

Doğrusal Olmayan Regresyondaki Kendinden Eşik Değerli Otoregresif Hatalar Sorununa Uyarlamalı Bir Yaklaşım

An Adaptive Estimation Method for Nonlinear Regression with Self-Exciting Threshold Autoregressive Errors

Bariş AŞIKGİL¹ 

¹Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, İstanbul, Türkiye

Öz

Bu çalışma, doğrusal olmayan regresyon modellerinde kendinden eşik değerli otoregresif (KEDAR) hataların varlığında etkin parametre kestirimleri elde edebilmeyi amaçlamaktadır. Bu doğrultuda, otoregresif (AR) süreçlere karşı önerilen iki aşamalı en küçük kareler (İAEKK) yöntemi KEDAR süreçleri için ele alınacak ve etkin parametre kestirimleri elde edilebilmesi için uyarlamalı bir yaklaşım araştırılacaktır. Karesel çokterimli (polinomial) daraltma fonksiyonu kullanılarak İAEKK yöntemine bir uyarlama yapıp bu yeni yaklaşımın etkinliği farklı senaryolar altında bir benzetim çalışması ile incelenecektir.

Anahtar Kelimeler: Doğrusal Olmayan Regresyon, Otokorelasyon, Kendinden Eşik Değerli Otoregresif Süreçler, Uyarlamalı İki Aşamalı Yaklaşım

Abstract

This study aims to obtain efficient parameter estimates in the presence of self-exciting threshold autoregressive (SETAR) errors in nonlinear regression models. In this way, the two-stage least squares (TSLS) method proposed for autoregressive (AR) processes is discussed for SETAR processes and an adaptive approach is investigated to obtain efficient parameter estimates. An adaptation of TSLS method is made by using a quadratic polynomial tapering function and the efficiency of this new approach is examined with a simulation study under different scenarios.

Keywords: Nonlinear Regression, Autocorrelation, Self-Exciting Threshold Autoregressive Processes, Adaptive Two-Stage Approach

I. GİRİŞ

Doğrusal olmayan modeller, son zamanlarda birçok bilimsel alanda (fizik, kimya, eczacılık, tıp, mühendislik vb.) çalışılan değişkenler arasındaki ilişkilerin incelenmesi için sıkça başvurulan modellerdir. Bu modeller, özellikle çok uzun zaman ve maliyet gerektiren deneysel çalışmalardan elde edilen bulguların modellenmesinde yoğun olarak kullanılmaya başlanmıştır. Bu modellerde bulunan değişkenlerin istatistiksel olarak incelenmesi ve oluşturulan modeller için parametre kestirimlerinin elde edilmesinde doğrusal olmayan regresyon analizi tercih edilebilir.

n gözlemlili (x_i, y_i) çifti için bir doğrusal olmayan regresyon modeli,

$$y_i = f(x_i, \beta) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

biçiminde verilebilir. Burada y_i , bağımlı değişken; x_i , bağımsız değişken; β , bilinmeyen parametreler ve ε_i , sıfır ortalamalı ve σ^2 varyanslı ilişkisiz hata terimidir. Bu doğrusal olmayan regresyon modeli, Gallant [1] tarafından $f(X, \beta) \equiv f(\beta)$ olarak tanımlandığından, matris biçimiyle aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$Y = f(\beta) + \varepsilon. \quad (2)$$

Burada, parametre kestirimlerini bulmanın bir yolu hata kareler toplamını en küçüklemek olup bu yaklaşım, alışılagelen en küçük kareler (EKK) olarak bilinir. EKK yöntemi, bazı özel durumlarda (değişen varyanslı hatalar, ilişkili hatalar vb.) etkin olmayan sonuçlar verir. Bu nedenle, özel durumlar için tanımlı çeşitli yöntemlere başvurmak gerekebilir [1]. Günlük hayatta sıkça karşılaşılan bir durum, bir değişkendeki (y_i) değişimin zamana (x_i) göre doğrusal olmayan biçimde modellenmesidir. Bu durum, hatalar arasında serisel bir ilişki doğurabilir. Bu nedenle, EKK yönteminin performansı bu durumdan olumsuz bir biçimde etkilenebilecektir. Literatürde, Gallant ve Goebel [2], Glasbey [3], otoregresif hataların varlığında etkin parametre kestirimleri verebilecek yöntemler üzerinde çalışmalar yapmışlardır. Bunun yanında, Glasbey [4], [5], Huang ve Huang [6], Bender ve Heinemann [7], Aşıkil ve Erar [8] tarafından yapılan çalışmalarda da otokorelasyonlu hataların varlığında yaşanacak sorunlara dikkat çekilerek etkin sonuçlar verebilecek bazı farklı yaklaşımlar üzerine yoğunlaşmıştır.

Bu çalışmada, doğrusal olmayan zaman serisi modellerinden biri olan kendinden eşik değerli otoregresif süreçle tanımlı hataların, doğrusal olmayan regresyon modelinin analizinde yaratacağı olumsuz etki incelenip, etkin parametre kestirimleri elde edilebilmesi amaçlanmaktadır. Böylece, farklı alanlarda doğrusal olmayan modellerle çalışan araştırmacılar için bu tarz bir problemin varlığında etkin parametre kestirimleri elde etmelerinin sağlanması ile birlikte tutarlı yorumlarda bulunulması en önde gelen hedefler arasındadır. Çalışmanın ikinci bölümünde, farklı bazı otokorelasyon yapıları tanıtılıp literatürde tanımlı bazı parametre kestirim yöntemleri ile birlikte uyarlamalı iki aşamalı bir yaklaşım verilmiştir. Çalışmanın üçüncü bölümünde, Monte Carlo benzetim çalışması ile sunulan yaklaşım için incelemeler yapılmıştır. Çalışmanın son bölümünde ise çeşitli değerlendirmelere yer verilmiştir.

II. MATERYAL VE YÖNTEM

Bir hata teriminin kendi gecikmeleri ile ilişkili olması durumu otokorelasyon olarak adlandırılır. Regresyon analizinde, zaman ya da uzaklık bağımsız değişken olarak kullanılıyorsa ve bu değerler birbirlerine yakınsa otokorelasyonlu hataların varlığı kaçınılmazdır. Literatürde, genellikle, hata terimleri arasındaki otokorelasyonun otoregresif modeller ile açıklandığı durumlar ele alınmıştır. Bu çalışmada ise doğrusal olmayan zaman serisi modellerinden biri olan kendinden eşik değerli otoregresif modeller ile açıklanan ilişkili hatalar ön plana çıkacaktır.

2.1. Otoregresif (AR) Model

Hata teriminin kendi gecikmeleriyle arasındaki ilişki, q 'uncu dereceden AR modeli ile,

$$\varepsilon_i = a_1 \varepsilon_{i-1} + a_2 \varepsilon_{i-2} + \dots + a_q \varepsilon_{i-q} + \varepsilon_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

biçiminde tanımlanabilir. Burada, $a_1, a_2, \dots, a_q$, bilinmeyen parametreler ve ε_i^* , sıfır ortalama ve σ_{ε}^2 varyanslı bağımsız aynı dağılımlı hata terimidir. AR modelindeki parametrelerin kestirimi için tercih edilebilen yollardan biri Yule-Walker denklemlerini kullanmaktır. Bu denklemleri elde etmek için Eşitlik (3)'ün her iki tarafı sırasıyla ve ayrı ayrı, $\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_{i-2}, \varepsilon_{i-3}, \dots, \varepsilon_{i-q}$ ile çarpılarak ortaya çıkan eşitliklerde her iki tarafın beklenen değerleri alınır. Elde edilen otokovaryanslar aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$E(\varepsilon_{i-1}\varepsilon_{i-1}) = c_0, E(\varepsilon_i\varepsilon_{i-1}) = E(\varepsilon_{i-1}\varepsilon_{i-2}) = c_1, \dots, E(\varepsilon_{i-1}\varepsilon_{i-q}) = c_{q-1}, E(\varepsilon_{i-1}\varepsilon_i^*) = 0. \quad (4)$$

Böylece,

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 c_0 + a_2 c_1 + a_3 c_2 + \dots + a_q c_{q-1} \\ c_2 &= a_1 c_1 + a_2 c_0 + a_3 c_1 + \dots + a_q c_{q-2} \\ &\vdots \\ c_q &= a_1 c_{q-1} + a_2 c_{q-2} + a_3 c_{q-3} + \dots + a_q c_0 \end{aligned} \quad (5)$$

biçiminde ortaya çıkan denklem takımı yardımıyla parametre kestirimleri hesaplanabilmektedir [9].

2.2. Kendinden Eşik Değerli Otoregresif (KEDAR) Model

r -düzenli KEDAR model,

$$z_t = \phi^{(j)} + \sum_{\ell=1}^{q_j} \phi_{\ell}^{(j)} z_{t-\ell} + v_t^{(j)}, \quad \tau_{j-1} \leq z_{t-d} < \tau_j, \quad (6)$$

biçiminde tanımlanabilir. Burada, r, d ve $(q_1, q_2, \dots, q_r)$ pozitif tam sayılardır. (j) , düzeni belirtmekte olup eşik değerler, $-\infty = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_r = \infty$ 'dur. $v_t^{(j)}$, sıfır ortalama ve σ_j^2 varyanslı olup bağımsız aynı dağılımlıdır. d , gecikme parametresi olarak tanımlanıp Eşitlik (6), KEDAR($d; q_1, q_2, \dots, q_r$) biçiminde gösterilebilir [10]. Bu model, asimetrik artış ve azalış örüntüsü gibi doğrusal olmayan özellikleri açıklayabilmekte olup, uzayı r düzene bölen parçalı doğrusal AR modellerden oluşur [11]. KEDAR modellerinde, parametrelerin kestirimi kadar eşik değerin kestirimi de önemlidir. Chan ve Tong [12], Chan [13], Chan ve Cheung [14]'ün çalışmalarında farklı koşullar altında eşik değer ve parametre kestirimleri incelenmiştir. Bu çalışmada, serinin bir elemanı olarak düşünülen eşik değerin iki düzenli modellerdeki kestirimi için grid arama yaklaşımının kullanımı uygun görülmüştür. Bu yaklaşımda, EKK yöntemiyle her bir kestirilmiş z_t değeri bulunup, her bir düzene yeterli sayıda gözlem düşecek şekilde (serinin ortasındaki %80'inin incelenmesi) eşik değerin aranacağı bir aralık belirlenir. Bu aralık belirli bir adım büyüklüğüyle (örneğin, 0.01) parçalara ayrılır. Her bir aday eşik değer için model kurulur ve her bir kestirilmiş model için artık kareler toplamı değeri elde

edilir. Artık kareler toplamını en küçük yapan modele ait eşik değeri kullanılabilir [15].

2.3. En Küçük Kareler (EKK) Yöntemi

EKK yönteminin temeli olan hata kareler toplamı fonksiyonu Eşitlik (2) için aşağıdaki gibi verilebilir:

$$S(\beta) = [Y - f(\beta)]' [Y - f(\beta)]. \quad (7)$$

Bu fonksiyonun en küçüklenmesiyle,

$$\frac{\partial}{\partial \beta} S(\beta) \Big|_{\beta=\hat{\beta}} = -2[Y - f(\hat{\beta})]' F(\hat{\beta}) = -2F'(\hat{\beta})[Y - f(\hat{\beta})] = 0, \quad (8)$$

eşitliği için Taylor serisi açılımından yararlanılarak,

$$\beta - \beta^0 = [F'(\beta^0) F(\beta^0)]^{-1} F'(\beta^0) [Y - f(\beta^0)] = \delta^0, \quad (9)$$

ve

$$\beta^1 = \beta^0 + \delta^0 \quad (10)$$

elde edilir. Burada, $F(\beta) = \partial f(\beta) / \partial \beta_j$ ($j = 1, 2, \dots, k$) biçiminde tanımlı olup bir Jakobiye matrisidir. Bu iteratif süreç, $|\beta^{i+1} - \beta^i| < \varepsilon$ ($i = 0, 1, 2, \dots; \varepsilon = 10^{-5}$)

eşitsizliği sağlanıncaya kadar sürdürülür. Yakınsaklık sağlandığında elde edilen parametre kestirimi, Gauss-Newton iteratif yöntemiyle elde edilen EKK kestirimidir [16].

2.4. Daraltılmış İki Aşamalı En Küçük Kareler (DİAEKK) Yöntemi

Gallant ve Goebel [2] tarafından AR biçimli hataların varlığında etkin parametre kestirimleri elde edebilmek için önerilen iki aşamalı yöntem, Aşıkil ve Erar [8] tarafından bir daraltma yaklaşımı ile yeniden düzenlenmiş ve DİAEKK yöntemi elde edilmiştir. İki aşamadan oluşan bu yöntem, her iki aşamada da EKK yöntemi içerir.

İlk aşamada, öncelikle, Eşitlik (2)'ye EKK yöntemi uygulanarak artıklar (e_i) elde edilir. Artıklara bir daraltma fonksiyonu uygulanarak daraltılmış (taper) otokovaryans kestirimleri,

$$\hat{\gamma}_{taper}(h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-h} (s_i e_i)(s_{i+h} e_{i+h}), \quad h = 0, 1, \dots, q, \quad (11)$$

biçiminde hesaplanır. Burada q , gecikme değeri ve n , gözlem sayısı olup,

$$\sum_{i=1}^n s_i^2 = n. \quad (12)$$

s , bir daraltma fonksiyonu olup, $s: [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ ve $s(0) = s(1) = 0$ 'dır. s_i değerleri,

$$s_i = s\left(\left(i - \frac{1}{2}\right)/n\right) k_n^{1/2}, \quad (13)$$

biçiminde elde edilir. Burada,

$$k_n = n / \sum_{i=1}^n s\left(\left(i - \frac{1}{2}\right)/n\right)^2. \quad (14)$$

Eşitlik (11)'den elde edilen daraltılmış otokovaryans kestirimleri kullanılarak, $(q \times q)$ boyutlu varyans-kovaryans matrisi ve $(q \times 1)$ boyutlu otokovaryans vektörü aşağıdaki gibi oluşturulur:

$$\hat{I}_q = \begin{bmatrix} \hat{\gamma}(0) & \hat{\gamma}(1) & \dots & \hat{\gamma}(q-1) \\ \hat{\gamma}(1) & \hat{\gamma}(0) & \dots & \hat{\gamma}(q-2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \hat{\gamma}(q-1) & \hat{\gamma}(q-2) & \dots & \hat{\gamma}(0) \end{bmatrix}, \quad \hat{\gamma}_q = [\hat{\gamma}(1) \ \hat{\gamma}(2) \ \dots \ \hat{\gamma}(q)]'. \quad (15)$$

AR modelin parametre kestirimleri, Yule-Walker denklemleri yardımıyla aşağıdaki gibi bulunur:

$$\hat{a} = -\hat{I}_q^{-1} \hat{\gamma}_q, \quad \hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}(0) + \hat{a}' \hat{\gamma}_q. \quad (16)$$

Böylece, $(n \times n)$ boyutlu dönüşüm matrisi,

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} \sqrt{\hat{\sigma}^2} \hat{P}_q & \mathbf{0} \\ \hat{a}_q & \hat{a}_{q-1} & \dots & \hat{a}_1 & 1 \\ \hat{a}_q & \hat{a}_{q-1} & \dots & \hat{a}_1 & 1 \\ \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots \\ \hat{a}_q & \hat{a}_{q-1} & \dots & \hat{a}_1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

biçiminde tanımlanır. Burada, ilk satır q satırdan oluşur ve Cholesky yöntemi kullanılarak $\hat{I}_q^{-1} = \hat{P}_q' \hat{P}_q$ elde edilir. Dönüşüm matrisinin elde edilmesiyle yöntemin ilk aşaması sonlanmış olur.

İkinci aşamada, dönüşüm matrisi Eşitlik (2)'ye uygulanarak aşağıdaki dönüşümler elde edilir:

$$W = \hat{P}Y, \quad g(\beta) = \hat{P}f(\beta), \quad v = \hat{P}\varepsilon. \quad (18)$$

Böylece, AR biçimli otokorelasyonlu hatalar sorununun çözüldüğü yeni model aşağıda verildiği gibi tanımlanabilir:

$$W = g(\beta) + v. \quad (19)$$

Bu yeni modele EKK yöntemi uygulanarak, AR biçimli otokorelasyondan bozuluma uğramamış DİAEKK-AR parametre kestirimleri elde edilir.

2.5. Uyarlamalı İki Aşamalı Yaklaşım

Aşıkıl [17] tarafından KEDAR biçimli hataların varlığında doğrusal regresyon modellerinde etkin parametre kestirimleri elde edebilmek için incelenen yöntem, bu çalışmada karesel daraltma fonksiyonu kullanılarak doğrusal olmayan regresyon modellerinde KEDAR biçimli otokorelasyon problemini çözebilmek amacıyla uyarlanmıştır. Bu uyarlanmış yaklaşım DİAEKK yöntemini temel alır. Bu yaklaşımın işleyişi kısaca aşağıda tanımlandığı gibidir:

DİAEKK yönteminin ilk aşamasındaki EKK yönteminden elde edilen artıklar için grid arama ile eşik değerler tahminlenir ve düzenler belirlenir. r -düzenli bir sistemde her bir düzendeki gözlem sayısı aşağıda verildiği gibi birbirinden farklı olarak bulunabilir:

$$\sum_{j=1}^r n_j = n. \quad (20)$$

Her bir düzen kendi içerisinde ayrı düşünülerek her biri için dönüşüm matrisi bulunur. Dönüşüm matrisinin içerdiği elemanlardan olan, otokorelasyonlu hataların tanımlandığı modelin parametre kestirimlerini bulabilmek için, s daraltma fonksiyonu,

$$s(v) = v(1 - v), \quad (21)$$

biçiminde tanımlanarak Eşitlik (13) yardımıyla s_i değerleri bulunup, bu değerlerin kullanımı ile Eşitlik (11)'deki daraltılmış otokovaryans kestirimleri hesaplanır. Bu kestirimler kullanılarak Eşitlik (15) elde edilir.

İkinci aşamada, her bir düzen için ayrı ayrı dönüşümler uygulanır ve sıralı bir biçimde düzenler alt alta eklenerek Eşitlik (19)'da verildiği gibi KEDAR biçimli otokorelasyonlu hatalar sorununun çözüldüğü yeni bir model elde edilir. Bu yeni modele EKK yöntemi uygulanarak, KEDAR biçimli otokorelasyondan bozuluma uğramamış DİAEKK-KEDAR parametre kestirimleri elde edilir.

III. BENZETİM ÇALIŞMASI

Bu kısımda, KEDAR biçimli hataların varlığında farklı senaryolar üzerinden kapsamlı bir Monte Carlo benzetim çalışması yapılarak, EKK, DİAEKK-AR ve DİAEKK-KEDAR yaklaşımlarının performansları incelenecektir. Bu benzetim çalışmasında,

$$y_t = \beta_1 x_t^{\beta_2 x_t} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (22)$$

şeklinde verilen geometrik model kullanılmış ve parametrelerin gerçek değerleri, $\beta = (5 \ 1)'$ olarak belirlenmiştir. Bağımsız değişken (x_t), tekdüze (uniform) dağılımdan $U(1, 4)$ biçiminde üretilmiştir. Otokorelasyonlu hatalar için,

$$\varepsilon_t = \begin{cases} 0.5\varepsilon_{t-1} + \nu_t & \text{if } \varepsilon_{t-1} \leq 0 \\ 0.8\varepsilon_{t-1} + \nu_t & \text{if } \varepsilon_{t-1} > 0 \end{cases}, \quad (23)$$

$$\varepsilon_t = \begin{cases} 0.34\varepsilon_{t-1} + 0.13\varepsilon_{t-2} + \nu_t & \text{if } \varepsilon_{t-1} \leq 1 \\ 0.55\varepsilon_{t-1} + 0.18\varepsilon_{t-2} + \nu_t & \text{if } \varepsilon_{t-1} > 1 \end{cases}, \quad (24)$$

$$\varepsilon_t = \begin{cases} 0.85\varepsilon_{t-1} + \nu_t & \text{if } \varepsilon_{t-1} \leq 0 \\ 0.52\varepsilon_{t-1} + 0.10\varepsilon_{t-2} + \nu_t & \text{if } \varepsilon_{t-1} > 0 \end{cases}, \quad (25)$$

$$\varepsilon_t = \begin{cases} 0.5\varepsilon_{t-1} + 2\nu_t & \text{if } \varepsilon_{t-1} \leq 1 \\ 0.8\varepsilon_{t-1} + \nu_t & \text{if } \varepsilon_{t-1} > 1 \end{cases}, \quad (26)$$

biçimlerinde verilen koşullu (if), durağan yapıda dört farklı KEDAR modeli ele alınmıştır. Bu modellerin ortak noktası iki düzenli olmalarıdır. ν_t terimi, bağımsız ve aynı dağılımlı olup, $N(0, \sigma^2)$ biçimindeki dağılımdan farklı standart sapmalar ($\sigma = 0.5, \sigma = 1, \sigma = 3$) ve farklı örneklem büyüklükleri ($n = 30, n = 50, n = 70, n = 100$) için üretilmiştir. Bu benzetim çalışması, her bir farklı durum altında (model, standart sapma ve örneklem büyüklüğü) 1000 kere tekrarlanmıştır.

Bu çalışma, MATLAB R2017b'de yazılan kodlama ile oluşturulan program yardımıyla yapılmıştır. Sırasıyla, Eşitlik (23) ile verilen durum için sonuçlar Tablo 1'de, Eşitlik (24) ile verilen durum için sonuçlar Tablo 2'de, Eşitlik (25) ile verilen durum için sonuçlar Tablo 3 ve Tablo 4'de, Eşitlik (26) ile verilen durum için sonuçlar Tablo 5'de verilmiştir. Bu tablolarda, EKK, DİAEKK-AR ve DİAEKK-KEDAR yaklaşımlarıyla, farklı durumlarda β_1 ve β_2 için elde edilen, ortalama (Ort), standart sapma (St.Sapma), hata kareler ortalaması (HKO) ve göreceli etkinlik (Etk = $\text{HKO}_{\text{EKK}} / \text{HKO}_{\text{Yöntem}}$) değerleri verilmiştir.

Tablo 1'deki, Eşitlik (23) ile verilen KEDAR(1; 1, 1) biçimindeki hataların varlığında yapılan benzetim çalışmasıyla elde edilen yaklaşık sonuçlar göz önünde bulundurulduğunda, her üç yöntem için de elde edilen parametre kestirim ortalamalarının parametrelerin gerçek değerlerine oldukça yakın oldukları gözlenmiştir. Her üç yöntemden de parametrelerin yansız kestirimlerine ulaşıldığı söylenebilir. Bunun

yanında, DİAEKK-KEDAR ile elde edilen parametre kestirim ortalamalarının parametrelerin gerçek değerlerine daha yakın olduğu belirtilebilir. Her üç yöntem için de parametre kestirimlerinin standart sapmaları dikkate alındığında en büyüklere sahip olan EKK yöntemiyle elde edilenlerdir. $n = 30$ ve $n = 50$ gibi daha küçük hacimli örneklerde DİAEKK-KEDAR ile elde edilen parametre kestirimlerinin standart sapmaları en küçük olmaktadır. Bu doğrultuda, göreceli etkinlikler açısından küçük hacimli örnekler için DİAEKK-KEDAR yönteminin diğer yöntemlere göre daha etkin olduğu, ancak gözlem sayısı arttıkça DİAEKK-AR yöntemi etkinlik değerlerinin de artış göstererek $n = 100$ gibi büyük hacimli örneklerde en büyük olduğu göze çarpmaktadır. İncelenen üç yöntem içinde EKK etkin bir yöntem değildir. Ayrıca, gözlem sayısı arttıkça yani örneklem hacmi büyüdükçe DİAEKK ile elde edilen parametre kestirimlerinin EKK ile elde edilenlere göre etkinlikleri de gözle görülür biçimde artmaktadır.

Tablo 2'deki, Eşitlik (24) ile verilen KEDAR(1; 2, 2) biçimindeki hataların varlığında yapılan benzetim çalışmasıyla elde edilen yaklaşık sonuçlar göz önünde bulundurulduğunda, her üç yöntem için de elde edilen parametre kestirim ortalamalarının parametrelerin gerçek değerlerine oldukça yakın oldukları gözlenmiştir. Her üç yöntemden de parametrelerin yansız kestirimlerine ulaşıldığı söylenebilir. Bunun yanında, DİAEKK-KEDAR ile elde edilen parametre kestirim ortalamalarının parametrelerin gerçek değerlerine daha yakın olduğu belirtilebilir. Her üç yöntem için de parametre kestirimlerinin standart sapmaları dikkate alındığında en büyüklere sahip olan EKK yöntemiyle elde edilenlerdir. $n = 30$ gibi daha küçük hacimli örneklerde DİAEKK-KEDAR ile elde edilen parametre kestirimlerinin standart sapmaları en küçük olmaktadır. Bu doğrultuda, göreceli etkinlikler açısından küçük hacimli örnekler için DİAEKK-KEDAR yönteminin diğer yöntemlere göre daha etkin olduğu, ancak gözlem sayısı arttıkça DİAEKK-AR yöntemi etkinlik değerlerinin de artış göstererek $n = 70$ ve $n = 100$ gibi büyük hacimli örneklerde en büyük olduğu göze çarpmaktadır. İncelenen üç yöntem içinde EKK etkin bir yöntem değildir. Ayrıca, gözlem sayısı arttıkça yani örneklem hacmi büyüdükçe DİAEKK ile elde edilen parametre kestirimlerinin EKK ile elde edilenlere göre etkinlikleri de gözle görülür biçimde artmaktadır.

Tablo 3'deki, Eşitlik (25) ile verilen KEDAR(1; 1, 2) biçimindeki hataların varlığında AR model derecelerinin en küçüğü (AR(1)) yaklaşımı ile yapılan benzetim çalışmasıyla elde edilen yaklaşık sonuçlar göz önünde bulundurulduğunda, her üç yöntem için de elde edilen parametre kestirim ortalamalarının parametrelerin gerçek değerlerine oldukça yakın oldukları gözlenmiştir. Her üç yöntemden de parametrelerin yansız kestirimlerine ulaşıldığı

söylenebilir. Bunun yanında, DİAEKK-KEDAR ile elde edilen parametre kestirim ortalamalarının parametrelerin gerçek değerlerine daha yakın olduğu belirtilebilir. Her üç yöntem için de parametre kestirimlerinin standart sapmaları dikkate alındığında en büyüklere sahip olan EKK yöntemiyle elde edilenlerdir. $n = 30$ ve $n = 50$ gibi daha küçük hacimli örneklerde DİAEKK-KEDAR ile elde edilen parametre kestirimlerinin standart sapmaları en küçük olmaktadır. Göreceli etkinlikler ile DİAEKK-KEDAR'ın diğer yöntemlere göre daha etkin olduğu göze çarpmaktadır. İncelenen üç yöntem içinde EKK etkin bir yöntem değildir. Ayrıca, gözlem sayısı arttıkça yani örneklem hacmi büyüdükçe DİAEKK ile elde edilen parametre kestirimlerinin EKK ile elde edilenlere göre etkinlikleri de gözle görülür biçimde artmaktadır.

Tablo 4'deki, Eşitlik (25) ile verilen KEDAR(1; 1, 2) biçimindeki hataların varlığında AR model derecelerinin en büyüğü (AR(2)) yaklaşımı ile yapılan benzetim çalışmasıyla elde edilen yaklaşık sonuçlar göz önünde bulundurulduğunda, her üç yöntem için de elde edilen parametre kestirim ortalamalarının parametrelerin gerçek değerlerine oldukça yakın oldukları gözlenmiştir. Her üç yöntemden de parametrelerin yansız kestirimlerine ulaşıldığı söylenebilir. Bunun yanında, DİAEKK-KEDAR ile elde edilen parametre kestirim ortalamalarının parametrelerin gerçek değerlerine daha yakın olduğu belirtilebilir. Her üç yöntem için de parametre kestirimlerinin standart sapmaları dikkate alındığında en büyüklere sahip olan EKK yöntemiyle elde edilenler olup, DİAEKK-KEDAR ile elde edilen parametre kestirimlerinin standart sapmaları da en küçük olmaktadır. Göreceli etkinlikler ile DİAEKK-KEDAR'ın diğer yöntemlere göre daha etkin olduğu göze çarpmaktadır. İncelenen üç yöntem içinde EKK etkin bir yöntem değildir. Ayrıca, gözlem sayısı arttıkça yani örneklem hacmi büyüdükçe DİAEKK ile elde edilen parametre kestirimlerinin EKK ile elde edilenlere göre etkinlikleri de gözle görülür biçimde artmaktadır.

Tablo 5'deki, Eşitlik (26) ile verilen özel durumlu (aşağı-yukarı sıçramalardaki asimetric yapı) KEDAR(1; 1, 1) biçimindeki hataların varlığında yapılan benzetim çalışmasıyla elde edilen yaklaşık sonuçlar göz önünde bulundurulduğunda, her üç yöntem için de elde edilen parametre kestirim ortalamalarının parametrelerin gerçek değerlerine oldukça yakın oldukları gözlenmiştir. Her üç yöntemden de parametrelerin yansız kestirimlerine ulaşıldığı söylenebilir. Bunun yanında, DİAEKK-KEDAR ile elde edilen parametre kestirim ortalamalarının parametrelerin gerçek değerlerine daha yakın olduğu belirtilebilir. Her üç yöntem için de parametre kestirimlerinin standart sapmaları dikkate alındığında en büyüklere sahip olan EKK yöntemiyle

Tablo 1. Eşitlik (23)'de verilen KEDAR(1; 1, 1) biçimindeki hataların varlığında elde edilen yaklaşık sonuçlar

Parametre	n	σ	EKK				DİAEKK-AR				DİAEKK-KEDAR			
			Ort	St.Sapma	HKO	Etk	Ort	St.Sapma	HKO	Etk	Ort	St.Sapma	HKO	Etk
β_1	30	0.5	5.01982	0.03495	$1.61 \cdot 10^{-3}$	1	5.00802	0.02169	$0.53 \cdot 10^{-3}$	3.02	5.00552	0.02001	$0.43 \cdot 10^{-3}$	3.75
		1	5.03734	0.06871	$6.12 \cdot 10^{-3}$	1	5.01410	0.04144	$1.92 \cdot 10^{-3}$	3.19	5.00981	0.03847	$1.58 \cdot 10^{-3}$	3.88
		3	5.10422	0.19765	$49.9 \cdot 10^{-3}$	1	5.03981	0.11785	$15.5 \cdot 10^{-3}$	3.23	5.02733	0.10674	$12.1 \cdot 10^{-3}$	4.11
	50	0.5	5.01980	0.02448	$0.99 \cdot 10^{-3}$	1	5.00577	0.01386	$0.23 \cdot 10^{-3}$	4.40	5.00324	0.01371	$0.20 \cdot 10^{-3}$	5.00
		1	5.03490	0.04882	$3.60 \cdot 10^{-3}$	1	5.00978	0.02622	$0.78 \cdot 10^{-3}$	4.60	5.00571	0.02544	$0.68 \cdot 10^{-3}$	5.30
		3	5.09706	0.14844	$31.5 \cdot 10^{-3}$	1	5.02518	0.07446	$6.18 \cdot 10^{-3}$	5.09	5.01179	0.07307	$5.48 \cdot 10^{-3}$	5.74
	70	0.5	5.01781	0.02071	$0.75 \cdot 10^{-3}$	1	5.00502	0.01077	$0.14 \cdot 10^{-3}$	5.28	5.00279	0.01105	$0.13 \cdot 10^{-3}$	5.75
		1	5.03435	0.04191	$2.94 \cdot 10^{-3}$	1	5.00826	0.02070	$0.50 \cdot 10^{-3}$	5.91	5.00371	0.02092	$0.45 \cdot 10^{-3}$	6.51
		3	5.10059	0.12815	$26.5 \cdot 10^{-3}$	1	5.02402	0.05935	$4.10 \cdot 10^{-3}$	6.47	5.01017	0.06195	$3.94 \cdot 10^{-3}$	6.73
	100	0.5	5.01676	0.01774	$0.60 \cdot 10^{-3}$	1	5.00322	0.00815	$0.08 \cdot 10^{-3}$	7.75	5.00129	0.00925	$0.09 \cdot 10^{-3}$	6.83
		1	5.03410	0.03602	$2.46 \cdot 10^{-3}$	1	5.00719	0.01580	$0.30 \cdot 10^{-3}$	8.17	5.00299	0.01737	$0.31 \cdot 10^{-3}$	7.92
		3	5.10924	0.10933	$23.9 \cdot 10^{-3}$	1	5.02289	0.04740	$2.77 \cdot 10^{-3}$	8.62	5.01010	0.05222	$2.83 \cdot 10^{-3}$	8.44
β_2	30	0.5	0.99927	0.00136	$2.38 \cdot 10^{-6}$	1	0.99971	0.00085	$0.81 \cdot 10^{-6}$	2.94	0.99980	0.00078	$0.65 \cdot 10^{-6}$	3.64
		1	0.99863	0.00265	$8.89 \cdot 10^{-6}$	1	0.99948	0.00163	$2.93 \cdot 10^{-6}$	3.03	0.99964	0.00150	$2.37 \cdot 10^{-6}$	3.75
		3	0.99632	0.00739	$68.1 \cdot 10^{-6}$	1	0.99859	0.00448	$22.1 \cdot 10^{-6}$	3.09	0.99903	0.00409	$17.6 \cdot 10^{-6}$	3.87
	50	0.5	0.99928	0.00092	$1.37 \cdot 10^{-6}$	1	0.99979	0.00053	$0.32 \cdot 10^{-6}$	4.25	0.99988	0.00052	$0.28 \cdot 10^{-6}$	4.84
		1	0.99874	0.00182	$4.91 \cdot 10^{-6}$	1	0.99965	0.00100	$1.12 \cdot 10^{-6}$	4.39	0.99980	0.00096	$0.97 \cdot 10^{-6}$	5.07
		3	0.99656	0.00551	$42.2 \cdot 10^{-6}$	1	0.99909	0.00285	$8.94 \cdot 10^{-6}$	4.71	0.99958	0.00279	$7.96 \cdot 10^{-6}$	5.30
	70	0.5	0.99936	0.00078	$1.02 \cdot 10^{-6}$	1	0.99982	0.00041	$0.20 \cdot 10^{-6}$	5.05	0.99990	0.00042	$0.19 \cdot 10^{-6}$	5.50
		1	0.99876	0.00157	$4.00 \cdot 10^{-6}$	1	0.99970	0.00079	$0.71 \cdot 10^{-6}$	5.64	0.99987	0.00079	$0.64 \cdot 10^{-6}$	6.22
		3	0.99643	0.00471	$35.0 \cdot 10^{-6}$	1	0.99914	0.00224	$5.77 \cdot 10^{-6}$	6.06	0.99965	0.00233	$5.54 \cdot 10^{-6}$	6.31
	100	0.5	0.99939	0.00066	$0.81 \cdot 10^{-6}$	1	0.99989	0.00031	$0.11 \cdot 10^{-6}$	7.43	0.99996	0.00035	$0.12 \cdot 10^{-6}$	6.59
		1	0.99877	0.00134	$3.30 \cdot 10^{-6}$	1	0.99974	0.00060	$0.43 \cdot 10^{-6}$	7.71	0.99989	0.00066	$0.44 \cdot 10^{-6}$	7.48
		3	0.99610	0.00403	$31.4 \cdot 10^{-6}$	1	0.99917	0.00181	$3.94 \cdot 10^{-6}$	7.96	0.99964	0.00197	$4.02 \cdot 10^{-6}$	7.80

Tablo 2. Eşitlik (24)'de verilen KEDAR(1; 2, 2) biçimindeki hataların varlığında elde edilen yaklaşık sonuçlar

Parametre	n	σ	EKK				DİAEKK-AR				DİAEKK-KEDAR			
			Ort	St.Sapma	HKO	Etk	Ort	St.Sapma	HKO	Etk	Ort	St.Sapma	HKO	Etk
β_1	30	0.5	5.01411	0.02834	$1.00 \cdot 10^{-3}$	1	5.00624	0.01934	$0.41 \cdot 10^{-3}$	2.43	5.00549	0.01835	$0.37 \cdot 10^{-3}$	2.73
		1	5.02547	0.05622	$3.81 \cdot 10^{-3}$	1	5.01094	0.03777	$1.55 \cdot 10^{-3}$	2.46	5.00873	0.03529	$1.32 \cdot 10^{-3}$	2.88
		3	5.07257	0.16838	$33.6 \cdot 10^{-3}$	1	5.03098	0.10580	$12.2 \cdot 10^{-3}$	2.77	5.02616	0.10402	$11.5 \cdot 10^{-3}$	2.92
	50	0.5	5.01139	0.02082	$0.56 \cdot 10^{-3}$	1	5.00336	0.01260	$0.17 \cdot 10^{-3}$	3.31	5.00258	0.01265	$0.16 \cdot 10^{-3}$	3.38
		1	5.02266	0.04049	$2.15 \cdot 10^{-3}$	1	5.00649	0.02392	$0.61 \cdot 10^{-3}$	3.50	5.00459	0.02383	$0.59 \cdot 10^{-3}$	3.65
		3	5.06365	0.12776	$20.4 \cdot 10^{-3}$	1	5.01819	0.07439	$5.87 \cdot 10^{-3}$	3.47	5.01211	0.07306	$5.49 \cdot 10^{-3}$	3.71
	70	0.5	5.01223	0.01686	$0.43 \cdot 10^{-3}$	1	5.00288	0.00968	$0.10 \cdot 10^{-3}$	4.26	5.00218	0.01004	$0.11 \cdot 10^{-3}$	4.11
		1	5.02242	0.03290	$1.59 \cdot 10^{-3}$	1	5.00526	0.01833	$0.36 \cdot 10^{-3}$	4.36	5.00383	0.01922	$0.38 \cdot 10^{-3}$	4.13
		3	5.06772	0.11025	$16.7 \cdot 10^{-3}$	1	5.01843	0.05755	$3.65 \cdot 10^{-3}$	4.58	5.01284	0.06190	$4.00 \cdot 10^{-3}$	4.19
	100	0.5	5.01127	0.01478	$0.35 \cdot 10^{-3}$	1	5.00271	0.00819	$0.07 \cdot 10^{-3}$	4.64	5.00208	0.00882	$0.08 \cdot 10^{-3}$	4.21
		1	5.02232	0.02860	$1.32 \cdot 10^{-3}$	1	5.00557	0.01508	$0.26 \cdot 10^{-3}$	5.10	5.00378	0.01704	$0.30 \cdot 10^{-3}$	4.32
		3	5.06414	0.09003	$12.2 \cdot 10^{-3}$	1	5.01375	0.04581	$2.29 \cdot 10^{-3}$	5.34	5.00852	0.05110	$2.68 \cdot 10^{-3}$	4.55
β_2	30	0.5	0.99948	0.00111	$1.49 \cdot 10^{-6}$	1	0.99977	0.00077	$0.64 \cdot 10^{-6}$	2.34	0.99980	0.00072	$0.57 \cdot 10^{-6}$	2.64
		1	0.99907	0.00218	$5.63 \cdot 10^{-6}$	1	0.99960	0.00149	$2.37 \cdot 10^{-6}$	2.38	0.99968	0.00138	$2.01 \cdot 10^{-6}$	2.80
		3	0.99741	0.00649	$48.9 \cdot 10^{-6}$	1	0.99888	0.00417	$18.7 \cdot 10^{-6}$	2.62	0.99905	0.00409	$17.6 \cdot 10^{-6}$	2.77
	50	0.5	0.99958	0.00080	$0.82 \cdot 10^{-6}$	1	0.99987	0.00049	$0.26 \cdot 10^{-6}$	3.18	0.99990	0.00049	$0.25 \cdot 10^{-6}$	3.30
		1	0.99918	0.00153	$3.02 \cdot 10^{-6}$	1	0.99976	0.00092	$0.90 \cdot 10^{-6}$	3.35	0.99984	0.00091	$0.86 \cdot 10^{-6}$	3.52
		3	0.99774	0.00481	$28.2 \cdot 10^{-6}$	1	0.99936	0.00283	$8.43 \cdot 10^{-6}$	3.34	0.99958	0.00279	$7.96 \cdot 10^{-6}$	3.54
	70	0.5	0.99955	0.00064	$0.60 \cdot 10^{-6}$	1	0.99990	0.00037	$0.15 \cdot 10^{-6}$	4.01	0.99992	0.00038	$0.16 \cdot 10^{-6}$	3.93
		1	0.99919	0.00123	$2.18 \cdot 10^{-6}$	1	0.99981	0.00069	$0.52 \cdot 10^{-6}$	4.19	0.99986	0.00073	$0.55 \cdot 10^{-6}$	3.99
		3	0.99759	0.00411	$22.7 \cdot 10^{-6}$	1	0.99934	0.00219	$5.24 \cdot 10^{-6}$	4.34	0.99954	0.00234	$5.69 \cdot 10^{-6}$	4.00
	100	0.5	0.99959	0.00056	$0.48 \cdot 10^{-6}$	1	0.99990	0.00031	$0.11 \cdot 10^{-6}$	4.47	0.99993	0.00033	$0.12 \cdot 10^{-6}$	4.10
		1	0.99919	0.00108	$1.81 \cdot 10^{-6}$	1	0.99980	0.00057	$0.37 \cdot 10^{-6}$	4.87	0.99986	0.00064	$0.43 \cdot 10^{-6}$	4.18
		3	0.99771	0.00332	$16.3 \cdot 10^{-6}$	1	0.99951	0.00174	$3.27 \cdot 10^{-6}$	4.97	0.99970	0.00193	$3.81 \cdot 10^{-6}$	4.27

Tablo 3. Eşitlik (25)'de verilen KEDAR(1; 1, 2) biçimindeki hataların varlığında AR(1) yaklaşımıyla elde edilen yaklaşık sonuçlar

Parametre	n	σ	EKK				DİAEKK-AR				DİAEKK-KEDAR			
			Ort	St.Sapma	HKO	Etk	Ort	St.Sapma	HKO	Etk	Ort	St.Sapma	HKO	Etk
β_1	30	0.5	4.98671	0.03781	$1.61 \cdot 10^{-3}$	1	4.99583	0.02348	$0.57 \cdot 10^{-3}$	2.82	4.99805	0.02193	$0.48 \cdot 10^{-3}$	3.31
		1	4.97119	0.07498	$6.45 \cdot 10^{-3}$	1	4.99163	0.04604	$2.19 \cdot 10^{-3}$	2.95	4.99590	0.04241	$1.82 \cdot 10^{-3}$	3.55
		3	4.88526	0.23240	$67.2 \cdot 10^{-3}$	1	4.95867	0.13982	$21.3 \cdot 10^{-3}$	3.16	4.97277	0.12903	$17.4 \cdot 10^{-3}$	3.86
	50	0.5	4.98240	0.02918	$1.16 \cdot 10^{-3}$	1	4.99584	0.01487	$0.24 \cdot 10^{-3}$	4.87	4.99822	0.01399	$0.20 \cdot 10^{-3}$	5.84
		1	4.96122	0.06269	$5.43 \cdot 10^{-3}$	1	4.99056	0.03016	$1.00 \cdot 10^{-3}$	5.44	4.99540	0.02917	$0.87 \cdot 10^{-3}$	6.23
		3	4.88370	0.18471	$47.6 \cdot 10^{-3}$	1	4.97108	0.08725	$8.45 \cdot 10^{-3}$	5.64	4.98355	0.08434	$7.38 \cdot 10^{-3}$	6.45
	70	0.5	4.98199	0.02620	$1.01 \cdot 10^{-3}$	1	4.99630	0.01156	$0.15 \cdot 10^{-3}$	6.87	4.99829	0.01172	$0.14 \cdot 10^{-3}$	7.21
		1	4.96046	0.05112	$4.18 \cdot 10^{-3}$	1	4.99216	0.02266	$0.58 \cdot 10^{-3}$	7.26	4.99694	0.02277	$0.53 \cdot 10^{-3}$	7.91
		3	4.87363	0.16195	$42.2 \cdot 10^{-3}$	1	4.97645	0.06593	$4.90 \cdot 10^{-3}$	8.61	4.98863	0.06681	$4.59 \cdot 10^{-3}$	9.19
	100	0.5	4.98004	0.02240	$0.90 \cdot 10^{-3}$	1	4.99680	0.00901	$0.09 \cdot 10^{-3}$	9.85	4.99892	0.00903	$0.08 \cdot 10^{-3}$	10.90
		1	4.95998	0.04399	$3.54 \cdot 10^{-3}$	1	4.99415	0.01740	$0.34 \cdot 10^{-3}$	10.49	4.99816	0.01752	$0.31 \cdot 10^{-3}$	11.40
		3	4.87371	0.12898	$32.6 \cdot 10^{-3}$	1	4.98172	0.05151	$2.99 \cdot 10^{-3}$	10.91	4.99093	0.05238	$2.83 \cdot 10^{-3}$	11.53
β_2	30	0.5	1.00050	0.00146	$2.38 \cdot 10^{-6}$	1	1.00016	0.00091	$0.86 \cdot 10^{-6}$	2.76	1.00007	0.00085	$0.73 \cdot 10^{-6}$	3.25
		1	1.00109	0.00291	$9.65 \cdot 10^{-6}$	1	1.00032	0.00180	$3.33 \cdot 10^{-6}$	2.90	1.00016	0.00165	$2.76 \cdot 10^{-6}$	3.50
		3	1.00456	0.00944	$109.9 \cdot 10^{-6}$	1	1.00162	0.00554	$33.2 \cdot 10^{-6}$	3.30	1.00109	0.00506	$26.7 \cdot 10^{-6}$	4.11
	50	0.5	1.00065	0.00111	$1.65 \cdot 10^{-6}$	1	1.00015	0.00057	$0.35 \cdot 10^{-6}$	4.77	1.00006	0.00053	$0.29 \cdot 10^{-6}$	5.74
		1	1.00144	0.00239	$7.78 \cdot 10^{-6}$	1	1.00035	0.00115	$1.44 \cdot 10^{-6}$	5.41	1.00017	0.00111	$1.26 \cdot 10^{-6}$	6.16
		3	1.00447	0.00721	$72.0 \cdot 10^{-6}$	1	1.00110	0.00336	$12.5 \cdot 10^{-6}$	5.75	1.00064	0.00323	$10.8 \cdot 10^{-6}$	6.63
	70	0.5	1.00066	0.00098	$1.40 \cdot 10^{-6}$	1	1.00014	0.00044	$0.21 \cdot 10^{-6}$	6.65	1.00006	0.00044	$0.20 \cdot 10^{-6}$	6.99
		1	1.00146	0.00193	$5.87 \cdot 10^{-6}$	1	1.00029	0.00086	$0.82 \cdot 10^{-6}$	7.12	1.00011	0.00086	$0.75 \cdot 10^{-6}$	7.79
		3	1.00477	0.00623	$61.6 \cdot 10^{-6}$	1	1.00088	0.00251	$7.08 \cdot 10^{-6}$	8.70	1.00043	0.00253	$6.59 \cdot 10^{-6}$	9.35
	100	0.5	1.00073	0.00084	$1.24 \cdot 10^{-6}$	1	1.00012	0.00034	$0.13 \cdot 10^{-6}$	9.51	1.00004	0.00034	$0.12 \cdot 10^{-6}$	10.49
		1	1.00147	0.00166	$4.90 \cdot 10^{-6}$	1	1.00022	0.00066	$0.48 \cdot 10^{-6}$	10.17	1.00007	0.00066	$0.44 \cdot 10^{-6}$	11.10
		3	1.00471	0.00496	$46.8 \cdot 10^{-6}$	1	1.00067	0.00197	$4.32 \cdot 10^{-6}$	10.83	1.00034	0.00199	$4.09 \cdot 10^{-6}$	11.45

Tablo 4. Eşitlik (25)'de verilen KEDAR(1; 1, 2) biçimindeki hataların varlığında AR(2) yaklaşımıyla elde edilen yaklaşık sonuçlar

Parametre	n	σ	EKK				DİAEKK-AR				DİAEKK-KEDAR			
			Ort	St.Sapma	HKO	Etk	Ort	St.Sapma	HKO	Etk	Ort	St.Sapma	HKO	Etk
β_1	30	0.5	4.98650	0.03931	$1.73 \cdot 10^{-3}$	1	4.99504	0.02461	$0.63 \cdot 10^{-3}$	2.74	4.99702	0.02176	$0.48 \cdot 10^{-3}$	3.58
		1	4.96698	0.07685	$7.00 \cdot 10^{-3}$	1	4.98820	0.04461	$2.13 \cdot 10^{-3}$	3.29	4.99179	0.04153	$1.79 \cdot 10^{-3}$	3.90
		3	4.89928	0.24152	$68.5 \cdot 10^{-3}$	1	4.96874	0.12967	$17.8 \cdot 10^{-3}$	3.85	4.97333	0.12262	$15.7 \cdot 10^{-3}$	4.35
	50	0.5	4.98405	0.02960	$1.13 \cdot 10^{-3}$	1	4.99643	0.01439	$0.22 \cdot 10^{-3}$	5.14	4.99753	0.01366	$0.19 \cdot 10^{-3}$	5.87
		1	4.96196	0.05937	$4.97 \cdot 10^{-3}$	1	4.99127	0.02825	$0.87 \cdot 10^{-3}$	5.69	4.99427	0.02698	$0.76 \cdot 10^{-3}$	6.54
		3	4.88711	0.17195	$42.3 \cdot 10^{-3}$	1	4.97658	0.07992	$6.94 \cdot 10^{-3}$	6.10	4.98065	0.07560	$6.09 \cdot 10^{-3}$	6.95
	70	0.5	4.98010	0.02527	$1.03 \cdot 10^{-3}$	1	4.99664	0.01126	$0.14 \cdot 10^{-3}$	7.49	4.99790	0.01099	$0.13 \cdot 10^{-3}$	8.26
		1	4.96017	0.05094	$4.18 \cdot 10^{-3}$	1	4.99276	0.02165	$0.52 \cdot 10^{-3}$	8.02	4.99533	0.02122	$0.47 \cdot 10^{-3}$	8.86
		3	4.87545	0.15855	$40.7 \cdot 10^{-3}$	1	4.97774	0.06456	$4.66 \cdot 10^{-3}$	8.72	4.98402	0.06399	$4.35 \cdot 10^{-3}$	9.34
	100	0.5	4.98025	0.02214	$0.88 \cdot 10^{-3}$	1	4.99681	0.00908	$0.09 \cdot 10^{-3}$	9.51	4.99804	0.00885	$0.08 \cdot 10^{-3}$	10.72
		1	4.95911	0.04429	$3.63 \cdot 10^{-3}$	1	4.99448	0.01722	$0.33 \cdot 10^{-3}$	11.12	4.99655	0.01715	$0.31 \cdot 10^{-3}$	11.87
		3	4.88086	0.13230	$31.7 \cdot 10^{-3}$	1	4.98317	0.05065	$2.85 \cdot 10^{-3}$	11.13	4.98872	0.05027	$2.65 \cdot 10^{-3}$	11.94
β_2	30	0.5	1.00051	0.00155	$2.65 \cdot 10^{-6}$	1	1.00019	0.00099	$1.01 \cdot 10^{-6}$	2.62	1.00011	0.00086	$0.76 \cdot 10^{-6}$	3.50
		1	1.00126	0.00300	$10.6 \cdot 10^{-6}$	1	1.00045	0.00175	$3.28 \cdot 10^{-6}$	3.22	1.00031	0.00162	$2.72 \cdot 10^{-6}$	3.88
		3	1.00399	0.00960	$108.2 \cdot 10^{-6}$	1	1.00123	0.00508	$27.4 \cdot 10^{-6}$	3.95	1.00106	0.00476	$23.8 \cdot 10^{-6}$	4.54
	50	0.5	1.00058	0.00112	$1.59 \cdot 10^{-6}$	1	1.00013	0.00055	$0.32 \cdot 10^{-6}$	4.95	1.00009	0.00052	$0.28 \cdot 10^{-6}$	5.69
		1	1.00141	0.00226	$7.09 \cdot 10^{-6}$	1	1.00032	0.00107	$1.26 \cdot 10^{-6}$	5.64	1.00021	0.00103	$1.10 \cdot 10^{-6}$	6.43
		3	1.00432	0.00663	$62.6 \cdot 10^{-6}$	1	1.00089	0.00307	$10.2 \cdot 10^{-6}$	6.13	1.00074	0.00288	$8.85 \cdot 10^{-6}$	7.07
	70	0.5	1.00072	0.00095	$1.42 \cdot 10^{-6}$	1	1.00012	0.00043	$0.20 \cdot 10^{-6}$	7.20	1.00007	0.00042	$0.18 \cdot 10^{-6}$	7.94
		1	1.00147	0.00192	$5.82 \cdot 10^{-6}$	1	1.00026	0.00082	$0.74 \cdot 10^{-6}$	7.82	1.00017	0.00080	$0.68 \cdot 10^{-6}$	8.61
		3	1.00471	0.00612	$59.6 \cdot 10^{-6}$	1	1.00084	0.00247	$6.78 \cdot 10^{-6}$	8.80	1.00061	0.00243	$6.28 \cdot 10^{-6}$	9.49
	100	0.5	1.00072	0.00083	$1.21 \cdot 10^{-6}$	1	1.00011	0.00034	$0.13 \cdot 10^{-6}$	9.20	1.00007	0.00033	$0.12 \cdot 10^{-6}$	10.34
		1	1.00150	0.00167	$5.04 \cdot 10^{-6}$	1	1.00020	0.00066	$0.47 \cdot 10^{-6}$	10.70	1.00013	0.00065	$0.44 \cdot 10^{-6}$	11.37
		3	1.00444	0.00505	$45.2 \cdot 10^{-6}$	1	1.00062	0.00193	$4.10 \cdot 10^{-6}$	11.02	1.00042	0.00191	$3.82 \cdot 10^{-6}$	11.84

Tablo 5. Eşitlik (26)'da verilen özel durumlu KEDAR(1; 1, 1) biçimindeki hataların varlığında elde edilen yaklaşık sonuçlar

Parametre	n	σ	EKK				DİAEKK-AR				DİAEKK-KEDAR			
			Ort	St.Sapma	HKO	Etk	Ort	St.Sapma	HKO	Etk	Ort	St.Sapma	HKO	Etk
β_1	30	0.5	5.02839	0.04707	$3.02 \cdot 10^{-3}$	1	5.01211	0.03028	$1.06 \cdot 10^{-3}$	2.84	5.00992	0.02962	$0.98 \cdot 10^{-3}$	3.10
		1	5.05535	0.08828	$10.9 \cdot 10^{-3}$	1	5.02113	0.05694	$3.69 \cdot 10^{-3}$	2.94	5.01688	0.05599	$3.42 \cdot 10^{-3}$	3.17
		3	5.13514	0.27915	$96.2 \cdot 10^{-3}$	1	5.04953	0.17103	$31.7 \cdot 10^{-3}$	3.03	5.03223	0.16135	$27.1 \cdot 10^{-3}$	3.55
	50	0.5	5.02778	0.03452	$1.96 \cdot 10^{-3}$	1	5.00866	0.01892	$0.43 \cdot 10^{-3}$	4.53	5.00632	0.01884	$0.40 \cdot 10^{-3}$	4.97
		1	5.05050	0.07029	$7.49 \cdot 10^{-3}$	1	5.01412	0.03672	$1.55 \cdot 10^{-3}$	4.84	5.01029	0.03687	$1.47 \cdot 10^{-3}$	5.11
		3	5.16770	0.21052	$72.4 \cdot 10^{-3}$	1	5.04575	0.11351	$15.0 \cdot 10^{-3}$	4.83	5.02434	0.11343	$13.5 \cdot 10^{-3}$	5.38
	70	0.5	5.02666	0.02949	$1.58 \cdot 10^{-3}$	1	5.00682	0.01576	$0.29 \cdot 10^{-3}$	5.36	5.00519	0.01689	$0.31 \cdot 10^{-3}$	5.06
		1	5.05205	0.05755	$6.02 \cdot 10^{-3}$	1	5.01200	0.02965	$1.02 \cdot 10^{-3}$	5.88	5.00827	0.03286	$1.15 \cdot 10^{-3}$	5.24
		3	5.16834	0.18297	$61.8 \cdot 10^{-3}$	1	5.04429	0.09178	$10.4 \cdot 10^{-3}$	5.95	5.02918	0.09846	$10.5 \cdot 10^{-3}$	5.86
	100	0.5	5.02568	0.02425	$1.25 \cdot 10^{-3}$	1	5.00509	0.01210	$0.17 \cdot 10^{-3}$	7.24	5.00364	0.01339	$0.19 \cdot 10^{-3}$	6.48
		1	5.05323	0.04828	$5.16 \cdot 10^{-3}$	1	5.01063	0.02334	$0.66 \cdot 10^{-3}$	7.85	5.00539	0.02643	$0.73 \cdot 10^{-3}$	7.10
		3	5.16606	0.14676	$49.1 \cdot 10^{-3}$	1	5.03482	0.06954	$6.05 \cdot 10^{-3}$	8.12	5.02337	0.07809	$6.64 \cdot 10^{-3}$	7.39
β_2	30	0.5	0.99895	0.00184	$4.48 \cdot 10^{-6}$	1	0.99955	0.00119	$1.63 \cdot 10^{-6}$	2.76	0.99963	0.00116	$1.48 \cdot 10^{-6}$	3.02
		1	0.99799	0.00338	$15.4 \cdot 10^{-6}$	1	0.99924	0.00219	$5.39 \cdot 10^{-6}$	2.86	0.99939	0.00216	$5.04 \cdot 10^{-6}$	3.06
		3	0.99534	0.01076	$137.6 \cdot 10^{-6}$	1	0.99830	0.00679	$49.0 \cdot 10^{-6}$	2.81	0.99892	0.00636	$41.6 \cdot 10^{-6}$	3.31
	50	0.5	0.99899	0.00130	$2.72 \cdot 10^{-6}$	1	0.99968	0.00073	$0.63 \cdot 10^{-6}$	4.33	0.99977	0.00072	$0.57 \cdot 10^{-6}$	4.74
		1	0.99817	0.00265	$10.3 \cdot 10^{-6}$	1	0.99949	0.00140	$2.23 \cdot 10^{-6}$	4.64	0.99962	0.00140	$2.10 \cdot 10^{-6}$	4.93
		3	0.99411	0.00780	$95.5 \cdot 10^{-6}$	1	0.99840	0.00430	$21.0 \cdot 10^{-6}$	4.54	0.99917	0.00431	$19.3 \cdot 10^{-6}$	4.95
	70	0.5	0.99903	0.00111	$2.17 \cdot 10^{-6}$	1	0.99975	0.00060	$0.42 \cdot 10^{-6}$	5.17	0.99981	0.00064	$0.44 \cdot 10^{-6}$	4.94
		1	0.99813	0.00216	$8.16 \cdot 10^{-6}$	1	0.99957	0.00113	$1.46 \cdot 10^{-6}$	5.60	0.99970	0.00124	$1.62 \cdot 10^{-6}$	5.03
		3	0.99405	0.00668	$80.0 \cdot 10^{-6}$	1	0.99840	0.00345	$14.5 \cdot 10^{-6}$	5.53	0.99895	0.00368	$14.7 \cdot 10^{-6}$	5.46
	100	0.5	0.99907	0.00090	$1.68 \cdot 10^{-6}$	1	0.99981	0.00046	$0.25 \cdot 10^{-6}$	6.84	0.99987	0.00051	$0.27 \cdot 10^{-6}$	6.17
		1	0.99808	0.00181	$6.96 \cdot 10^{-6}$	1	0.99961	0.00089	$0.94 \cdot 10^{-6}$	7.43	0.99980	0.00099	$1.03 \cdot 10^{-6}$	6.78
		3	0.99413	0.00536	$63.3 \cdot 10^{-6}$	1	0.99876	0.00263	$8.43 \cdot 10^{-6}$	7.50	0.99918	0.00292	$9.21 \cdot 10^{-6}$	6.87

elde edilenlerdir. Özellikle, $n = 30$ gibi daha küçük hacimli örneklemelerde DİAEKK-KEDAR yöntemiyle elde edilen parametre kestirimlerinin standart sapmaları en küçük olmaktadır. Bu doğrultuda, göreceli etkinlikler açısından küçük hacimli örneklem için DİAEKK-KEDAR yönteminin diğer yöntemlere göre daha etkin olduğu, ancak gözlem sayısı arttıkça DİAEKK-AR yöntemi etkinlik değerlerinin de artış göstererek $n = 70$ ve $n = 100$ gibi büyük hacimli örneklemelerde en büyük olduğu göze çarpmaktadır. İncelenen üç yöntem içinde EKK etkin bir yöntem değildir. Ayrıca, gözlem sayısı arttıkça yani örneklem hacmi büyüdükçe DİAEKK ile elde edilen parametre kestirimlerinin EKK ile elde edilenlere göre etkinlikleri de gözle görülür biçimde artmaktadır.

IV. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma, doğrusal olmayan regresyon modellerinde otokorelasyonlu hatalar sorunu temelinde oluşturulmuştur. Bir regresyon varsayım bozulumu olarak bilinen otokorelasyonlu hataların ortaya çıkmasında, farklı bir durum olarak verilen KEDAR modellerin kullanımı ile ortaya çıkan sorunun üstesinden gelebilecek bir yaklaşım araştırılmıştır. Bir başka deyişle, böyle bir sorunun varlığında etkin parametre kestirimleri elde edebilecek uyarlamalı bir yöntem oluşturulmaya çalışılmıştır. Bu amaçla, literatürde tanımlı iki aşamalı yöntem üzerinde yoğunlaşmıştır. Her iki aşamada da EKK uygulanan bu yöntemdeki farklılık, ikinci aşamadan önce bir dönüşüm matrisi oluşturularak modelin dönüştürülmesi ve otokorelasyon probleminin ortadan kaldırılmasıdır. Bu bağlamda, dönüşüm matrisinin oluşturulması aşamasında karesel çokterimli bir daraltma fonksiyonu kullanımı düşünülmüş ve böylece DİAEKK yöntemi tasarlanmıştır. Bu yöntem, hem literatürde sıklıkla verilen AR modeli hem de KEDAR modeli üzerinden uyarlanmış ve DİAEKK-AR ile DİAEKK-KEDAR yaklaşımları verilmiştir. Bu yaklaşımların ve klasik EKK yönteminin, KEDAR biçimli hataların varlığında nasıl sonuçlar vereceği merak konusu olduğundan kapsamlı bir Monte Carlo benzetim çalışması planlanmıştır. Bir önceki kısımda koşulları ve sonuçları birlikte verilen bu kapsamlı çalışma ile oluşturulan yaklaşımların parametre kestirim etkinlikleri karşılaştırılmıştır.

Benzetim çalışması ile varılan sonuçlardan biri, kullanılan her üç yöntemin de yansız parametre kestirimleri ürettiğidir. Bunun yanında, küçük hacimli örneklemelerde parametre kestirim etkinliği açısından DİAEKK-KEDAR yaklaşımı ön plana çıkmaktadır. Gözlem sayısı arttıkça, yani büyük hacimli örneklemelerde DİAEKK-AR yaklaşımının etkinliği en fazla olabilmektedir. Bu durum, büyük hacimli örneklemelerde KEDAR biçimli hataların AR biçimli hatalara benzediği biçiminde yorumlanabilir. Bir başka deyişle, gözlem sayısının çok büyük olduğu durumlarda otokorelasyon için tanımlanan KEDAR etkisi ortadan kalkabilmektedir. Ancak, her ne olursa

olsun iki yaklaşım da literatürde otokorelasyonlu hataların varlığında etkin olmayan parametre kestirimleri verdiği bilinen EKK yöntemine göre oldukça başarılı sonuçlar vermektedir. Hatta, benzetim çalışması için tanımlanan bütün durumlarda gözlem sayısı arttıkça yaklaşımlara ait etkinlik değerleri gözle görülür biçimde artmaktadır. Bununla birlikte, otokorelasyonlu hataların varlığında tanımlanan Monte Carlo deneyleri veya çalışılan gerçek veri kümeleri değişikçe EKK yönteminin dışındaki diğer yaklaşımların etkinlik sıralarının ve bundan kaynaklı ortaya çıkan sonuçların değişiklik gösterebileceği unutulmamalıdır.

Sonuç olarak, KEDAR biçimli hataların varlığındaki doğrusal olmayan regresyon analizinde etkin parametre kestirimleri elde etmek için özellikle küçük hacimli örneklemelerde DİAEKK-KEDAR yaklaşımının kullanımı tercih edilebilir. Bu çalışmada, otokorelasyon olarak incelenen yapı iki düzenli KEDAR modelleri üzerine kuruludur. İleriki çalışmalarda, ikiden çok düzenli yapılarla oluşturulan otokorelasyon durumundaki parametre kestirim etkinlikleri konusuna odaklanılabilir.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi tarafından desteklenen 2019-29 numaralı bilimsel araştırma projesinden üretilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Gallant, A.R. (1987). *Nonlinear Statistical Models*. John Wiley and Sons, New York.
- [2] Gallant, A.R. ve Goebel, J.J. (1976). Nonlinear regression with autocorrelated errors. *Journal of the American Statistical Association*, 71(356), 961-967.
- [3] Glasbey, C.A. (1980). Nonlinear regression with autoregressive time series errors. *Biometrics*, 36(1), 135-139.
- [4] Glasbey, C.A. (1979). Correlated Residuals in Nonlinear Regression Applied to Growth Data. *Applied Statistics*, 28(3), 251-259.
- [5] Glasbey, C.A. (1988). Examples of Regression with Serially Correlated Errors. *The Statistician*, 37(3), 277-291.
- [6] Huang, M.N.L. ve Huang, M.K. (1991). A Parameter-Elimination Method for Nonlinear Regression with Linear Parameters and Autocorrelated Errors. *Biometrical Journal*, 33(8), 937-950.
- [7] Bender, R. ve Heinemann, L. (1995). Fitting Nonlinear Regression Models with Correlated Errors to Individual Pharmacodynamic Data Using SAS Software. *Journal of Pharmacokinetics and Biopharmaceutics*, 23(1), 87-100.
- [8] Aşıkil, B. ve Erar, A. (2013). Polynomial tapered two-stage least squares method in nonlinear regression. *Applied Mathematics and Computation*, 219(18), 9743-9754.

-
- [9] Enders, W. (1995). *Applied Econometric Time Series*. John Wiley and Sons, New York.
- [10] Tong, H. (1983). *Threshold Models in Nonlinear Time Series Analysis*. Lecture Notes in Statistics, Springer-Verlag, New York.
- [11] Tsay, R.S. (1989). Testing and modeling threshold autoregressive processes. *Journal of the American Statistical Association*, 84(405), 231-240.
- [12] Chan, K.S. ve Tong, H. (1986). On estimating thresholds in autoregressive models. *Journal of Time Series Analysis*, 7(3), 179-190.
- [13] Chan, K.S. (1993). Consistency and limiting distribution of the least squares estimator of a threshold autoregressive model. *The Annals of Statistics*, 21(1), 520-533.
- [14] Chan, W.S. ve Cheung, S.H. (1994). On robust estimation of threshold autoregressions. *Journal of Forecasting*, 13(1), 37-49.
- [15] Jaras, J. ve Gishani, A.M. (2010). *Threshold Detection in Autoregressive Nonlinear Models*. MSc. Thesis, Lund University, Sweden.
- [16] Seber, G.A.F. ve Wild, C.J. (1989). *Nonlinear Regression*. John Wiley and Sons, New York.
- [17] Aşıkıl, B. (2018). An Adapted Approach for Self-Exciting Threshold Autoregressive Disturbances in Multiple Linear Regression. *Gazi University Journal of Science*, 31(4), 1268-1282.