istenilen şartlar doğrultusunda verilen grafın örtü sayısını bulmalıyız. Bunun için ise en az düğüm kümesini bulmamız yeterli olacaktır.

Graftaki her ana caddeye en az bir geri dönüşüm çöp kutusu yerleştirmeli ve bununla birlikte bunu en az geri dönüşüm çöp kutusu sayısı ile yapmamız gerekiyor. Seçimlerimizi de bu yönde yapmalıyız.

v_1 düğümünü ele alarak başlayalım. v_1 düğümü; e_1 , e_9 ve e_{11} caddelerinin ortak düğümüdür. v_1 düğümünü seçebiliriz. Böylelikle v_1 düğümünü seçerek üç cadde için en az bir çöp kutusu koymuş oluruz.

v_2 düğümünü ele alalım. v_2 düğümü; e_1 , e_2 ve e_7 caddelerinin ortak düğümüdür. v_2 düğümünü seçmemizin sebebi ise sadece üç caddenin ortak düğümü olması değildir. Bu düğümü seçmediğimiz durumda oluşabilecek düğüm kümesi sayısı fazlalaşacaktır.

v_2 'yi de bu yüzden seçiyoruz. Böylelikle e_2 ve e_7 caddeleri için de geri dönüşüm çöp kutusu en az bir tane olmuş oldu.

v_3 düğümünü seçmememizin sebebi v_2 'yi seçmiş olmamızdır. Çünkü v_3 düğümüne e_7 caddesi bağlı ve e_7 için zaten v_2 'yi seçmiştik. v_3 düğümünü şimdilik ona bağlı olan diğer caddeler için bekletelim.

v_4 'e gelelim. v_4 düğümünü de seçemeyiz. Çünkü v_4 'e bağlı iki caddeden biri için v_2 'yi seçtik. v_4 'ün diğer caddesine v_5 'te bağlıdır.

v_5 düğümünü ele alalım. v_5 düğümü , e_3 , e_4 ve e_5 caddeleriyle bağlı. v_5 'i örtü kümesine alırız. Çünkü v_5 'i alırsak v_3 ve v_4 'ü almamız gerekmez. Dolayısıyla örtü kümemizin eleman sayısını aza indirmiş oluruz.

v_6 düğümüne bakacak olursak, v_6 düğümü , e_6 , e_8 , e_9 ve e_{10} ve caddelerin ortak düğümüdür. v_6 düğümünü alırsak v_7 ve v_8 düğümlerini almamıza gerek kalmaz. Bu düğümler aynı caddeleri olan düğümlerdir ve bir tanesini almamız yeterli olacaktır. Bu nedenle v_6 düğümünü de örtü kümemize dâhil edersek v_7 ve v_8 düğümlerine bakmamıza gerek kalmaz.

Düğümelerin hangilerinin olduğu değil en az sayıda olması önemlidir. Yani v_1 , v_2 , v_5 , v_6 olmalı gibi bir şart yok. En az sayıdaki başka bir düğüm kümesi de oluşturulur ise yine dört elemanlı olacağından örtü sayısı 4'tür. Çözüm yoluyla sonuca ulaştığımızı göre şimdi kısaca ifade etmemiz gerekirse;

$$e_1 \text{ sokağı için } v_1 + v_2 \geq 1$$

$$e_2 \text{ sokağı için } v_2 + v_4 \geq 1$$

$$e_3 \text{ sokağı için } v_4 + v_5 \geq 1$$

$$e_4 \text{ sokağı için } v_3 + v_5 \geq 1$$

$$e_5 \text{ sokağı için } v_5 + v_7 \geq 1$$

$$e_6 \text{ sokağı için } v_6 + v_7 \geq 1$$

$$e_7 \text{ sokağı için } v_2 + v_3 \geq 1$$

$$e_8 \text{ sokağı için } v_3 + v_6 \geq 1$$

$$e_9 \text{ sokağı için } v_1 + v_6 \geq 1$$

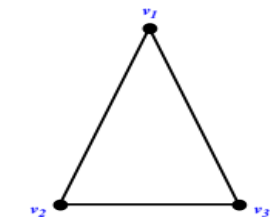
$$e_{10} \text{ sokağı için } v_6 + v_8 \geq 1$$

$$e_{11} \text{ sokağı için } v_1 + v_8 \geq 1$$

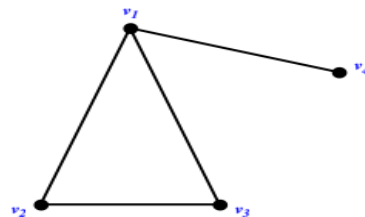
$$H = \{v_1, v_2, v_5, v_6\} \Rightarrow \alpha(G) = 4$$

olarak bulunur (Şentürk, 2024).

2.4.3. Tanım $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ kenar kümesi, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ düğüm kümesi ile oluşan bir G grafında başlangıç düğümü v_0 bitiş düğümü v_n olarak verilsin. Eğer G grafında başlangıç düğümü ile bitiş düğümü aynı olabiliyor iken sallanan kenar (derecesi 1 olan kenar) bulunmuyor ve devir olabiliyor ise bu grafa kapalı graf denir (Şentürk, 2024).



Devir içerir kapalı graftır.

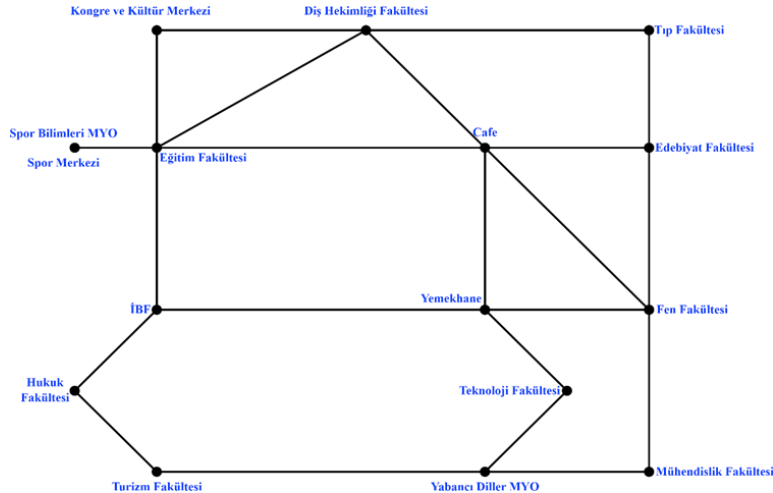


Sallanan kenarı olduğundan kapalı graf değildir.

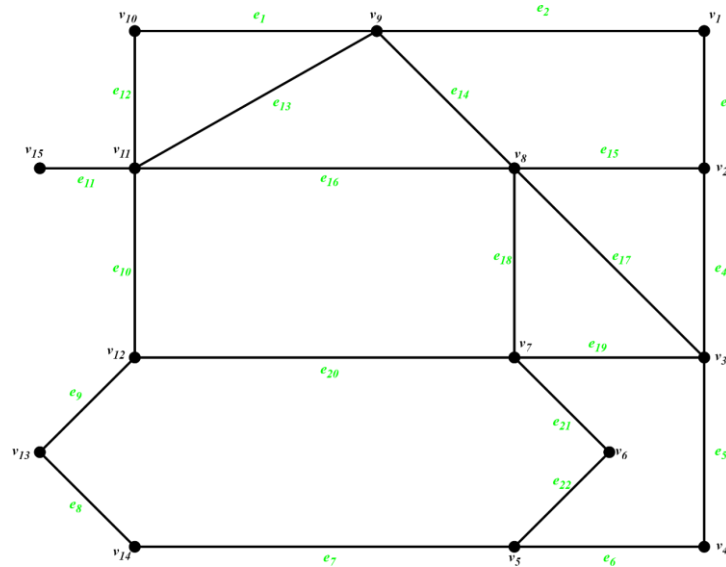
Şekil 2.4.5. Kapalı ve Kapalı Olmayan Graf Örneği

Aşağıdaki örnekte bir kampüs modeline ait graf yapısı geliştirilerek bir alt graf ile kampüsün lokal yerleşimi incelenmiştir.

Örnek 3 Bu örnekte öncelikle bir kampüsü belirli fakülteleri ile görsel olarak tasarladık. Daha sonra bunun graf modelini gösterdik (Şentürk, 2024).



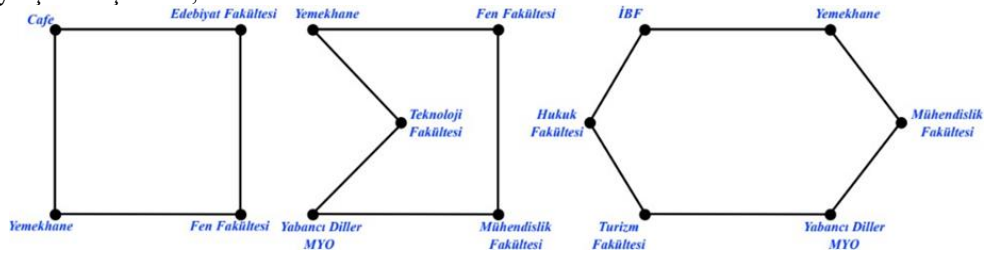
Şekil 2.4.6. Bir Üniversitenin Kampüsünün Graf Gösterimi



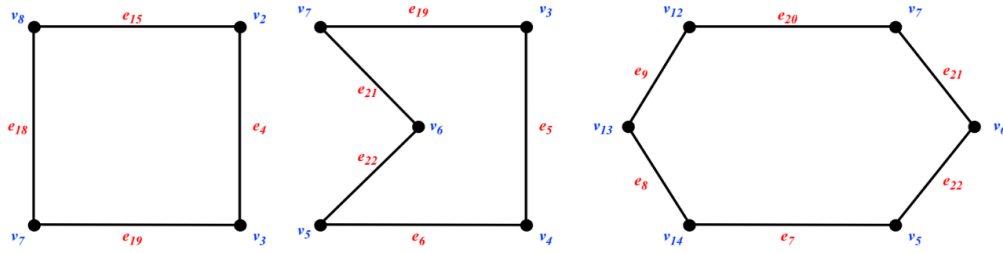
Şekil 2.4.7. Bir Üniversitenin Kampüsünün Graf Gösterimi

Yukarıdaki graf modeli bir üniversitenin kampüsünün bazı fakülteleriyle ve merkez noktalarıyla oluşturulmuştur. Düğümler kampüs içerisindeki konumları, kenarlar ise yolları modellemektedir.

Toplamda 15 adet kenar ve köşe sayısı eşit olan graf içermektedir. Özel olarak örnek vermek istersek bunlardan yemekhaneyi içeren üç tanesi;



Şekil 2.4.8. Kenar ve Köşe Sayısı Eşit Olan Graf Örnekleri



Şekil 2.4.9. Kenar ve Köşe Sayısı Eşit Olan Graf Örnekleri

3. Tartışma ve Sonuç

Graf yapıları ilk önce cebir alanında çalışılmaya başlanmıştır. Günümüzde ulaştırmadan, bilgisayar sistemlerine kadar farklı alanlarda kullanılmaktadır. Bu bağlamda, Graf teorisinin geometrik uygulamalarını daha elementer ve anlaşılır biçimde sunmak adına geliştirdiğimiz örnekler ve özellikleri kullanarak hazırladığımız bu çalışmanın, bu alanda çalışmak isteyen araştırmacılara yeni fikirler vereceği kanaatindeyiz. Çalışma graf yapıların temel özelliklerini içermenin yanı sıra ilk kısımda sunulan tanımlar ve özellikleri detaylı bir şekilde incelenmektedir. Daha sonrasında oluşturduğumuz örnekler geometrik şekiller ile desteklenerek, tüm tanımlamalara günlük hayattan farklı örnekler sunmaktadır.

Teşekkür

Denizli İl Millî Eğitim Müdürlüğü ve editör Dr. Hatice TOZAK'a , Denizli ilinde öğrencilerin bilimsel araştırmalara katılımlarına yönelik dergi çıkarmasına vesile oldukları için teşekkür ederiz.

Etik Beyanı

Bu çalışmada, “Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesi” kapsamında uyulması gerekli tüm kurallara uyulduğunu, bahsi geçen yönergenin “Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiğine Aykırı Eylemler” başlığı altında belirtilen eylemlerden hiçbirinin gerçekleştirilmediğini taahhüt ederiz.

Kaynakça

- [1] Armut, S. (2016). *Maksimum ikili baskınlık sayısının graf işlemleri altında incelenmesi* [Yüksek Lisans Tezi, Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi].
- [2] Demir, A. N. (2021). *Randic etki ve Laplacian etki enerjilerinin genelleştirilmesi* [Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi].
- [3] Eroğlu, H. H. (2015). *Graf teorisinin cebirsel yapıları* [Yüksek Lisans Tezi, Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi].
- [4] Şentürk, A. (2024). *Graf teoride bazı uygulamalar* [Yüksek Lisans Tezi, Pamukkale Üniversitesi].
- [5] Sunar, R. (2021). *Lineer graflar üzerine* [Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi].
- [6] Tecirli, S. (2021). *Graf işlemlerinin bazı cebirsel yapılara uygulaması* [Yüksek Lisans Tezi, Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi].
- [7] Vasudev, C. (2006). *Graph theory with applications*. New Age International.
- [8] West, D. B. (2001). *Introduction to graph theory* (2nd ed.). Prentice Hall.
- [9] Wilson, R. J. (1996). *Introduction to graph theory* (4th ed.).