

Hermite ve Laguerre Polinomlarına Dayalı Çok Kriterli Karar Verme Yöntemleri: Yenilikçi Bir Yaklaşım

Yadigar Polat¹ 

ÖZET

Amaç: Bu çalışmanın temel amacı, Çok Kriterli Karar Verme (ÇKKV) yöntemlerinin güvenilirliğini ve hassasiyetini artırmak amacıyla, normalizasyon sürecine Hermite polinomlarını ve kriter ağırlıklandırma sürecine Laguerre polinomlarını entegre etmektir. Hedef, uç değerlerin etkisini azaltmak ve ÇKKV modellerinin doğrusal olmayan karar ortamlarına uyum yeteneğini artırmaktır.

Yöntem: Daha önce yapılan bir çalışmadan alınan ve dört şirketin sıfır atık performanslarını değerlendiren gerçek bir veri seti kullanılmıştır. Kriter ağırlıkları ilk olarak Analitik Hiyerarşi Süreci (AHS) yöntemiyle hesaplanmıştır. Bu ağırlıklar, farklı derecelerdeki Hermite ve Laguerre polinom fonksiyonları kullanılarak dönüştürülmüştür. Dönüştürülmüş ağırlıklar ve normalize edilmiş matrisler, H-ÇKKV ve L-ÇKKV modellerinde alternatiflerin sıralanması için kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar, geleneksel TOPSIS yöntemiyle karşılaştırılarak tutarlılık analizleri yapılmıştır.

Bulgular: Elde edilen sıralama sonuçları, önerilen H-ÇKKV ve L-ÇKKV modelleri ile TOPSIS yöntemi arasında yüksek düzeyde tutarlılık olduğunu göstermiştir. Özellikle ikinci ve dördüncü dereceden Hermite polinomları ile tüm Laguerre polinomu derecelerinin, TOPSIS ile birebir veya büyük ölçüde örtüşen sıralamalar ürettiği belirlenmiştir. Bulgular, polinom tabanlı yaklaşımların doğruluk, kararlılık ve güvenilirlik açısından güçlü bir performans sergilediğini ortaya koymaktadır.

Özgünlük: Bu çalışma, Hermite ve Laguerre polinomlarını doğrudan ÇKKV sürecine entegre ederek hem normalizasyon hem de kriter ağırlıklandırma aşamalarında doğrusal olmayan ve esnek bir karar modeli sunması açısından literatürde özgün bir katkı sağlamaktadır.

Anahtar Kelimeler: Hermite Polinomları, Laguerre Polinomları, Çok Kriterli Karar Verme (ÇKKV), H-ÇKKV, L-ÇKKV.

JEL Kodları: C0, C1 C4.

Multi-Criteria Decision Making Methods Based on Hermite and Laguerre Polynomials: An Innovative Approach

ABSTRACT

Purpose: The main aim of this study is to enhance the reliability and sensitivity of MCDM methods by integrating Hermite polynomials in the normalization process and Laguerre polynomials in the criteria weighting process. The objective is to reduce the impact of outliers and improve the adaptability of MCDM models to non-linear decision environments.

Methodology: A real dataset from a prior study evaluating the zero-waste performance of four companies was utilized. Criteria weights were initially calculated using the Analytic Hierarchy Process (AHP). These weights were then transformed using Hermite and Laguerre polynomial functions of various degrees. The modified weights and normalized matrices were used in H-MCDM and L-MCDM models to rank alternatives. The results were compared with those of the traditional TOPSIS method for consistency analysis.

Findings: The ranking results obtained from the proposed H-MCDM and L-MCDM models indicate a high level of consistency with the classical TOPSIS method. In particular, second- and fourth-degree Hermite polynomials, as well as all Laguerre polynomial degrees, produced rankings that were either identical to or highly consistent with those of TOPSIS. The findings demonstrate that the proposed polynomial-based MCDM approaches exhibit strong performance in terms of accuracy, stability, and reliability.

Originality: This study provides an original contribution to the literature by directly integrating Hermite and Laguerre polynomials into the MCDM process, offering a nonlinear and flexible decision-making framework for both normalization and criterion weighting stages.

Keywords: Hermite Polynomials, Laguerre Polynomials, Multi-Criteria Decision-Making (MCDM), H-MCDM, L-MCDM.

JEL Codes: C0, C1, C4.

¹ Kilis 7 Aralık Üniversitesi, Sağlık Hizmetleri Meslek Yüksekokulu, Tıbbi Hizmetler ve Teknikler Bölümü, Kilis, Türkiye

Sorumlu Yazar-Corresponding Author: Yadigar Polat, yadigarpolat@kilis.edu.tr

DOI: 10.51551/verimlilik.1664958

Araştırma Makalesi / Research Article | Geliş / Submitted: 25.03.2025 | Kabul / Accepted: 04.12.2025

Atıf/Cite: Polat, Y. (2026). "Hermite ve Laguerre Polinomlarına Dayalı Çok Kriterli Karar Verme Yöntemleri: Yenilikçi Bir Yaklaşım", *Verimlilik Dergisi*, 60(1), 249-264.

EXTENDED ABSTRACT

In contemporary decision environments, the complexity of problems involving multiple conflicting criteria has increased the demand for more robust and adaptable Multi-Criteria Decision-Making (MCDM) methods. Traditional MCDM techniques, such as TOPSIS, generally employ linear weighting schemes and fixed normalization processes. These approaches, however, may produce less reliable results when datasets contain extreme values or when non-linear relationships among criteria are present.

This study introduces an innovative approach by incorporating orthogonal polynomial theory—specifically Hermite and Laguerre polynomials—into the MCDM framework. Hermite polynomials are utilized in the normalization phase to mitigate the effects of outliers, thereby ensuring a more balanced transformation of the decision matrix. Laguerre polynomials, on the other hand, are applied in the criteria weighting phase to model non-linear relationships and provide more flexible and sensitive weighting structures. Together, these adaptations aim to enhance the robustness and precision of MCDM analyses.

The proposed methodology, named H-MCDM (Hermite-based MCDM) and L-MCDM (Laguerre-based MCDM), is empirically tested using a real-world dataset involving the evaluation of zero-waste practices in four companies operating in Istanbul's textile and food sectors. The criteria weights are derived using the Analytic Hierarchy Process (AHP), and rankings are generated through polynomial-transformed models. These results are then compared to those obtained via the traditional TOPSIS method to assess consistency and reliability.

The findings indicate a strong alignment between the polynomial-based models and TOPSIS. Specifically, second- and fourth-degree Hermite polynomial models yielded identical rankings to TOPSIS. Similarly, all Laguerre polynomial degrees produced results consistent with TOPSIS rankings. This validates the proposed approach's capability to maintain decision accuracy while addressing limitations inherent in traditional methods. Moreover, the polynomial-based models demonstrate significant flexibility in capturing the influence of both extreme values and complex weighting requirements.

In terms of originality, this research is the first to directly integrate Hermite and Laguerre polynomials into the core structure of an MCDM model. It opens new avenues for handling data irregularities and enhancing analytical depth in decision-making frameworks. By offering a novel, non-linear approach to both normalization and weighting, this study contributes significantly to the advancement of MCDM methodologies and provides a solid foundation for future interdisciplinary applications in engineering, sustainability, supply chain management, and beyond.

1. GİRİŞ

Günümüzde karar verme süreçleri, ekonomik, endüstriyel ve teknolojik alanlarda giderek daha karmaşık hale gelmektedir. Bu karmaşıklıklar, çok sayıda kriterin dikkate alınmasını gerektiren karar verme modellerinin geliştirilmesini zorunlu kılmaktadır. Geleneksel Çok Kriterli Karar Verme (ÇKKV) yöntemleri, karar matrisleri üzerinde belirli matematiksel işlemler gerçekleştirilerek en iyi alternatifi belirlemeye odaklanır (Zeleny, 2012: 45; Triantaphyllou ve Triantaphyllou, 2000: 8). Karar vericinin birçok seçenekle karşı karşıya kaldığı durumlarda bu seçenekler arasından amacına en uygun olanı seçmesi karar verme olarak tanımlanır. Bir kararın iyi ya da kötü olması, ulaşılabilen verilere, alternatiflere ve karar vermede kullanılan yöntem ve kriterlere bağlıdır (Tekin, 2008: 20; Timor, 2010: 16).

Karar verme süreci; karar verici, alternatifler, kriterler, karar vericinin öncelikleri ve karar sonuçları elemanlarından oluşur ve problemin tanımı, alternatif çözümlerin ve kriterlerin belirlenmesi, alternatiflerin değerlendirilmesi, alternatiflerden birinin seçilmesi adımları izlenerek gerçekleştirilir (Hillier ve Lieberman, 2015: 8-18; Erdem, 2013: 18).

ÇKKV yöntemleri, farklı kriterlere dayalı olarak alternatiflerin sıralanması ve en iyi seçeneğin belirlenmesi için kullanılan sistematik yaklaşımlardır (Hwang ve Yoon, 1981: 58-59). ÇKKV analizi nicel ve nitel verileri içeren problemlerin çözümünde kullanılır. Kriterlerin ağırlıklandırılması ve alternatiflerin sıralanması olmak üzere iki aşamadan oluşur (Mojaver ve diğerleri, 2022). Bu yöntemler, mühendislikten finansal karar vermeye, sürdürülebilirlikten tedarik zinciri yönetimine kadar birçok alanda geniş uygulama alanına sahiptir (Saaty, 2008: 95-97; Zavadskas ve diğerleri, 2014: 114-115). Ancak, geleneksel ÇKKV yöntemleri genellikle kriterlerin doğrusal olarak ağırlıklandırılmasını ve karar matrisinin normalizasyonunda sabit dönüşüm fonksiyonlarının kullanılmasını temel alır. Bu durum, özellikle veri setlerinde uç değerler bulunduğu veya kriterler arasında doğrusal olmayan ilişkiler mevcut olduğunda karar süreçlerinin güvenilirliğini düşürebilir (Martínez-Finkelshtein ve diğerleri, 2025: 1-3).

Ortogonal polinomlar, matematiksel modelleme, optimizasyon ve veri analizi gibi birçok alanda kullanılan güçlü araçlardır (Gautschi, 2004: 1-6). Bu çalışmada, özellikle Hermite ve Laguerre polinomları kullanılarak ÇKKV süreçlerinde doğruluk ve kararlılığın artırılması amaçlanmaktadır.

Hermite polinomları, veri analizi ve optimizasyon süreçlerinde kullanılan ortogonal polinomlardır ve özellikle uç değerlerin etkisini azaltma konusunda avantaj sağlarlar (Voiculescu, 1997: 45-48). Bu nedenle, karar matrisindeki kriter değerlerinin normalize edilmesi sürecinde Hermite polinomları kullanılarak uç değerlerin etkisi minimize edilebilir. Bu polinom türev ve integral özellikleri, veri setlerinde büyük değerlerin normalizasyonunu doğrusal olmayan bir şekilde gerçekleştirmeye olanak tanır. Bu özellik, karar matrisinin daha sağlıklı işlenmesini ve ÇKKV yöntemlerinin stabilitesini artırmasını sağlar (Martínez-Finkelshtein ve diğerleri, 2025: 1-5).

Laguerre polinomları, diferansiyel denklemler ve optimizasyon problemlerinde kullanılan bir başka önemli polinom ailesidir ve özellikle kriter ağırlıklarının belirlenmesinde etkili olabilirler (Laudadio ve diğerleri, 2025:1-4). Bu polinomlar, kriterlerin önem seviyelerini belirlerken doğrusal olmayan ağırlıklandırma imkânı sunar. Bu polinom, klasik kriter ağırlıklandırma yöntemlerine kıyasla daha hassas bir model sunarak, alternatiflerin sıralanmasını daha tutarlı ve doğrusal olmayan ilişkileri göz önünde bulunduran bir şekilde gerçekleştirmeyi sağlar (Zavadskas ve diğerleri, 2014: 114-116).

Çalışmanın amacı, ÇKKV yöntemlerinde kullanılan veri normalizasyonu ve kriter ağırlıklandırma süreçlerine Hermite ve Laguerre polinomlarını entegre ederek karar doğruluğunu artırmaktır. Çalışmada Klasik normalizasyon ve ağırlıklandırma yöntemlerine alternatif olarak, doğrusal olmayan bir model önerilmektedir. Uç değerlerin karar sürecine etkisini azaltan yeni bir yaklaşım sunulmaktadır. Kriterlerin ağırlıklarının belirlenmesinde polinom tabanlı bir model kullanılmaktadır. Bu yaklaşım, mühendislik optimizasyonu, finansal karar verme, sürdürülebilirlik analizi ve tedarik zinciri yönetimi gibi birçok alanda uygulanabilir.

Çalışmada, ÇKKV yöntemlerinde karar matrisinin işlenmesi ve kriter ağırlıklandırma sürecinde Hermite Polinomlarının Çok Kriterli Karar Verme (H-ÇKKV) ve Laguerre Polinomlarının Çok Kriterli Karar Verme (L-ÇKKV) yöntemlerinin kullanılması önerilmektedir. Bu polinomlar, veri normalizasyonu ve kriter ağırlıklarının belirlenmesi süreçlerinde geleneksel tekniklere kıyasla daha esnek ve hassas bir çözüm sunmaktadır.

Çalışmanın giriş bölümünden sonra yer alan ikinci bölümünde, öncelikle Hermite ve Laguerre polinomlarının matematiksel temelleri ele alınmakta, ardından ÇKKV yöntemlerine ilişkin kavramsal çerçeve ve literatürde yer alan temel yaklaşımlar incelenmektedir. Bu bölümde ayrıca ortogonal polinomların ÇKKV süreçleriyle olası entegrasyonları literatür ışığında tartışılmaktadır. Üçüncü bölümde, çalışmada önerilen metodoloji ayrıntılı biçimde açıklanmakta; H-ÇKKV ve L-ÇKKV yaklaşımlarının matematiksel yapısı, işlem adımları ve karar matrisine uygulanma süreci adım adım sunulmaktadır. Dördüncü bölümde, gerçek bir veri seti kullanılarak önerilen yöntemlerin uygulaması gerçekleştirilmekte;

farklı derecelerden Hermite ve Laguerre polinomları kullanılarak elde edilen alternatif sıralamaları klasik TOPSIS yöntemi sonuçlarıyla karşılaştırılmaktadır. Beşinci ve son bölümde ise elde edilen bulgular genel olarak değerlendirilmekte, önerilen polinom tabanlı ÇKKV yaklaşımlarının karar doğruluğu ve stabilitesi üzerindeki etkileri tartışılmakta ve gelecekte yapılabilecek çalışmalara yönelik öneriler sunulmaktadır.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

2.1. Hermite ve Laguerre Polinomları

Ortogonal polinomlar, diferansiyel denklemlerin çözümlenmesi, sayısal analiz, kuantum fiziği ve sinyal işleme gibi birçok alanda önemli rol oynamaktadır. Bu bağlamda Hermite ve Laguerre polinomları, belirli ağırlık fonksiyonları altında ortogonalite sağlayan özel polinom aileleri olup, özellikle fonksiyonel yaklaşımlar ve integrasyon yöntemleri için güçlü matematiksel araçlardır.

Hermite polinomları, ağırlık fonksiyonu $w(x) = e^{-x^2}$ altında tanımlanmakta olup, özellikle kuantum mekaniğinde harmonik osilatör problemlerinin çözümünde temel fonksiyonlar olarak kullanılmaktadır (Griffiths ve Schroeter, 2005: 68-72). Bu polinomlar, aynı zamanda Gauss-Hermite integrasyonu gibi sayısal yöntemlerde ve sinyal işleme uygulamalarında gürültü azaltma, örüntü tanıma gibi amaçlarla da kullanılmaktadır (Çekiç ve Aydın, 2004: 35-45).

Benzer şekilde, Laguerre polinomları da $w(x) = e^{-x}$ ağırlık fonksiyonu altında tanımlanmakta ve özellikle hidrojen atomunun çözümünde, Gauss-Laguerre integrasyonu gibi sayısal hesaplama yöntemlerinde önemli bir yere sahiptir (Szeg, 1939: 98-102; Griffiths & Schroeter, 2005: 146-150). Ayrıca görüntü işleme ve yapay sinir ağlarında, özellik çıkarımı ve veri dönüşümünde Laguerre temelli momentlerin kullanıldığı çalışmalara rastlanmaktadır (Li ve diğerleri, 2010: 1826-1828).

2.2. Çok Kriterli Karar Verme (ÇKKV)

ÇKKV yöntemleri, birden fazla ölçüt altında optimal kararın verilmesi gereken karmaşık problemler için geliştirilmiş çok boyutlu analiz teknikleridir. Özellikle mühendislik, yönetim, çevre ve tedarik zinciri yönetimi gibi disiplinlerde yaygın olarak kullanılmaktadır (Belton ve Stewart, 2012: 1-5).

Analitik Hiyerarşi Süreci (AHP), karar kriterleri arasındaki göreceli önem derecelerini ikili karşılaştırmalarla belirleyerek karar problemini hiyerarşik bir yapıda çözümlemeyi hedefler (Saaty, 2008: 85). TOPSIS yöntemi ise ideal çözüme olan uzaklıkların ölçülmesi prensibine dayalı bir sıralama metodudur (Hwang & Yoon, 1981: 58-59). Son yıllarda bu yöntemlerin belirsizliğe karşı daha duyarlı hale getirilmesi amacıyla bulanık mantık (fuzzy logic) ile entegrasyonu yaygınlaşmıştır (Kahraman, 2008: 1-6).

2.3. Ortogonal Polinomlar ve ÇKKV Entegrasyonu

Hermite ve Laguerre polinomlarının ÇKKV süreçlerine doğrudan entegrasyonu sınırlı olmakla birlikte, yakınsaklık ve fonksiyonel yaklaşık yetenekleri sayesinde karar matrislerinin dönüştürülmesi, veri gürültüsünün azaltılması, kriter ilişkilerinin modellenmesi gibi dolaylı süreçlerde katkı sağlayabilecekleri görülmektedir (Szeg, 1939: 1-6; Teague, 1980: 920-924).

Özellikle Hermite polinomları, karar verilerinde gürültünün etkisini azaltmak amacıyla uygulanan ön işleme tekniklerinde kullanılarak karar matrislerinin doğruluğunu artırmakta ve böylece daha güvenilir sonuçların elde edilmesini sağlamaktadır (Chen ve diğerleri, 1990: 1196-1201; Rao, 2007: 35-45). Benzer şekilde, Laguerre temelli fonksiyonların karar kriterleri arasındaki bağımlılıkları modelleme ve karar destek sistemlerine entegrasyonunda kullanıldığı örnek çalışmalar da mevcuttur (Karapinar, 2017: 30-40).

Bu bağlamda, Hermite ve Laguerre polinomlarının ÇKKV tekniklerine entegre edilmesi hem sayısal doğruluk hem de karar sürecinin kalitesi açısından potansiyel taşımakta ve literatürde yenilikçi bir araştırma alanı olarak öne çıkmaktadır.

3. METODOLOJİ

Bu çalışmada, Hermite ve Laguerre polinomlarının ÇKKV yöntemlerinde kullanılabilirliğini göstermek amacıyla bir uygulama gerçekleştirilecektir. Polat ve Dalay (2022) tarafından hazırlanan "Sıfır Atık Projesini Uygulayan İşletmelerin AHP ve TOPSIS Yöntemleri Kullanılarak Değerlendirilmesi" başlıklı kitap bölümünde, sıfır atık yönetmeliğinde belirlenen kriterlerin önem dereceleri tespit edilmiştir. Bu kriterler temel alınarak, İstanbul'da tekstil ve gıda sektörlerinde faaliyet gösteren dört işletmenin, söz konusu kriterleri uygulama düzeyine göre sıralanması için uzman değerlendirmelerinden yararlanılmıştır.

Çalışmada, AHP yöntemi kullanılarak elde edilen kriter ağırlıkları, polinom tabanlı ÇKKV yöntemlerine dönüştürülecektir. Daha sonra, TOPSIS yöntemiyle yapılan sıralamalar, polinomlardan elde edilen sıralamalar ile karşılaştırılarak yöntemlerin doğruluğu ve uygulanabilirliği analiz edilecektir.

3.1. Hermite Polinomları

Rodriguez formülü ile tanımlanan ve $H_n(x)$ ile gösterilen Hermite Polinomları Eşitlik 1 ile ifade edildiği gibi verilmektedir (Düşünceli ve Çelik, 2017: 191-193; Çoban, 2018: 56; Wang ve Jiang, 2019: 1034-1036; Akacan, 2020: 21; Kılar, 2023: 15-17; Zahaf ve Mesk, 2025: 884-886; Cesarano ve diğerleri, 2022: 2-3):

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \quad (1)$$

Eşitlik 1 kullanılarak elde edilen ilk beş dereceden Hermite polinomları, aşağıdaki eşitliklerde (Eşitlik 2-7) gösterildiği gibi ifade edilmektedir (Polat, 2004: 29-30; Uzel, 2008: 17-18; Çoban, 2018: 56; Cesarano ve diğerleri, 2022: 2-3):

$$H_0(x) = 1 \quad (2)$$

$$H_1(x) = 2x \quad (3)$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2 \quad (4)$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x \quad (5)$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12 \quad (6)$$

$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x \quad (7)$$

şeklinde dir.

Hermite Polinomları $w(x) = e^{-x^2}$ ağırlık fonksiyonu ile tanımlanan ağırlıklı iç çarpım altında ortogonaldır (Uzel, 2008: 41; Çoban, 2018: 56; Akacan, 2020: 18; Martínez-Finkelshtein ve diğerleri, 2025: 1-3):

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = 0, \quad m \neq n \quad (8)$$

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \quad (9)$$

Hermite polinomları, Eşitlik 9'da verilen diferansiyel denklemin çözümleridir (Polat, 2004: 30; Uzel, 2008: 8; Çoban, 2018: 55; Akacan, 2020: 18)

3.1.1. Hermite Polinomları Kullanılarak ÇKKV Yöntemine Uygulanan İşlem Adımları

Bu bölümde, ÇKKV yöntemine Hermite polinomlarının entegrasyonu açıklanmakta ve uygulanan işlem adımları detaylandırılmaktadır.

Aşama 1: Kriter Ağırlıklarının Hermite Polinomlarında Gösterimi: Bu aşamada, w_j ile ifade edilen kriter ağırlıkları, Hermite polinomları kullanılarak uygun bir biçimde temsil edilir. Böylece, ÇKKV yönteminde kriterlerin ağırlıklandırılması Hermite polinomları ile modellenmiş olur. Kriter ağırlıklandırma yönteminden elde edilen w_j kriter ağırlıkları $H_n(x)$ ile gösterilen Hermite Polinomunda yerine yazılarak $H_n(w_j)$ $j = 1, 2, 3, \dots, n$ değerleri elde edilir.

Aşama2: $H_n(w_j)$ Değerlerinin Normalleştirilmesi: Bu aşamada, $H_n(w_j)$ değerleri, Eşitlik 10'da gösterildiği şekilde normalleştirilerek standart bir ölçüğe dönüştürülür. Normalizasyon işlemi, kriter ağırlıklarının karşılaştırılabilir hale getirilmesini sağlar.

$$n_j = \frac{H_n(w_j)}{\sum_{j=1}^n H_n(w_j)} \quad (10)$$

Aşama3: Alternatif Sıralamasının Belirlenmesi: Bu aşamada, Eşitlik 11 kullanılarak hesaplanan her bir alternatifin toplam puanı belirlenir. Elde edilen puanlar, büyükten küçüğe doğru sıralanarak alternatiflerin tercih sırası oluşturulur.

$$T_i = \sum_{j=1}^n n_j x_{ij} \quad (11)$$

Eşitlik 11'deki x_{ij} karar matrisinde yer alan değerleri ifade etmektedir. Bu değerler, alternatiflerin kriterlere göre aldığı puanları temsil eder ve ÇKKV yönteminin hesaplamalarında kullanılır.

3.2. Laguerre Polinomları

Laguerre Polinomları, genellikle fizik ve mühendislikte kullanılan ortogonal polinomlardır. n bir doğal sayı olmak üzere n . dereceden $L_n(x)$ ile gösterilen Laguerre polinomlarının formülü Eşitlik 12'de gösterildiği gibi tanımlanır (Gülsu ve diğerleri, 2011: 6766-6768; Varol Bayram, 2019: 16; Akacan, 2020: 22-23):

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

Bu denklemde $n!$, n faktöriyelini, $\frac{d^n}{dx^n}$, n -inci türevi ifade eder. İlk beş dereceden Laguerre Polinomu Eşitlik 13-18'deki gibi sıralanabilir:

$$L_0(x) = 1 \quad (13)$$

$$L_1(x) = -x + 1 \quad (14)$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2) \quad (15)$$

$$L_3(x) = \frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6) \quad (16)$$

$$L_4(x) = \frac{1}{24}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24) \quad (17)$$

$$L_5(x) = \frac{1}{120}(-x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120) \quad (18)$$

Laguerre polinomları, bir ağırlık fonksiyonu e^{-x} ile $[0, \infty)$ aralığında ortogonaldır (Eşitlik 19):

$$\int_0^\infty e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n) \quad (19)$$

Laguerre polinomları, Eşitlik 20'de verilen Laguerre diferensiyel denklemini sağlar (Çoban, 2018: 44; Varol Bayram, 2019: 16; Dikmen, 2010: 4).

$$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0 \quad (20)$$

3.2.1. Laguerre Polinomları Kullanılarak ÇKKV Yöntemine Uygulanan İşlem Adımları

Laguerre polinomlarının ÇKKV yöntemlerinin alternatif sıralamalarında uygulanacak işlem adımları aşağıdaki şekilde gösterilmiştir:

Aşama 1: Kriter Ağırlıklarının Laguerre Polinomlarında Gösterimi: Bu aşamada, w_j ile ifade edilen kriter ağırlıkları, Laguerre polinomları kullanılarak uygun bir biçimde temsil edilir. Böylece, ÇKKV yönteminde kriterlerin ağırlıklandırılması Laguerre polinomları ile modellenmiş olur. Kriter ağırlıklandırma yönteminden elde edilen w_j kriter ağırlıkları $L_n(x)$ ile gösterilen Laguerre Polinomunda yerine yazılarak $L_n(w_j)$ $j = 1, 2, 3, \dots, n$ değerleri elde edilir.

Aşama2: $L_n(w_j)$ Değerlerinin Normalleştirilmesi: Bu aşamada, $L_n(w_j)$ değerleri, Eşitlik 21'de gösterildiği şekilde normalleştirilerek standart bir ölçüğe dönüştürülür. Normalizasyon işlemi, kriter ağırlıklarının karşılaştırılabilir hale getirilmesini sağlar.

$$n_j = \frac{L_n(w_j)}{\sum_{j=1}^n L_n(w_j)} \quad (21)$$

Aşama3: Alternatif Sıralamasının Belirlenmesi: Bu aşamada, Eşitlik 22 kullanılarak hesaplanan her bir alternatifin toplam puanı belirlenir. Elde edilen puanlar, büyükten küçüğe doğru sıralanarak alternatiflerin tercih sırası oluşturulur.

$$T_i = \sum_{j=1}^n n_j x_{ij} \quad (22)$$

Eşitlik 22'deki x_{ij} karar matrisinde yer alan değerleri ifade etmektedir. Bu değerler, alternatiflerin kriterlere göre aldığı puanları temsil eder ve ÇKKV yönteminin hesaplamalarında kullanılır.

4. UYGULAMA

Bu araştırmada, Polat ve Dalay (2022) tarafından kullanılan veri setinden yararlanılmıştır. Çalışmada, sıfır atık yönetmeliğinde belirlenen kriterlerin (K1, K2,...,K8) önem dereceleri Analitik Hiyerarşi Süreci (AHS) yöntemiyle belirlenmiş ve İstanbul'da tekstil ile gıda sektörlerinde faaliyet gösteren dört işletmenin sıfır atık kriterlerini uygulama düzeylerine göre değerlendirilmesi gerçekleştirilmiştir. İşletmelerin sıralanması, TOPSİS yöntemi kullanılarak yapılmıştır.

Araştırmaya dahil edilen gıda işletmeleri su ve unlu mamuller sektörlerinde, tekstil işletmeleri ise halı ve giyim eşyası üretiminde faaliyet göstermektedir. Uzman tarafından işletmelere verilen değerlendirme puanları Tablo 1'de sunulmaktadır.

Tablo 1. İşletmeleri sıfır atık yönetmeliği kriterlerine göre değerlendirilmesi

<i>İşletmeler</i>	<i>K1</i>	<i>K2</i>	<i>K3</i>	<i>K4</i>	<i>K5</i>	<i>K6</i>	<i>K7</i>	<i>K8</i>
1-Gıda	5	5	5	5	5	5	5	4
2-Tekstil	5	5	5	5	5	4	5	5
3-Gıda	4	5	5	4	3	3	4	4
4-Tekstil	5	5	5	5	5	5	5	5

İlgili çalışmada, kriterler Analitik Hiyerarşi Süreci (AHS) yöntemiyle ağırlıklandırılmıştır. Tablo 2'de gösterildiği üzere, kriter ağırlıkları: 1.kriter 0,1121; 2.kriter 0,2142; 3.kriter 0,3117; 4.kriter 0,0657; 5.kriter 0,0945; 6.kriter 0,0268; 7.kriter 0,1361 ve 8.kriter: 0,0389 şeklinde hesaplanmıştır. Bu ağırlıklar, kriterlerin sıfır atık yönetmeliği kapsamında sahip olduğu göreceli önem derecelerini ifade etmektedir.

Tablo 2. Kriterlerin AHS yöntemiyle hesaplanan ağırlık değerleri

<i>Kriter Ağırlığı</i>	<i>K1</i>	<i>K2</i>	<i>K3</i>	<i>K4</i>	<i>K5</i>	<i>K6</i>	<i>K7</i>	<i>K8</i>
w_j	0,1121	0,2142	0,3117	0,0657	0,0945	0,0268	0,1361	0,0389

İşletmelerin sıralaması, ÇKKV yöntemlerinden biri olan TOPSIS yöntemi ile gerçekleştirilmiştir. Tablo 3'te gösterildiği üzere, TOPSIS yöntemiyle yapılan değerlendirme sonucunda, sıfır atık yönetmeliğine en uygun işletme 4. sırada yer alan tekstil (giyim) işletmesi olarak belirlenmiştir. Bunu takiben, 1. sırada yer alan gıda (su) işletmesi ikinci sıraya, 2. sırada yer alan tekstil (halı) işletmesi üçüncü sıraya yerleşmiştir. En son sırada ise 3. sırada yer alan gıda (unlu mamuller) işletmesi bulunmaktadır.

Tablo 3. İşletmelerin TOPSIS yönteminde ideal çözüme göreli yakınlık değerleri

<i>İşletmeler</i>	C_i^*	<i>Sıralama</i>
1- Gıda	0,9379	2
2-Tekstil	0,9037	3
3-Gıda	0,0000	4
4-Tekstil	1,0000	1

Tablo 2'de verilen kriter ağırlıkları ve Tablo 1'de sunulan karar matrisi kullanılarak, (3), (4), (5), (6) ve (7) numaralı eşitliklerde gösterilen birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü ve beşinci dereceden Hermite polinomları, ÇKKV yöntemine uygulanmıştır. Bu uygulama sonucunda elde edilen sıralamalar, Polat ve Dalay (2022) çalışmasında kullanılan Tablo 3'te yer alan TOPSIS yöntemi ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

ÇKKV yöntemlerinin hesaplama ve uygulama aşamalarında Microsoft Excel programından yararlanılmıştır.

4.1. Birinci Dereceden Hermite Polinomunun ÇKKV Yöntemi Olarak Kullanımı

Tablo 2'de verilen kriter ağırlıkları, Eşitlik 3'te yerine konularak, Eşitlik 10 yardımıyla birinci dereceden Hermite polinomu kullanılarak n_j kriter ağırlıkları hesaplanmıştır. Elde edilen değerler Tablo 4'te sunulmaktadır.

Tablo 4. Birinci dereceden Hermite polinomundan hesaplanan ağırlık değerleri

<i>Kriterler</i>	<i>Kriter Ağırlığı (w_j)</i>	$H_1(w_j)$	n_j
K1	0,1121	0,224226	0,112113
K2	0,2142	0,42834	0,21417
K3	0,3117	0,623319	0,31166
K4	0,0657	0,131443	0,065721
K5	0,0945	0,189087	0,094544
K6	0,0268	0,053657	0,026829
K7	0,1361	0,272144	0,136072
K8	0,0389	0,077784	0,038892
Toplam	1	2	1

Tablo 1'de verilen karar matrisindeki değerler, karşılık gelen n_j kriter ağırlıkları ile çarpılarak, Eşitlik 11 kullanılarak her bir alternatifin toplam puanı hesaplanmıştır. Hesaplanan toplam puanlar Tablo 5'te sunulmaktadır.

Tablo 5. Birinci dereceden Hermite polinomu ($H_1(x)$) alternatif sıralaması

<i>İşletmeler</i>	<i>K1</i>	<i>K2</i>	<i>K3</i>	<i>K4</i>	<i>K5</i>	<i>K6</i>	<i>K7</i>	<i>K8</i>	<i>Alternatif Toplam Puanı</i>	$H_1(x)$
1- Gıda	5	5	5	5	5	5	5	5	4,961108	3
2- Tekstil	5	5	5	5	5	5	5	4	4,973171	2
3- Gıda	5	5	5	5	5	4	5	5	4,404457	4
4- Tekstil	4	5	5	4	3	3	4	4	5	1

4.2. İkinci Dereceden Hermite Polinomunun ÇKKV Yöntemi Olarak Kullanımı

Tablo 2'de verilen kriter ağırlıkları, Eşitlik 4'te yerine konularak, Eşitlik 10 yardımıyla n_j kriter ağırlıkları hesaplanmıştır. Elde edilen değerler Tablo 6'da sunulmaktadır.

Tablo 6. İkinci dereceden Hermite polinomundan hesaplanan ağırlık değerleri

Kriterler	Kriter Ağırlığı (w_j)	$H_2(w_j)$	n_j
K1	0,1121	-1,94972	0,12792
K2	0,2142	-1,81653	0,119181
K3	0,3117	-1,61147	0,105728
K4	0,0657	-1,98272	0,130085
K5	0,0945	-1,96425	0,128873
K6	0,0268	-1,99712	0,13103
K7	0,1361	-1,92594	0,12636
K8	0,0389	-1,99395	0,130822
Toplam	1	-15,2417	1

Tablo 1'de verilen karar matrisi ve Tablo 6'da hesaplanan n_j kriter ağırlıkları kullanılarak, Eşitlik 11 yardımıyla her bir alternatifin toplam puanı hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo 7'de sunulmaktadır.

Tablo 7. İkinci dereceden Hermite polinomu ($H_2(x)$) alternatif sıralaması

İşletmeler	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	K8	Alternatif Toplam Puanı	$H_2(x)$
1- Gıda	5	5	5	5	5	5	5	5	4,869178	2
2- Tekstil	5	5	5	5	5	5	5	4	4,86897	3
3- Gıda	5	5	5	5	5	4	5	5	3,965006	4
4- Tekstil	4	5	5	4	3	3	4	4	5	1

4.3. Üçüncü Dereceden Hermite Polinomunun ÇKKV Yöntemi Olarak Kullanımı

Tablo 2'de verilen kriter ağırlıkları, Eşitlik 5'te yerine yazılarak, Eşitlik 10 kullanılarak n_j kriter ağırlıkları hesaplanmıştır. Elde edilen değerler Tablo 8'de sunulmaktadır.

Tablo 8. Üçüncü dereceden Hermite polinomundan hesaplanan ağırlık değerleri

Kriterler	Kriter Ağırlığı (w_j)	$H_3(w_j)$	n_j
K1	0,1121	-1,33408	0,11463
K2	0,2142	-2,49145	0,214076
K3	0,3117	-3,49774	0,300541
K4	0,0657	-0,78639	0,06757
K5	0,0945	-1,12776	0,096902
K6	0,0268	-0,32179	0,02765
K7	0,1361	-1,61271	0,138571
K8	0,0389	-0,46623	0,040061
Toplam	1	-11,6381	1

Tablo 1'de verilen karar matrisi ve Tablo 8'de hesaplanan n_j kriter ağırlıkları kullanılarak, Eşitlik 11 yardımıyla her bir alternatifin toplam puanı hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo 9'da sunulmaktadır.

Tablo 9. Üçüncü dereceden Hermite polinomu ($H_3(x)$) alternatif sıralaması

İşletmeler	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	K8	Alternatif Toplam Puanı	$H_3(x)$
1- Gıda	5	5	5	5	5	5	5	5	4,959939	3
2-Tekstil	5	5	5	5	5	5	5	4	4,97235	2
3- Gıda	5	5	5	5	5	4	5	5	4,390065	4
4-Tekstil	4	5	5	4	3	3	4	4	5	1

4.4. Dördüncü Dereceden Hermite Polinomunun ÇKKV Yöntemi Olarak Kullanımı

Tablo 2'de verilen kriter ağırlıkları, Eşitlik 6'da yerine yazılarak, Eşitlik 10 kullanılarak n_j kriter ağırlıkları hesaplanmıştır. Elde edilen değerler Tablo 10'da sunulmaktadır.

Tablo 10. Dördüncü dereceden Hermite polinomundan hesaplanan ağırlık değerleri

Kriterler	Kriter Ağırlığı (w_j)	$H_4(w_j)$	n_j
K1	0,1121	11,3992	0,130883
K2	0,2142	9,831964	0,112888
K3	0,3117	7,488628	0,085983
K4	0,0657	11,79297	0,135404
K5	0,0945	11,57223	0,13287
K6	0,0268	11,96546	0,137385
K7	0,1361	11,11674	0,12764
K8	0,0389	11,92743	0,136948
Toplam	1	87,09463	1

Tablo 1'de verilen karar matrisi ve Tablo 10'da hesaplanan n_j kriter ağırlıkları kullanılarak, Eşitlik 11 yardımıyla her bir alternatifin toplam puanı hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo 11'da sunulmaktadır.

Tablo 11. Dördüncü dereceden Hermite polinomu ($H_4(x)$) alternatif sıralaması

İşletmeler	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	K8	Alternatif Toplam Puanı	$H_4(x)$
1- Gıda	5	5	5	5	5	5	5	5	4,863052	2
2- Tekstil	5	5	5	5	5	5	5	4	4,862615	3
3- Gıda	5	5	5	5	5	4	5	5	3,928617	4
4- Tekstil	4	5	5	4	3	3	4	4	5	1

4.5. Beşinci Dereceden Hermite Polinomunun ÇKKV Yöntemi Olarak Kullanımı

Tablo 2'de verilen kriter ağırlıkları, Eşitlik 7'de yerine yazılarak, Eşitlik 10 kullanılarak n_j kriter ağırlıkları hesaplanmıştır. Elde edilen değerler Tablo 12'de sunulmaktadır.

Tablo 12. Beşinci dereceden Hermite polinomundan hesaplanan ağırlık değerleri

Kriterler	Kriter Ağırlığı (w_j)	$H_5(w_j)$	n_j
K1	0,1121	13,22864	0,117198
K2	0,2142	24,14301	0,213894
K3	0,3117	32,64973	0,289259
K4	0,0657	7,841194	0,069469
K5	0,0945	11,21026	0,099317
K6	0,0268	3,216351	0,028495
K7	0,1361	15,92702	0,141105
K8	0,0389	4,657615	0,041264
Toplam	1	112,8738	1

Tablo 1'de verilen karar matrisi ve Tablo 12'de hesaplanan n_j kriter ağırlıkları kullanılarak, Eşitlik 11 yardımıyla her bir alternatifin toplam puanı hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo 13'de sunulmaktadır.

Tablo 13. Beşinci dereceden Hermite polinomu ($H_5(x)$) alternatif sıralaması

İşletmeler	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	K8	Alternatif Toplam Puanı	$H_5(x)$
1- Gıda	5	5	5	5	5	5	5	5	4,958736	3
2- Tekstil	5	5	5	5	5	5	5	4	4,971505	2
3- Gıda	5	5	5	5	5	4	5	5	4,375341	4
4- Tekstil	4	5	5	4	3	3	4	4	5	1

4.6. Birinci Dereceden Laguerre Polinomunun ÇKKV Yöntemi Olarak Kullanımı

Tablo 2'de verilen kriter ağırlıkları, Eşitlik 14'te yerine yazılarak, Eşitlik 21 kullanılarak birinci dereceden Laguerre polinomu yardımıyla n_j kriter ağırlıkları hesaplanmıştır. Elde edilen değerler Tablo 14'te sunulmaktadır.

Tablo 14. Birinci dereceden Laguerre polinomundan hesaplanan ağırlık değerleri

Kriterler	Kriter Ağırlığı (w_j)	$L_1(w_j)$	n_j
K1	0,1121	0,887887	0,211312
K2	0,2142	0,78583	0,187023
K3	0,3117	0,68834	0,163821
K4	0,0657	0,934279	0,222352
K5	0,0945	0,905456	0,215493
K6	0,0268	0,973171	0,231609
K7	0,1361	0,863928	0,205609
K8	0,0389	0,961108	0,228738
Toplam	1	4,201793	1

Tablo 1'de verilen karar matrisindeki değerler, karşılık gelen n_j kriter ağırlıkları ile çarpılarak Eşitlik 22 kullanılarak her bir alternatifin toplam puanı hesaplanmıştır. Elde edilen toplam puanlar Tablo 15'te sunulmaktadır.

Tablo 15. Birinci dereceden Laguerre polinomu ($L_1(x)$) alternatif sıralaması

İşletmeler	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	K8	Alternatif Toplam Puanı	$L_1(x)$
1-Gıda	5	5	5	5	5	5	5	5	8,101041	2
2-Tekstil	5	5	5	5	5	5	5	4	8,09817	3
3-Gıda	5	5	5	5	5	4	5	5	6,567564	4
4-Tekstil	4	5	5	4	3	3	4	4	8,329778	1

4.7. İkinci Dereceden Laguerre Polinomunun ÇKKV Yöntemi Olarak Kullanımı

Tablo 2'de verilen kriter ağırlıkları, Eşitlik 15'te yerine yazılarak, Eşitlik 21 kullanılarak n_j kriter ağırlıkları hesaplanmıştır. Elde edilen değerler Tablo 16'da sunulmaktadır.

Tablo 16. İkinci dereceden Laguerre polinomundan hesaplanan ağırlık değerleri

Kriterler	Kriter Ağırlığı (w_j)	$L_2(w_j)$	n_j
K1	0,1121	0,782059	0,224214
K2	0,2142	0,594595	0,170469
K3	0,3117	0,425246	0,121917
K4	0,0657	0,870717	0,249632
K5	0,0945	0,815382	0,233768
K6	0,0268	0,946703	0,271417
K7	0,1361	0,737114	0,211329
K8	0,0389	0,922973	0,264614
Toplam	1	3,487999	1

Tablo 1'de verilen karar matrisi ve Tablo 16'te hesaplanan n_j kriter ağırlıkları kullanılarak, Eşitlik 22 yardımıyla her bir alternatifin toplam puanı hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo 17'de sunulmaktadır.

Tablo 17. İkinci dereceden Laguerre polinomu ($L_2(x)$) alternatif sıralaması

İşletmeler	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	K8	Alternatif Toplam Puanı	$L_2(x)$
1- Gıda	5	5	5	5	5	5	5	5	8,472183	2
2- Tekstil	5	5	5	5	5	5	5	4	8,46538	3
3- Gıda	5	5	5	5	5	4	5	5	6,776638	4
4- Tekstil	4	5	5	4	3	3	4	4	8,736797	1

4.8. Üçüncü Dereceden Laguerre Polinomunun ÇKKV Yöntemi Olarak Kullanımı

Tablo 2'de verilen kriter ağırlıkları, Eşitlik 16'da yerine yazılarak, Eşitlik 21 kullanılarak n_j kriter ağırlıkları hesaplanmıştır. Elde edilen değerler Tablo 18'de sunulmaktadır.

Tablo 18. Üçüncü dereceden Laguerre polinomundan hesaplanan ağırlık değerleri

Kriterler	Kriter Ağırlığı (w_j)	$L_3(w_j)$	n_j
K1	0,1121	0,682281	0,129298
K2	0,2142	0,424656	0,080476
K3	0,3117	0,205673	0,038977
K4	0,0657	0,809267	0,153363
K5	0,0945	0,729636	0,138272
K6	0,0268	0,92059	0,174459
K7	0,1361	0,619137	0,117331
K8	0,0389	0,885583	0,167825
Toplam	1	5,276825	1

Tablo 1’de verilen karar matrisi ve Tablo 18’de hesaplanan n_j kriter ağırlıkları kullanılarak, Eşitlik 22 yardımıyla her bir alternatifin toplam puanı hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo 19’da sunulmaktadır.

Tablo 19. Üçüncü dereceden Laguerre polinomu ($L_3(x)$) alternatif sıralaması

İşletmeler	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	K8	Alternatif Toplam Puanı	$L_3(x)$
1- Gıda	5	5	5	5	5	5	5	5	4,832175	2
2- Tekstil	5	5	5	5	5	5	5	4	4,825541	3
3- Gıda	5	5	5	5	5	4	5	5	3,806721	4
4- Tekstil	4	5	5	4	3	3	4	4	5	1

4.9. Dördüncü Dereceden Laguerre Polinomunun ÇKKV Yöntemi Olarak Kullanımı

Tablo 2’de verilen kriter ağırlıkları, Eşitlik 17’de yerine yazılarak, Eşitlik 21 kullanılarak n_j kriter ağırlıkları hesaplanmıştır. Elde edilen değerler Tablo 20’de sunulmaktadır.

Tablo 20. Dördüncü dereceden Laguerre polinomundan hesaplanan ağırlık değerleri

Kriterler	Kriter Ağırlığı (w_j)	$L_4(w_j)$	n_j
K1	0,1121	0,588324	0,129613
K2	0,2142	0,274465	0,060467
K3	0,3117	0,024968	0,005501
K4	0,0657	0,749884	0,165206
K5	0,0945	0,648081	0,142778
K6	0,0268	0,894832	0,19714
K7	0,1361	0,509593	0,112268
K8	0,0389	0,848931	0,187027
Toplam	1	4,539078	1

Tablo 1’de verilen karar matrisi ve Tablo 20’de hesaplanan n_j kriter ağırlıkları kullanılarak, Eşitlik 22 yardımıyla her bir alternatifin toplam puanı hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo 21’de sunulmaktadır.

Tablo 21. Dördüncü dereceden Laguerre polinomu ($L_4(x)$) alternatif sıralaması

İşletmeler	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	K8	Alternatif Toplam Puanı	$L_4(x)$
1-Gıda	5	5	5	5	5	5	5	5	4,812973	2
2- Tekstil	5	5	5	5	5	5	5	4	4,80286	3
3- Gıda	5	5	5	5	5	4	5	5	3,72605	4
4- Tekstil	4	5	5	4	3	3	4	4	5	1

4.10. Beşinci Dereceden Laguerre Polinomunun ÇKKV Yöntemi Olarak Kullanımı

Tablo 2’de verilen kriter ağırlıkları, Eşitlik 18’de yerine yazılarak, Eşitlik 21 kullanılarak n_j kriter ağırlıkları hesaplanmıştır. Elde edilen değerler Tablo 22’de sunulmaktadır.

Tablo 22. Beşinci dereceden Laguerre polinomundan hesaplanan ağırlık değerleri

Kriterler	Kriter Ağırlığı (w_j)	$L_5(w_j)$	n_j
K1	0,1121	0,499966	0,129024
K2	0,2142	0,142556	0,036789
K3	0,3117	-0,12115	-0,03127
K4	0,0657	0,69252	0,178715
K5	0,0945	0,570583	0,147247
K6	0,0268	0,869423	0,224368
K7	0,1361	0,40809	0,105314
K8	0,0389	0,813006	0,209808
Toplam	1	3,874992	1

Tablo 1’de verilen karar matrisi ve Tablo 22’de hesaplanan n_j kriter ağırlıkları kullanılarak, Eşitlik 22 yardımıyla her bir alternatifin toplam puanı hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo 23’te sunulmaktadır.

Tablo 23. Beşinci dereceden Laguerre polinomu ($L_5(x)$) alternatif sıralaması

İşletmeler	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	K8	Alternatif Toplam Puanı	$L_5(x)$
1- Gıda	5	5	5	5	5	5	5	5	4,790192	2
2- Tekstil	5	5	5	5	5	5	5	4	4,775632	3
3- Gıda	5	5	5	5	5	4	5	5	3,633908	4
4- Tekstil	4	5	5	4	3	3	4	4	5	1

4.11. Hermite ve Laguerre Polinomları ile TOPSIS Yöntemi Alternatif Sıralamalarının Karşılaştırılması

Hermite polinomları ile elde edilen alternatif sıralamalar arasındaki karşılaştırmalar ve her bir polinomun TOPSIS yöntemiyle elde edilen alternatif sıralamalarıyla karşılaştırılması, Tablo 24’te sunulmuştur. Bu tablo, farklı dereceden Hermite polinomları ile yapılan sıralamaların tutarlılığını ve TOPSIS yöntemi ile olan benzerlik düzeyini analiz etmek amacıyla hazırlanmıştır.

Tablo 24. Hermite polinomları alternatif sıralamaları ile TOPSIS yöntemi sıralamaları

İşletmeler	$H_1(x)$	$H_2(x)$	$H_3(x)$	$H_4(x)$	$H_5(x)$	TOPSIS
1- Gıda	3	2	3	2	3	2
2- Tekstil	2	3	2	3	2	3
3- Gıda	4	4	4	4	4	4
4- Tekstil	1	1	1	1	1	1

Tablo 24 incelendiğinde, Hermite polinomları alternatif sıralamaları arasında şu benzerlikler gözlemlenmiştir: Birinci, üçüncü ve beşinci dereceden Hermite polinomları, aynı alternatif sıralama sonuçlarını vermiştir. İkinci ve dördüncü dereceden Hermite polinomları ise kendi aralarında aynı alternatif sıralamalarını üretmiştir. Ayrıca ikinci ve dördüncü Hermite Polinomları ile TOPSIS yönteminin aynı alternatif sıralamaları olduğu belirlenmiştir.

Laguerre polinomları alternatif sıralamaları ile TOPSIS yöntemiyle elde edilen alternatif sıralamalarının karşılaştırılması, Tablo 25’te sunulmuştur. Bu tablo, farklı dereceden Hermite polinomları ile yapılan sıralamaların tutarlılığını ve TOPSIS yöntemi ile olan benzerlik düzeyini analiz etmek amacıyla hazırlanmıştır.

Tablo 25. Laguerre polinomları alternatif sıralamaları ile TOPSIS yöntemi sıralamaları

İşletmeler	$L_1(x)$	$L_2(x)$	$L_3(x)$	$L_4(x)$	$L_5(x)$	TOPSIS
1- Gıda	2	2	2	2	2	2
2- Tekstil	3	3	3	3	3	3
3- Gıda	4	4	4	4	4	4
4- Tekstil	1	1	1	1	1	1

Tablo 25 incelendiğinde, Laguerre polinomları alternatif sıralamalarının ve TOPSIS yöntemiyle elde edilen alternatif sıralamalarının aynı olduğu belirlenmiştir.

5. SONUÇ

Bu çalışma, Hermite Polinomlarının Çok Kriterli Karar Verme (H-ÇKKV) ve Laguerre polinomlarının Çok Kriterli Karar Verme (L-ÇKKV) entegrasyonunun karar doğruluğu ve stabilitesi üzerindeki etkisini incelemiştir. Geleneksel ÇKKV yöntemlerinde doğrusal ağırlıklandırma ve sabit normalizasyon fonksiyonları kullanılırken, önerilen polinom tabanlı yöntemler doğrusal olmayan ilişkileri göz önünde bulundurarak karar alma sürecinin hassasiyetini artırmaktadır.

Elde edilen bulgular, Hermite ve Laguerre polinomlarının karar matrisinde aşırı değerlerin etkisini azaltmada ve kriter ağırlıklarını daha esnek bir şekilde belirlemede etkili olduğunu göstermiştir. Özellikle Hermite polinomları, veri normalizasyonunda daha dengeli bir dönüşüm sağlarken, Laguerre polinomları kriter ağırlıklandırma sürecinde daha hassas bir çerçeve sunmaktadır. Yapılan uygulamalar, bu polinom tabanlı yöntemlerin geleneksel ÇKKV teknikleri ile elde edilen sıralamalarla tutarlılık gösterdiğini ve alternatiflerin değerlendirilmesinde güvenilir bir yaklaşım sunduğunu ortaya koymuştur.

Hermite ve Laguerre polinomlarının farklı endüstriyel ve akademik alanlarda uygulanabilirliğini artırmak için geniş çaplı veri setleriyle çalışmalar yapılmalıdır. Öncelikle, önerilen H-ÇKKV ve L-ÇKKV yaklaşımları belirli bir veri seti ve sınırlı sayıda kriter üzerinden test edilmiştir. Kullanılan veri setinin boyutu ve yapısı, elde edilen sonuçların genellenebilirliğini kısmen sınırlamaktadır. Ayrıca, polinom derecelerinin seçimi çalışmada belirli varsayımlar altında gerçekleştirilmiş olup, farklı derece seçimlerinin karar sonuçları üzerindeki etkileri ayrıntılı bir duyarlılık analizi kapsamında ele alınmamıştır. Çalışmada yalnızca klasik TOPSIS yöntemi ile karşılaştırma yapılmış, diğer ÇKKV yöntemleriyle (VIKOR, PROMETHEE, ELECTRE vb.) kapsamlı karşılaştırmalar gerçekleştirilmemiştir. Bu durum, önerilen yaklaşımın farklı karar verme paradigmalardaki performansının değerlendirilmesini sınırlamaktadır.

Gelecek çalışmalarda, Hermite ve Laguerre polinomlarına dayalı ÇKKV yaklaşımlarının daha büyük ve farklı yapıya sahip veri setleri üzerinde test edilmesi, yöntemin genellenebilirliğini artıracaktır. Ayrıca, polinom derecelerinin karar sonuçları üzerindeki etkisini inceleyen kapsamlı duyarlılık ve sağlamlık analizlerinin yapılması önemli bir araştırma alanı sunmaktadır. Önerilen polinom tabanlı normalizasyon ve ağırlıklandırma yaklaşımlarının bulanık, sezgisel bulanık ve olasılıklı ÇKKV yöntemleri ile entegrasyonu, belirsizlik içeren karar problemlerinde yöntemin etkinliğini artırabilir. Bunun yanı sıra, yapay zekâ, makine öğrenmesi ve meta-sezgisel optimizasyon algoritmaları ile polinom tabanlı ÇKKV yöntemlerinin birleştirilmesi, adaptif ve veri odaklı karar destek sistemlerinin geliştirilmesine katkı sağlayabilir. Farklı mühendislik, sürdürülebilirlik ve endüstriyel karar problemlerinde yapılacak uygulamalar, önerilen yaklaşımın pratikteki başarısını daha kapsamlı biçimde ortaya koyacaktır.

Sonuç olarak bu çalışma, ÇKKV alanında yeni bir bakış açısı sunarak, H-ÇKKV ve L-ÇKKV yöntemlerinin karar verme süreçlerinin daha esnek ve doğrusal olmayan yapılar üzerinde modellenebileceğini göstermiştir.

Bilgilendirme /Acknowledgements

Bu çalışmada kullanılan verilerin önceki bir kitap bölümünde üretilmesine katkı sunan ve verilerin yeniden analiz edilmesine izin veren Mustafa Dalay'a teşekkür ederim.

I would like to thank Mustafa Dalay for contributing to the production of the data used in this study in a previous book chapter and for allowing the data to be re-analyzed.

Çatışma Beyanı /Conflict of Interest

Yazar tarafından herhangi bir potansiyel çıkar çatışması beyan edilmemiştir.

No potential conflict of interest was declared by the author.

Fon Desteği / Funding

Bu çalışmada herhangi bir resmi, ticari ya da kâr amacı gütmeyen organizasyondan fon desteği alınmamıştır.

Any specific grant has not been received from funding agencies in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

Etik Standartlara Uygunluk / Compliance with Ethical Standards

Yazar tarafından, çalışmada kullanılan araç ve yöntemlerin Etik Kurul izni gerektirmediği beyan edilmiştir. *It was declared by the author that the tools and methods used in the study do not require the permission of the Ethics Committee.*

Etik Beyanı / Ethical Statement

Yazar tarafından bu çalışmada bilimsel ve etik ilkelere uyulduğu ve yararlanılan tüm çalışmaların kaynakçada belirtildiği beyan edilmiştir.

It was declared by the author that scientific and ethical principles have been followed in this study and all the sources used have been properly cited.



Yazarlar, Verimlilik Dergisi'nde yayımlanan çalışmalarının telif hakkına sahiptirler ve çalışmaları CC BY-NC 4.0 lisansı altında yayımlanmaktadır.
The authors own the copyright of their works published in Journal of Productivity and their works are published under the CC BY-NC 4.0 license.

KAYNAKÇA

- Akacan, E. (2020). "Important Relations of Classical Orthogonal Polynomials", Yüksek Lisans Tezi, Eastern Mediterranean University Institute of Graduate Studies and Research, Kıbrıs.
- Belton, V. ve Stewart, T. (2012). "Multiple Criteria Decision Analysis: An Integrated Approach", Springer Science & Business Media.
- Cesarano, C., Ramírez, W. ve Khan, S. (2022). "A New Class of Degenerate Apostol-Type Hermite Polynomials and Applications", *Dolomites Research Notes on Approximation*, 15, 1-10.
- Chen, S., Billings, S.A. ve Grant, P.M. (1990). "Non-Linear System Identification Using Neural Networks", *International Journal of Control*, 51(6), 1191-1214.
- Çekiç, Y. (2004). "Durağan Olmayan İşaretler İçin Zaman-Frekans Analizi", Doktora Tezi, İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Çoban, C. (2018). "Hermite ve Laguerre Genişlemeleri İçin Poisson İntegrallerinin Yakınsama Hızı ve Voronovskaya Teoremi", Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kırıkkale.
- Dikmen, O. (2010). "Laguerre ve q-Laguerre Polinomları", Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Düşünceli, F. ve Çelik, E. (2017). "Numerical Solution for High-Order Linear Complex Differential Equations by Hermite Polynomials", *Iğdır University Journal of the Institute of Science and Technology*, 7, 189-201.
- Erdem, İ. (2013). "Yöneylem Araştırması ve WinQSB Uygulamaları", Seçkin Yayıncılık, Ankara.
- Gautschi, W. (2004). "Orthogonal Polynomials: Computation and Approximation". OUP Oxford.
- Griffiths, D.J. ve Schroeter, D. (2005). "Instructor's Solutions Manual: Introduction to Quantum Mechanics". Pearson Education.
- Gülsu, M., Gürbüz, B., Öztürk, Y. ve Sezer, M. (2011). "Laguerre Polynomial Approach for Solving Linear Delay Difference Equations", *Applied Mathematics and Computation*, 217(15), 6765-6776.
- Hillier, F.S. ve Lieberman, G.J. (2015). "Introduction to Operations Research". McGrawhill, New York.
- Hwang, C.L. ve Yoon, K. (1981). "Methods for Multiple Attribute Decision Making", *Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications a State-of-the-Art Survey*, 58-191.
- Kahraman, C. (2008). "Fuzzy Multi-Criteria Decision Making: Theory and Applications with Recent Developments", Vol. 16, Springer Science & Business Media.
- Karapinar, U. (2017). "Uyarlamalı Araç Takip Sistemlerinde Model Öngörülü Kontrol Yöntemleri: Karşılaştırmalı Bir Çalışma", Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi / Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Kılar, N. (2023). "On Computational Formulas for Parametric Type Polynomials and Its Applications", *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 25(1), 13-30. <https://doi.org/10.25092/baunfbed.1083754>
- Laudadio, T., Mastronardi, N., Marcellán Español, F.J., Van Buggenhout, N. ve Van Dooren, P. (2025). "On Computing the Zeros of Laguerre–Sobolev Polynomials", *Numerical Algorithms*, 1-20. <https://doi.org/10.1007/s11075-025-02021-z>
- Li, H., Duan, H.B. ve Zhang, X.Y. (2010). "A Novel Image Template Matching Based on Particle Filtering Optimization", *Pattern Recognition Letters*, 31(13), 1825-1832. <https://doi.org/10.1016/j.patrec.2009.12.003>
- Martínez-Finkelshtein, A., Morales, R. ve Perales, D. (2025). "Zeros of Generalized Hypergeometric Polynomials via Finite Free Convolution: Applications to Multiple Orthogonality", *Constructive Approximation*, 1-70. <https://doi.org/10.1007/s00365-025-09703-w>
- Mojaver, M., Hasanzadeh, R., Azdast, T. ve Park, C.B. (2022). "Comparative Study on Air Gasification of Plastic Waste and Conventional Biomass Based on Coupling of AHP/TOPSIS Multi-Criteria Decision Analysis", *Chemosphere*, 286, 131867. <https://doi.org/10.1016/j.chemosphere.2021.131867>
- Polat, Y. ve Dalay, M. (2022). "Sıfır Atık Projesini Uygulayan İşletmelerin AHS ve TOPSIS Yöntemleri Kullanılarak Değerlendirilmesi", Gece Kitaplığı, Ankara.
- Polat, Z.S. (2004). "Studies on the Generalized and Reverse Generalized Bessel Polynomials", Yüksek Lisans Tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Rao, R.V. (2007). "Decision Making in the Manufacturing Environment: Using Graph Theory and Fuzzy Multiple Attribute Decision Making Methods", 2, 294, Springer, Londra.
- Saaty, T. L. (2008). "Decision Making with the Analytic Hierarchy Process", *International Journal of Services Sciences*, 1(1), 83-98.
- Szeg, G. (1939). "Orthogonal Polynomials", American Mathematical Society.

- Teague, M.R. (1980). "Image Analysis via the General Theory of Moments", *Journal of the Optical Society of America*, 70(8), 920-930.
- Tekin, M. (2008). "Sayısal Yöntemler (Bilgisayar Çözümlü Alıştırmalar)", Altıncı Baskı, Selçuk Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, Konya.
- Timor, M. (2010). "Yöneylem Araştırması". Türkmen Kitabevi, İstanbul.
- Triantaphyllou, E. ve Triantaphyllou, E. (2000). "Multi-Criteria Decision Making Methods", 5-21, Springer US.
- Uzel, E. (2008). "Hermite Polinomları", Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya.
- Varol Bayram, D. (2019). "Lineer Kesirli İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Laguerre Polinomları ile Sayısal Çözümleri", Doktora Tezi, Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Denizli.
- Voiculescu, D.V. (1997). "Free Probability Theory", American Mathematical Society.
- Wang, X. ve Jiang, Y.L. (2019). "An Efficient Hybrid Reduction Method for Time-Delay Systems Using Hermite Expansions", *International Journal of Control*, 92(5), 1033-1043. <https://doi.org/10.1080/00207179.2017.1380846>
- Zahaf, M.B. ve Mesk, M. (2025). "On Rainville-Type Generating Functions for Hermite Polynomials", *Integral Transforms and Special Functions*, 6(10), 883–902. <https://doi.org/10.1080/10652469.2025.2463089>
- Zavadskas, E.K., Vilutienė, T., Turskis, Z. ve Šaparauskas, J. (2014). "Multi-Criteria Analysis of Projects' Performance in Construction", *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 14, 114-121. <https://doi.org/10.1016/j.acme.2013.07.006>
- Zeleny, M. (2012). "Multiple Criteria Decision Making Kyoto 1975", Springer Science & Business Media.