ISSN 2757-5543 **GÜFFD 6. Cilt (2): 234-243 (2025)** DOI: 10.63716/guffd.1657944

Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Dergisi
https://dergipark.org.tr/tr/pub/guffd

Volterra İntegro-Diferensiyel Denklemlerin Kharrat-Toma Dönüşümü ile Çözümü

Adil Mısır*[1], Fatma Büşra Aktaş[2]

[1]*Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 06500, Ankara, Türkiye*
[2]*Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, 06500, Ankara, Türkiye*

Öne Çıkanlar

- İntegral dönüşümleri, karmaşık diferensiyel ve integro-diferensiyel denklemlerin çözümünde temel bir araçtır
- Kharrat-Toma integral dönüşümü, bu tür denklemler için güçlü bir çözüm yöntemi olarak tanımlanmıştır.
- Çalışmada, Kharrat-Toma dönüşümü ve bu dönüşümden türetilen integral operatörleri detaylı bir şekilde sunulmuştur.
- Kharrat-Toma dönüşümünün yardımıyla, Volterra integro-diferensiyel denklemlerin analitik çözümleri elde edilmiştir.

Makale Bilgileri

Geliş: 14/03/2025
Kabul: 09/09/2025

Anahtar Kelimeler

Diferensiyel Denklemler, Volterra İntegro-Diferensiyel Denklemleri, Kharrat-Toma Dönüşümü

Öz

Bu çalışma, Kharrat-Toma dönüşümünün yardımıyla lineer Volterra integro-diferensiyel denklemlerin çözümüne odaklanmaktadır. Kharrat-Toma dönüşümü, bu tür denklemler için yenilikçi bir yaklaşım olarak sunulmuş ve teorik altyapısı ayrıntılı bir şekilde ele alınmıştır. Çalışmada, dönüşümün integral operatörleri üzerindeki etkisi incelenmiş ve konvolüsyon tipi çekirdekler içeren Volterra integro-diferensiyel denklemlerine uygulanabilirliği başarıyla gösterilmiştir. Yöntemin etkinliği, çeşitli örnek problemler üzerinde test edilmiş ve analitik çözümlerle doğrulanmıştır. Bu çalışma, Volterra integro-diferensiyel denklemlerin çözümünde hesaplama verimliliği sağlayarak literatüre önemli bir katkı sunmaktadır.

Solution of Volterra integro-differential equations with Kharrat-Toma transformation

Highlights

- Integral transforms are fundamental tools for solving complex differential and integro-differential equations.
- The Kharrat-Toma integral transform has been defined as a powerful solution method for such equations.
- In this study, the Kharrat-Toma transform and the integral operators derived from it are presented in detail.
- Analytical solutions of Volterra integro-differential equations have been obtained with the help of the Kharrat-Toma transform.

Article Info

Received: 14/03/2025
Accepted: 09/09/2025

Keywords

Differential Equations, Volterra Integro-Differential Equations, Kharrat-Toma Transform

Abstract

This study focuses on solving linear Volterra integro-differantial equations using the Kharrat-Toma transform. The Kharrat-Toma transform is introduced as an innovative approach for such equations, and its theoretical foundation is discussed in detail. The study examines the impact of the transform on integral operators and successfully demonstrates its applicability to Volterra integro-differantial with convolution-type kernels. The efficiency of the method is tested on various example problems and validated with analytical solutions. This study makes a significant contribution to the literatüre by enhancing computational efficiency in solving Volterra integro-differential equations.

GÜFFD
GAZİ ÜNİVERSİTESİ FEN FAKÜLTESİ DERGİSİ

Araştırma Makalesi

* Sorumlu Yazar/Corresponding Author: Adil Mısır, adilm@gazi.edu.tr

1. GİRİŞ

İntegro-diferensiyel denklemleri hem türev hem de integral terimlerini içeren matematiksel denklemlerdir. Bu tür denklemler, sistemlerin hem geçmiş hem de mevcut durumlarını aynı anda dikkate alarak dinamik süreçlerin modellemesinde kullanılır. Genellikle fizik, mühendislik, biyoloji ve ekonomi gibi alanlarda kullanılan bu denklemler, zamana bakarak süreçlerin geçmiş etkilerini ifade etmek için oldukça çok kullanılır. İntegro-diferensiyel denklemler, belirli bir aralıkta bir fonksiyonun değerleri arasındaki ilişkiyi ifade eden integral terimleri içerdikleri için diferensiyel denklemlerden daha genel bir yapıya sahiptirler. Bu denklemlerle ilgili temel kavramları inceleyen çalışmalar, 19. yüzyılın ortalarında ortaya çıkmıştır. Denklemlerin gelişimi, matematikçilerin diferensiyel denklemler ve integral denklemleri arasındaki ilişkiyi daha derinlemesine anlamalarıyla hız kazanmıştır [1,2]. İntegral ve integro-diferensiyel denklemlerin önemli bir sınıfı Volterra integral veya integro-diferensiyel denklemi olarak bilinmektedir. Genel olarak lineer Volterra integro-diferensiyel denklemi, $u(x)$ fonksiyonu, x bağımsız değişkenine göre n-inci mertebeden türeve sahip bir bilinmeyen fonksiyon, $f(x)$ verilmiş (bilinen) bir fonksiyon, λ, sabit bir parametre ve $K(x,t)$ de x ve t bağımsız değişkenlerine bağlı bir çekirdek fonksiyonu olmak üzere

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)\,u(t)dt, \tag{1.1}$$

şekilde ifade edilir [3].

(1.1) Volterra integro-diferensiyel denklemi $f(x)$'in yapısına göre birinci tür veya ikinci tür olarak adlandırılır. Şöyle ki eğer $f(x) = 0$ ise (1.1) Volterra integro-diferensiyel denklemi

$$u^{(n)}(x) = \lambda \int_0^x K(x,t)\,u(t)dt \tag{1.2}$$

halini alır ve bu denkleme birinci tür lineer Volterra integro-diferensiyel denklemi denir. Eğer $f(x) \neq 0$ ise (1.1) denklemine ikinci tür lineer Volterra integro-diferensiyel denklemi denir [3].

Diferensiyel denklemleri çözmek için birçok yöntem kullanılır. Bu yöntemlerden biride integral dönüşümleri kullanarak diferensiyel denklemi çözme yöntemidir. Bu dönüşümlerden en eski ve en çok kullanılanı 1780'lerde Pierre-Simon de Laplace tarafından tanıtılan Laplace dönüşümüdür. Bu dönüşümlere ait pek çok çalışma vardır [4].

Laplace dönüşümü [4], Elzaki dönüşümü [5], Aboodh dönüşümü [6], Mohand dönüşümü [7], Rahmoh dönüşümü [8] ve Kharrat-Toma dönüşümü [9] gibi birçok integral dönüşümü kullanılarak integro-diferensiyel denklemler çözülebilinir. Mahgob ve Elzaki çalışmalarında, özel bir "bulge" fonksiyonu içeren integro-diferensiyel denklemlerin çözümünde Elzaki dönüşümünü uygulamışlardır [5]. Aboodh dönüşümü ile Adomian ayrıştırma yönteminin birleşimi, lineer ve lineer olmayan integro-diferensiyel denklemlerde başarılı sonuçlar vermiştir [6]. Senthil Kumar ve diğerleri Mohand dönüşümünün lineer Volterra integro-diferensiyel denklemlerin çözümünde kesin sonuçlarını elde etmişlerdir [7]. Farah ve Hamad, Rahmoh integral dönüşümünü integro-diferensiyel denklemlerin çözümünde özellikle Volterra tipi integro-diferensiyel denklemler üzerinde etkili olduğu belirtilmiştir [8].

Kharrat-Toma dönüşümü, diferensiyel ve integral denklemler üzerinde etkili bir çözüm yöntemi olarak geliştirilmiş ve çeşitli disiplinlerde uygulanabilirliği kanıtlanmıştır [10-13]. Literatürde yapılan çalışmalar, bu dönüşümün özellikle nüfus dinamiği, büyüme ve çürüme modelleri, integro-diferensiyel denklemler çözümünde önemli avantajlar sunduğunu göstermektedir [9,11]. Kharrat-Toma dönüşümünün en önemli özelliklerinden biri, geleneksel integral dönüşümlerine kıyasla daha az karmaşık hesaplamalar gerektirmesi ve analitik çözüme ulaşmada kolaylık sağlamasıdır. Özellikle lineer ve lineer olmayan problemlerde etkili bir yöntem sunarak, çözüm süreçlerini hızlandırmaktadır [14].

Kharrat-Toma dönüşümü, evrişim teoremi sayesinde integral operatörlerin çözümünü basitleştirerek Volterra integro-diferensiyel denklemlerine doğrudan uygulanabilmektedir [13]. Laplace ve Sumudu dönüşümlerine kıyasla daha az hesaplama gerektirmesi, mühendislik ve uygulamalı matematik alanlarında tercih edilmesine neden olmaktadır. Özellikle homotopi pertürbasyon yöntemi ile birleştirildiğinde, bu dönüşüm hem lineer hem de lineer olmayan integro-diferensiyel denklemler üzerinde yüksek doğruluk sağlayarak, geleneksel sayısal ve analitik yöntemlere güçlü bir alternatif sunmaktadır [14]. Ayrıca, değişken katsayılı diferensiyel denklemler için doğrudan uygulanabilir olması, çözüm sürecinde diferensiyel operatörleri integral dönüşümlere çevirerek denklemleri daha kolay çözülebilir hale getirmektedir.

Hızlı yakınsama özelliği sayesinde, özellikle büyüme ve çürüme modellerinde etkin bir çözüm sunan Kharrat-Toma dönüşümü, nüfus dinamiği gibi uygulamalarda kullanışlılığını kanıtlamıştır [11]. Literatürde yapılan analizler, bu dönüşümün diferensiyel denklemleri cebirsel denklemlere indirgeme kabiliyetine sahip olduğunu ve bu sayede hesaplamaları önemli ölçüde basitleştirdiğini göstermektedir [15]. Bu avantajlar, onu mühendislik, fizik, biyoloji, ekonomi gibi birçok disiplinde güçlü bir araç haline getirmektedir. Kharrat, tarafından yapılan araştırma, çift Kharrat-Toma dönüşümünün integro-diferensiyel denklemlerin çözümünde oldukça etkili bir yöntem olduğunu ortaya koymuştur. Bu dönüşüm, özellikle kısmi diferensiyel denklemlerin yanı sıra, karmaşık çekirdek fonksiyonlarına sahip integro-diferensiyel denklemler üzerinde geniş bir uygulama alanına sahiptir [15]. Sonuç olarak, Kharrat-Toma dönüşümü, modern matematiksel modelleme tekniklerinde hız, doğruluk ve hesaplama kolaylığı açısından önemli bir yöntem olarak öne çıkmaktadır.

Bu makalenin amacı, Volterra integro-diferensiyel denklemlerinin tam çözümlerini hesaplamak için minimum çaba ve minimum zamanla Kharrat-Toma dönüşümü kullanarak bulunabileceğini göstermektir. Ayrıca bilebildiğimiz kadarıyla şimdiye kadar literatürde bu tür bir çalışma hiç yapılmamıştır. Bu yüzden bu çalışma bir diğer amacı da literatürdeki bu eksikliği kapatmaktır. Bu makale, dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde integral dönüşümleri yardımıyla Volterra integro-diferensiyel denklemlerin çözümleri ile ilgili tarihçe, ikinci bölümde Kharrat-Toma dönüşümü ve özellikleri, üçüncü bölümde Kharrat-Toma dönüşümü ile Volterra integro-diferensiyel denklemlerin çözümleri, dördüncü ve son bölümde yöntemin uygulanabilirliği için çeşitli örnekler verilmiştir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Kharrat-Toma İntegral Dönüşümü

Bu kesimde, ilk bulgularımızın kanıtlarında kullanacağımız temel kavramlar sunulmuştur.

Tanım 2.1.1. Bir t_0 sabiti verilsin. Eğer $t \geq t_0$ için tanımlı bir $f(t)$ fonksiyonu için

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t} \tag{2.1}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde M ve α pozitif sayıları bulunabiliyor ise $f(t)$ fonksiyonuna $[0, \infty)$ aralığının her sonlu alt aralığında α-üstel mertebeli bir fonksiyondur veya kısaca üstel mertebeden bir fonksiyondur denir [9].

Tanım 2.1.2. $x \geq 0$ için tanımlı $f(x)$ fonksiyonu verilsin. Eğer $s^3 \int_0^\infty f(x)e^{-\frac{x}{s^2}}dx$ genelleştirilmiş integrali mevcut ise integralin değerine $f(x)$ fonksiyonunun Kharrat-Toma dönüşümü denir ve

$$B[f(x)] = G(s) = s^3 \int_0^\infty f(x)e^{-\frac{x}{s^2}}dx,\ x \geq 0 \tag{2.2}$$

ile gösterilir. Diğer taraftan $f(x)$ fonksiyonunun Kharrat-Toma dönüşümü $B[f(x)] = G(s)$ ise ters Kharrat-Toma dönüşüm

$$f(x) = B^{-1}[G(s)] = B^{-1}\left[s^3 \int_0^\infty f(x)e^{-\frac{x}{s^2}}dx\right] \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanır [9].

Teorem 2.1.3. (Kharrat-Toma dönüşümünün varlığı) Eğer $f(x)$ fonksiyonu üstel mertebeli ve $\int_0^b |f(x)|dx$ integralini mevcut kılan bir $b > 0$ sayısı var ise $B[f(x)]$ Kharrat-Toma dönüşümü vardır [9,11].

Bazı fonksiyonların Kharrat-Toma ve ters Kharrat-Toma dönüşümleri aşağıda verilmiştir.

Kharrat-Toma Dönüşümleri

$f(x)$	$B[f(x)] = G(s)$
1	s^5
x	s^7
x^n	$n!\,s^{2n+5}$
e^{kx}	$\frac{s^5}{1-ks^2}$
$sin(kx)$	$\frac{ks^7}{1+k^2s^4}$
$cos(kx)$	$\frac{s^5}{1+k^2s^4}$
$sinh(kx)$	$\frac{ks^7}{1-k^2s^4}$
$cosh(kx)$	$\frac{s^5}{1-k^2s^4}$

Ters Kharrat-Toma Dönüşümleri

$G(s)$	$f(x) = B^{-1}[G(s)]$
s^5	1
s^7	x
$n!\,s^{2n+5}$	x^n
$\frac{s^5}{1-ks^2}$	e^{kx}
$\frac{ks^7}{1+k^2s^4}$	$sin(kx)$
$\frac{s^5}{1+k^2s^4}$	$cos(kx)$
$\frac{ks^7}{1-k^2s^4}$	$sinh(kx)$
$\frac{s^5}{1-k^2s^4}$	$cosh(kx)$

Teorem 2.1.4. (Lineerlik özelliği) Eğer $B[f_1(x)] = G_1(s), B[f_2(x)] = G_2(s), \ldots, B[f_n(x)] = G_n(s)$ ve $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ler keyfi sabitler ise o zaman

$$B\left[\sum_{i=1}^n c_i f_i(x)\right] = \sum_{i=1}^n c_i B[f_i(x)] = \sum_{i=1}^n c_i G_i(s) \tag{2.4}$$

dir [9].

Teorem 2.1.5. (Öteleme özelliği) Eğer $B[f(x)] = G(s)$ ve $\alpha > 0$ bir sabit ise

$$B[f(\alpha x)] = \frac{1}{\alpha^2\sqrt{\alpha}} G\left[\sqrt{\alpha}s\right] \tag{2.5}$$

dir [9].

Teorem 2.1.7. (Konvolüsyon teoremi) Eğer $B[f(x)] = M(s),\ B[g(x)] = N(s)$ ise

$$B[f(x) * g(x)] = \frac{1}{s^3} M(s)N(s) \tag{2.7}$$

dir. Burada $(f*g)(x), f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının konvolüsyonunu temsil eder ve

$$(f*g)(x)=\int_0^x f(t)g(x-t)dt \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlanır [9].

Teorem 2.1.8. (x^n *ile çarpma özelliği*) Eğer $B[f(x)]=G(s)$ ise

$$B[xf(x)]=\frac{s^3}{2}\frac{dG(s)}{ds}-\frac{3}{2}s^2G(s), \tag{2.9}$$

$$B[x^2f(x)]=\frac{s^6}{4}\frac{d^2G(s)}{ds^2}-\frac{3}{4}s^5\frac{dG(s)}{ds}+\frac{3}{4}s^4G(s), \tag{2.10}$$

ve

$$B[x^3f(x)]=\frac{s^9}{8}\frac{d^3G(s)}{ds^3}-\frac{3}{8}s^7\frac{dG(s)}{ds}+\frac{3}{8}s^6G(s) \tag{2.11}$$

dir [9].

Teorem 2.1.9. (Türev için Kharrat-Toma dönüşümü) Eğer $B[f(x)]=G(s)$ ise

$$B[f'(x)]=\frac{1}{s^2}G(s)-s^3f(0), \tag{2.12}$$

$$B[f''(x)]=\frac{1}{s^4}G(s)-sf(0)-s^3f'(0), \tag{2.13}$$

ve $n\geq 2$ için

$$B\left[f^{(n)}(x)\right]=\frac{1}{s^{2n}}G(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{-2n+2k+5}f^{(k)}(0) \tag{2.14}$$

dir [9].

İspat: Kharrat-Toma dönüşümünün tanımını kullanırsak,

$$B[f'(x)]=s^3\int_0^\infty f'(x)e^{-\frac{x}{s^2}}dx$$

elde ederiz. Eğer bu integrale $u=e^{\frac{-x}{s^2}},\ dv=f'(x)dx$ olarak alıp kısmi integrasyon tekniğini uygularsak sırasıyla $du=-\frac{1}{s^2}e^{-\frac{x}{s^2}}dx,\ v=f(x)$ olur ve integralin değeri

$$\begin{aligned} B[f'(x)] &= s^3\left[e^{-\frac{x}{s^2}}f(x)\Big|_0^\infty+\frac{1}{s^2}\int_0^\infty f(x)e^{-\frac{x}{s^2}}dx\right] \\ &= s^3\left[-f(0)+\frac{1}{s^5}G(s)\right]=\frac{1}{s^2}G(s)-s^3f(0) \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} B[f''(x)] &= \frac{1}{s^2}B[f'(x)]-s^3f'(0) \\ &= \frac{1}{s^2}\left(\frac{1}{s^2}G(s)-s^3f(0)\right)-s^3f'(0) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{s^4} G(s) - sf(0) - s^3 f'(0)$$

elde edilir. ■

3. KHARRAT-TOMA DÖNÜŞÜMÜ İLE VOLTERRA İNTEGRO-DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Kharrat-Toma dönüşümü, integro-diferensiyel denklemlerin analitik çözümlerinde güçlü ve etkili bir araç olarak öne çıkmaktadır. Bu çalışmada, çekirdek fonksiyonu $K(x,t)$ yalnızca $x-t$ farkına bağlı olan konvolüsyon tipi bir yapı ile ele alınmıştır. Ardından, konvolüsyon tipi çekirdeğe sahip Volterra integro-diferensiyel denklemlerinin hem birinci hem de ikinci türü için Kharrat-Toma dönüşümünün nasıl uygulanabileceği detaylı bir şekilde incelenmiştir. Konvolüsyon tipi ikinci tür Volterra integro-diferensiyel denklemi (1.1) den şu şekilde ifade edilebilir:

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x-t)u(t)dt \tag{3.1}$$

ve konvolüsyon tipi birinci tür Volterra integro-diferensiyel denklemi (1.2) yardımıyla

$$u^{(n)}(x) = \int_0^x K(x-t)u(t)dt \tag{3.2}$$

olarak ifade edilir. Şimdi birinci tür Volterra integro-diferensiyel denkleminin çözümünün, Kharrat-Toma dönüşümü ve ona ait teoremleri kullanarak nasıl elde edilebileceğini verilecektir.

Teorem 3.1. (3.2) de verilen birinci tip Volterra integro-diferensiyel denkleminin çözümü

$$u(x) = B^{-1}[G(s)] = B^{-1}\left[\frac{s^3 B[u^{(n)}(x)]}{B[K(x)]}\right] \tag{3.3}$$

şeklinde ifade edilir. Burada K konvolüsyon tipi çekirdek ve $B[u(x)] = G(s)$ olarak tanımlanmıştır.

İspat Eğer (3.2) birinci tip Volterra integro-diferensiyel denkleminin her iki tarafına Kharrat-Toma dönüşümünü uygularsak;

$$B[u^{(n)}(x)] = B\left[\int_0^x K(x-t)u(t)dt\right] = B[K(x) * u(x)]$$

olarak yazabiliriz. Dolayısıyla

$$B[u^{(n)}(x)] = B[K(x) * u(x)]$$

$$B[u^{(n)}(x)] = \frac{1}{s^3} B[K(x)]B[u(x)]$$

veya buna denk olarak

$$B[u(x)] = \frac{s^3 B[u^{(n)}(x)]}{B[K(x)]}$$

buluruz. Eğer bu eşitliğin her iki tarafına ters Kharrat-Toma dönüşümünü uygularsak

$$u(x) = B^{-1}[G(s)] = B^{-1}\left[\frac{s^3 B[u^{(n)}(x)]}{B[K(x)]}\right]$$

elde ederiz ki bu da teoremi ispatlar. ■

Teorem 3.2. (3.1) ile verilen ikinci tip Volterra integro-diferensiyel denkleminin çözümü

$$u(x) = B^{-1}[G(s)] = B^{-1}\left[\frac{B[u^{(n)}(x)] - B[f(x)]}{\frac{\lambda}{s^3}B[K(x)]}\right] \tag{3.4}$$

ile ifade edilir. Burada K, çekirdek, λ parametre ve $B[u(x)] = G(s)$ olarak tanımlanmıştır.

İspat Eğer (3.1) ikinci tip Volterra integro-diferensiyel denkleminin her iki tarafına Kharrat-Toma dönüşümünü uygularsak;

$$B\left[u^{(n)}(x)\right] = B\left[f(x) + \lambda \int_0^x K(x-t)u(t)dt\right]$$

ve Kharrat-Toma dönüşümünün lineerlik özelliğinden dolayı

$$B\left[u^{(n)}(x)\right] = B[f(x)] + \lambda B\left[\int_0^x K(x-t)u(t)dt\right]$$

elde ederiz. Eğer konvolüsyon tanımını kullanırsak bu ifadeyi

$$B\left[u^{(n)}(x)\right] = B[f(x)] + \lambda\, B[K(x) * u(x)]$$

olarak yazabiliriz. Kharrat-Toma dönüşümü için konvolüsyon teoremini kullanırsak,

$$B\left[u^{(n)}(x)\right] = B[f(x)] + \frac{\lambda}{s^3}B[K(x)]B[u(x)]$$

veya denk olarak

$$B[u(x)] = \frac{B[u^{(n)}(x)] - B[f(x)]}{\frac{\lambda}{s^3}B[K(x)]}$$

elde ederiz. Eğer bu ifadenin her iki tarafına ters Kharrat-Toma dönüşümünü uygularsak

$$u(x) = B^{-1}[G(s)] = B^{-1}\left[\frac{B[u^{(n)}(x)] - B[f(x)]}{\frac{\lambda}{s^3}B[K(x)]}\right]$$

elde ederiz ki bu da ispatı tamamlar. ■

4. ÖRNEKLER

Bu bölümde, Kharrat-Toma ve ters Kharrat-Toma dönüşümü kullanılarak konvolüsyon tipi Volterra integro-diferensiyel denklemlerinin çözüm prosedürünü açıklamak için bazı örnekler verilmiştir.

Örnek 4.1.

$$u'(x) = \int_0^x \cos(x-t)\, u(t)dt, \quad u(0) = 1 \tag{4.1}$$

ile verilen başlangıç değer problemini Kharrat-Toma dönüşümü ile çözünüz.

Çözüm

$B[u(x)] = G(s)$ olarak yazalım. Eğer (4.1) ile verilen birinci tip Volterra integro-diferensiyel denklemine Kharrat-Toma dönüşümü uygulayıp ardından konvolüsyon teoremini kullanırsak (4.1) denklemini;

$$B[u'(x)] = B[\cos(t) * u(t)]$$

olarak yazabiliriz. Eğer bu eşitliğe Kharrat-Toma dönüşümünün özelliklerini kullanırsak

$$\frac{1}{s^2}G(s) - s^3u(0) = \frac{1}{s^3}B[\cos(t)]B[u(t)]$$

denklemini elde ederiz. Eğer $B[\cos(t)] = \frac{s^5}{1+s^4}$ olduğunu hatırlarsak bu denklemi

$$\frac{1}{s^2}G(s) - s^3u(0) = \frac{s^2}{1+s^4}G(s)$$

olarak yazabiliriz. Eğer $u(0) = 1$ başlangıç koşulunu bu denklemde kullanırsak

$$\frac{1}{s^2}G(s) - s^3 = \frac{s^2}{1+s^4}G(s)$$

veya buna denk olarak

$$B[u(x)] = G(s) = s^5 + s^9$$

ifadesini buluruz. Bu eşitliğin her iki tarafına ters Kharrat-Toma dönüşümünü uygularsak başlangıç değer probleminin çözümünü

$$u(x) = B^{-1}[s^5 + s^9] = 1 + \frac{x^2}{2}$$

olarak elde ederiz.

Örnek 4.2.

$$u'(x) = 2e^x + \int_0^x \sin(x-t)\,u(t)dt, \quad u(0) = 0 \tag{4.2}$$

ile verilen başlangıç değer problemini Kharrat-Toma dönüşümü ile çözünüz.

Çözüm

$B[u(x)] = G(s)$ olarak yazalım. Kharrat-Toma dönüşümünü (4.2) ile verilen ikinci tip Volterra integro-diferensiyel denklemine uygularsak (4.2) integro-diferensiyel denklemini

$$B[u'(x)] = B\left[2e^{-x} + \int_0^x \cos(x-t)\,u(t)dt\right]$$

olarak yazabiliriz. Eğer bu eşitliğin ikinci tarafına Kharrat-Toma dönüşümünün lineerliği ve konvolüsyon özelliklerini uygularsak,

$$B[u'(x)] = B[2e^x] + B[\cos(t) * u(t)]$$

ve dolayısıyla

$$\frac{1}{s^2}G(s) - s^3u(0) = 2\frac{s^5}{1+s^2} + \frac{1}{s^3}B[cos(t)]B[u(t)]$$

elde edilir. Eğer son denklemde $B[cos(t)] = \frac{s^5}{1+s^4}$ olduğunu kullanırsak denklem

$$\frac{1}{s^2}G(s) - s^3u(0) = 2\frac{s^5}{1+s^2} + \frac{s^2}{1+s^4}G(s)$$

halini alır. Eğer burada $u(0) = 0$ başlangıç koşulunu uygular ve gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$B[u(x)] = G(s) = \frac{2s^7}{1+s^2} + \frac{2s^{11}}{1+s^2}$$

olarak bulunur. Eğer bu eşitliğin her iki tarafına ters Kharrat-Toma dönüşümünü uygularsak verilen başlangıç değer probleminin çözümünü

$$u(x) = B^{-1}\left[\frac{2s^7}{1+s^2} + \frac{2s^{11}}{1+s^2}\right] = 2xe^{-x} + \frac{1}{3}x^3e^{-x}$$

olarak elde ederiz.

Örnek 4.3.

$$u''(x) = 1 + \int_0^x (x-t)u(t)dt, \quad u(0) = 1, u'(0) = 0 \tag{4.3}$$

ile verilen başlangıç değer problemini Kharrat-Toma dönüşümü ile çözünüz.

Çözüm

$B[u(x)] = G(s)$ olarak yazalım. Eğer (4.3) de verilen ikinci tip Volterra integro-diferensiyel denklemine Kharrat-Toma dönüşümü uygulayıp ardından konvolüsyon teoremini kullanırsak (4.3) integro-diferensiyel denklemini

$B[u''(x)] = B[1 + (t) * u(t)] = B[1] + B[(t) * u(t)]$

olarak yazabiliriz. Buradan Kharrat-Toma dönüşümünün özelliklerini kullanarak bu denklemi

$\frac{1}{s^4}G(s) - su(0) - s^3u'(0) = s^5 + \frac{1}{s^3}B[t]B[u(t)] = s^5 + \frac{1}{s^3}B[t]G(s)$

şeklinde yazabiliriğz. Eğer $B[t] = s^7$ olduğunu hatırlar ve başlangıç koşullarını uygularsak

$\frac{1}{s^4}G(s) - s = s^5 + s^4G(s)$

olur. Buradan

$G(s) = \frac{s^5}{1-s^4}$

olarak bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafına ters Kharrat-Toma dönüşümünü uygularsak başlangıç değer probleminin çözümünü

$u(x) = B^{-1}\left[\frac{s^5}{1-s^4}\right] = cosht$

olarak elde ederiz.

5. TARTIŞMA

Bu çalışmada, Volterra integro-diferensiyel denklemlerinin tam çözümlerine ulaşmak için Kharrat-Toma dönüşümü kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar, birinci ve ikinci türden Volterra integro-diferensiyel denklemlerin çözümlerinin, minimum düzeyde hesaplama ile ve oldukça kısa bir sürede belirlenebildiğini ortaya koymaktadır. Bu yaklaşım hem çözüm sürecini hızlandırmakta hem de hesaplama yükünü önemli ölçüde azaltmaktadır. Literatürde yaygın olarak kullanılan analitik ve sayısal yöntemlerle karşılaştırıldığında, Kharrat-Toma dönüşümünün daha az işlem adımı gerektirdiği ve daha hızlı çözümler sunduğu görülmüştür. Sonuç olarak, Kharrat-Toma dönüşümü, Volterra integro-diferensiyel denklemlerinin çözümünde etkili bir yöntem olup, gelecekte farklı problem türleri üzerinde uygulanabilirliği artırılabilir.

TEŞEKKÜR

Yazar, bu çalışmanın araştırması veya yayınlanması ile ilgili herhangi bir finansal destek almamıştır.

YAZAR(LAR)'IN KATKISI

Adil Mısır: Metodoloji, Kavramlaştırma, Materyal temini, Danışman/Kontrolörlük. **Fatma Büşra Aktaş**: Araştırma, İçerik analizi, Makalenin yazımı- İnceleme ve Düzenleme.

ÇIKAR ÇATIŞMASI BİLDİRİMİ

Yazarın bu makale ile ilgili herhangi bir beyan edeceği çıkar çatışması yoktur.

KAYNAKLAR

[1] Wazwaz, A. M. (2011). *Linear and Nonlinear Integral Equations*: Methods and Applications, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
[2] Wazwaz, A. M. (2015). *A First Course in Integral Equations*. World Scientific, Second Edition, Singapore.
[3] Rahman, M. (2007). *Integral Equations and Their Applications***.** WIT Press, Boston.
[4] Spiegel, M. R. (1965). *Laplace transforms* (p. 249). New York: McGraw-Hill.
[5] Mahgob, A. M., & Elzaki, T. M. (2015). Elzaki transform and integro-differential equation with a bulge function. *IOSR Journal of Mathematics*, 11(2), 25–28.
[6] Aggarwal, S., Chauhan, R., & Sharma, N. (2018). Application of Aboodh transform for solving linear Volterra integro-differential equations of second kind. *International Journal of Research in Advanced Technology*, 6**(**8), 1186–1190.
[7] Kumar, P. S., Gnanavel, M. G., & Viswanathan, V. (2018). Application of Mohand Transform for Solving Linear Volterra Integro-Differential Equations. *International Journal of Research in Advanced Technology*, 6**(**10), 2554–2556.
[8] Farah, R. A., & Hamad, M. A. (2024). On the use of RAHMOH integral transform for solving differential equations. *International Journal of Physics and Mathematics*, *6*(2), 1–8.
[9] Kharrat, B. N., & Toma, G. A. (2020). A new integral transform: Kharrat-Toma transform and its properties. *World Applied Sciences Journal*, 38(5), 436–443.
[10] Mustapha, R. A., Salau, A. M., Babatunde, I., Ogabi, C. O., & Idowu G. A. (2021). Kharrat-Toma Transform and its Application in Solving Some Ordinary Differential Equations with Initial Boundary Conditions. *International Journal of Innovative Science and Research Technology*, 6(8), 224–229.
[11] Mahmood, R. F., Hama, S. S., Fatah, S. S., & Hilmi, H. (2024). Using Kharrat-Toma transform to solve a growth and decay problem, *Tikrit Journal of Pure Science*, 29 (6), 70-79.
[12] Rabie, S. (2025). Combination of He method and Kharrat-Toma transform for solving boundary and initial value problems, *Tikrit Journal of Pure Science*, 29 (6), 70-79.
[13] Güngör, N. (2020). Application of Kharrat-Toma transform for solving linear Volterra integral equations**.** *Journal of Universal Mathematics*, 3(2), 137-145.
[14] Toma, G. A., & Alturky, S. (2021). A hybrid Kharrat-Toma transform with homotopy perturbation method for solving integro-differential equations**.** *Journal of Mathematical Analysis and Modeling*, 2(2), 50-62.
[15] Kharrat, B. N. (2024). New Double Kharrat-Toma Transform and its Application in Partial Differential Equations. *World Applied Sciences Journal*, 42(1), 30-36.