

Yakından Uzağa, Saymadan Fonksiyona: Ortaokul Öğrencilerinin Genelleme Stratejilerinin Evrimi

Ceylan Güler^{1*} 
Elif Canlı² 

¹Yozgat Bozok Üniversitesi,
Eğitim Fakültesi Matematik
Eğitimi ABD
ceylan.guler@yobu.edu.tr
^{*}Corresponding Author

²İsmail Dursun Anadolu Lisesi
91124921003@ogr.bozok.edu.tr

Geliş tarihi: 26.03.2025
Kabul tarihi: 29.05.2025
Yayın tarihi: 30.04.2026

Özet: Bu çalışmada, ortaokul öğrencilerinin lineer örüntü görevlerini modellerken kullandıkları genelleme stratejilerinin sınıf düzeyleri bağlamında derinlemesine incelenmesi amaçlanmıştır. Nitel araştırma yaklaşımlarından durum çalışması deseniyle yürütülen araştırma, iki aşamalı olarak tasarlanmıştır. Çalışmanın veri toplama süreci, 5, 6, 7 ve 8. sınıf kademelerinde öğrenim gören toplam 30 öğrenciye uygulanan çalışma kâğıtları ve bu katılımcılar arasında farklı matematik başarı düzeylerine göre amaca uygun olarak seçilen 11 öğrenciyle gerçekleştirilen yarı yapılandırılmış bireysel görüşmelerden oluşmaktadır. Elde edilen veriler, alanyazında Lannin (2005) tarafından kavramsallaştırılan genelleme stratejileri teorik çerçevesi merkeze alınarak betimsel analiz yaklaşımıyla çözümlenmiştir. Araştırma bulguları; 5. ve 6. sınıf öğrencilerinin örüntüleri modellerken ağırlıklı olarak sayma, çizme, yinelemeli ilişki ve içeriksel stratejilere başvurduklarını, buna karşın 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin bilişsel bir olgunlaşma göstererek içeriksel ve doğrusal genelleme stratejilerine yoğunlaştıklarını ortaya koymaktadır. Özellikle üst sınıf kademelerindeki öğrencilerin, örüntülerdeki fonksiyonel ilişkileri keşfetmeye ve formal kurallar oluşturmaya yönelik çok daha sistematik yaklaşımlar geliştirdikleri tespit edilmiştir. Ulaşılan bu sonuçlar, öğrencilerin erken dönemden itibaren cebirsel düşünme becerilerinin sağlıklı bir biçimde gelişebilmesi için örüntü temelli öğretim süreçlerinin her sınıf düzeyinin bilişsel ihtiyacına uygun, farklılaşan ve zenginleştirilmiş pedagojik stratejilerle desteklenmesi gerektiğini göstermektedir.

Anahtar Kelime: Cebirsel Düşünme, Lineer Örüntüler, Genelleme Stratejileri, Ortaokul Öğrencileri.

GİRİŞ

Matematik; bilgiyi düzenleme, analiz etme, yorumlama, üretme, tahminlerde bulunma ve problem çözme süreçlerini kapsayan, semboller ve şekiller üzerine inşa edilmiş evrensel bir dildir (Millî Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018). Bu evrensel dilin temel yapıtaşlarından birini ise cebir oluşturmaktadır (Otte vd., 2015). Alanyazında cebir kavramı, araştırmacılar tarafından farklı perspektiflerle ele alınmıştır. Örneğin Usiskin (1988) cebiri ilişkileri anlama ve analiz etme aracı olarak değerlendirirken; Mason (2008), onu kültürel bir ürün ve bilgi bütünü olarak tanımlamaktadır. Sürekli gelişim gösteren bu kültürel yapı, cebiri matematiğin dinamik bir alt disiplini hâline getirmektedir (Şen & Güler, 2022). Bireylerin günlük yaşamda karşılaştıkları ilişkileri ve problem durumlarını anlamlandırmalarında, bu durumlara yönelik akıl yürütmelerinde ve düşüncelerini ifade etmelerinde cebir kritik bir rol oynamaktadır. Bu doğrultuda cebir öğretimi, matematik öğretim programlarında öğrencilerin edinmesi gereken temel becerilerin merkezinde yer almaktadır (Park, 2021). Nitekim bu vurgu, 2024-2025 eğitim-öğretim yılından itibaren uygulanmaya başlanan ve “Türkiye Yüzyılı Maarif Modeli” kapsamında yeniden yapılandırılan Matematik Öğretim Programı’nda da güçlü bir şekilde korunmuştur. Yeni programda; öğrencilerin örüntü, cebirsel ifade, denklem, eşitlik ve ilişkilendirme gibi temel kavramları kullanarak matematiksel akıl yürütme ve genelleme becerilerini geliştirmeleri öncelikli hedefler arasında konumlandırılmıştır (MEB, 2024).

Ulusal (MEB, 2018) ve uluslararası (ör. Common Core State Standards Initiative [CCSSI], 2010; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000) düzeydeki matematik öğretim programları incelendiğinde, 5-8. sınıf kademelerinde cebir öğrenme alanına yönelik kapsamlı kazanımlara yer verildiği görülmektedir. Bu kazanımlar; sayı örüntülerinde istenilen terimi bulma, cebirsel ifadeleri anlamlandırma, eşitlik ve denklem kavramlarını tanıma, birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri ve ilgili problemleri çözme, özdeşlikler, doğrusal (lineer) denklemler, eşitsizlikler ve iki değişken arasındaki doğrusal ilişkilerin incelenmesi gibi çok çeşitli başlıkları içermektedir (MEB, 2018). Ancak, ortaokul matematik programında bu denli geniş bir yer tutmasına rağmen cebir, öğrenciler tarafından çoğunlukla soyut ve anlaşılması güç bir alan olarak algılanmaktadır (Greenes vd., 2001; Lee & Freiman, 2004).

Öğrencilerin bu zorlukları aşabilmeleri, cebiri sadece okul matematiğinde yer alan sembolik bir konu ve kazanım yığını olarak değil, spesifik bir düşünme biçimi olarak kavramalarına bağlıdır (Gowers vd., 2008). Alanyazında "cebirsal düşünme" olarak adlandırılan bu kavram ile cebir, birbiriyle ayrılmaz biçimde iç içe geçmiştir. Bu noktada Radford'un (2006) öne sürdüğü "Cebirsal düşünmeyi cebirden ayıran özellikler nelerdir?" sorusu önem kazanmaktadır. Driscoll (1999) cebirsal düşünmeyi, "niceliksel durumlarla değişkenler arasındaki ilişkiyi açık bir biçimde ifade edebilme kapasitesi" şeklinde tanımlar. Denklem, fonksiyon ve örüntü gibi kapsamlı cebirsal nesnelere barındırması nedeniyle sınırlarını kesin olarak çizmenin zor olduğu bu kavram (Radford, 2014); en temelinde cebirsal nesnelere matematiksel olarak yansıtmanın özel bir biçimi olarak kabul edilmektedir. Ortaokul düzeyinde bu nesnelere merkeze alınarak tasarlanan öğretim süreçleri, öğrencilerin cebirsal düşünme becerilerinin gelişimine doğrudan katkı sağlamaktadır (Van de Walle vd., 2010). Bu bağlamda Blanton ve diğerleri (2011), matematiksel yapı ve ilişkilerin inşasında cebirsal düşünmenin gelişimini sağlayan "genelleme" ve "gerekçeleştirme" süreçlerinin merkezi rolüne dikkat çekmektedir.

Bu teorik çerçeveden hareketle mevcut çalışmada, ortaokul öğrencilerinin lineer örüntüleri modellerken başvurdukları genelleme stratejilerinin derinlemesine incelenmesi amaçlanmıştır. Araştırma kapsamında, öğrencilerin farklı sınıf düzeylerinde, yakın adım ve uzak adım lineer örüntü görevlerine yaklaşımları analiz edilerek strateji kullanımlarındaki farklılıkların detaylı bir şekilde ortaya konması hedeflenmektedir.

Kuramsal Çerçeve

Bu bölümde, çalışmanın kuramsal dayanaklarını oluşturan genelleme, genelleme stratejileri ve lineer örüntüler kavramları ele alınmaktadır.

Cebirsal Düşünmede Genelleme

Hawthorne (2016) genellemeyi doğuştan gelen bir insan eğilimi olarak tanımlamakla birlikte, bu eylemin matematiksel yollarla gerçekleştirilmesinin özel önemine dikkat çekmektedir. Matematiksel ve bilimsel kültürün sürdürülebilirliği, büyük ölçüde bireylerin genelleme yapabilme becerisine bağlıdır (Otte vd., 2015). Bu bağlamda genelleme, cebirsal düşünmenin en temel yapı taşlarından biri olarak kabul edilmektedir (Lee & Karmiloff-Smith, 1996; Sfard, 1995). Kaput (2008) da cebirsal düşünme süreçlerinde, daha formal ve sembolik genellemeler yapabilme ile farklı temsiller geliştirebilme becerisinin kritik rolünü vurgulamaktadır.

Genellenmenin bu merkezi konumuna rağmen, matematik öğretiminde öğrencilere sunulan etkinliklerin genellikle işlem odaklı olduğu ve derinlemesine matematiksel anlam oluşturma fırsatlarının sınırlı kaldığı görülmektedir. Örneğin, oran-orantı konusundaki "5 kg elmanın toplam maliyeti 70 TL ise, 1 kilosu kaç TL'dir?" gibi rutin sorular, öğrencilerden yalnızca aritmetik işlemleri doğru algoritmalarla uygulamalarını beklemektedir. Oysa bu tür problem durumları, değişkenler ve nicelikler arasındaki ilişkilere dair genelleme yapma fırsatları sunacak potansiyele sahiptir (Lannin, 2005). Bu nedenle, matematik öğretiminde öğrencilerin değişen nicelikleri ve bu nicelikler arasındaki fonksiyonel ilişkileri fark etmeleri, genellemeler yapmaları ve bu yolla cebirsal düşünme süreçlerinin desteklenmesi büyük önem taşımaktadır.

Cebirsal düşünmenin salt cebir konularına indirgenmesi veya genellenmenin yalnızca bir kurala ulaşma süreci olarak algılanması, öğrencilerin hem cebirsal düşünme hem de genelleme becerilerinin gelişimini sekteye uğratmaktadır (Rittle-Johnson & Alibali, 1999). Dolayısıyla, cebirsal nesnelere içeren zengin matematiksel bağlamlar sunularak, öğrencilerin farklı stratejileri işe koymak suretiyle genellemeye ulaşmaları ve cebirsal düşünme becerilerini geliştirmeleri hedeflenmelidir (Radford, 2006). Bu doğrultuda, öğrencilerin genelleme yapma süreçlerini destekleyen en güçlü öğretim araçlarından biri örüntülerdir (NCTM, 2000).

Örüntüler ve Genelleme Stratejileri

Örüntüler; sayıların, seslerin, şekillerin, nesnelere ya da olayların belirli bir kural ve düzen içinde sıralanmasıyla oluşan yapılardır (Şen & Güler, 2022). Bu yapılar genel olarak iki ana grupta sınıflandırılır: Belirli bir tekrar biriminin ardışık olarak yinlendiği yapılara tekrarlı örüntüler denirken, adımlar arasında düzenli bir artış ya da azalış sergileyen yapılara genişleyen örüntüler adı verilmektedir (Olkun & Toluk-Uçar, 2004). Genişleyen örüntüler hem sayı hem de şekil formatında tasarlanabilir ve yapısal olarak lineer (doğrusal) ya da kuadratik (ikinci dereceden) özellikler gösterebilirler. Lineer örüntüler genellikle $y=mx+n$ biçimindeki doğrusal fonksiyonlarla tanımlanırken, kuadratik örüntüler $y=mx^2+n$ gibi ikinci dereceden fonksiyonlara

dayanmaktadır. Ortaokul matematik öğretim programında özellikle doğrusal denklemler ve lineer örüntülere ağırlık verilmektedir. Bu nedenle, mevcut çalışmada da öğrencilerin bilişsel gelişim düzeyleri ve programın hedefleriyle uyumlu olarak lineer sayı ve şekil örüntülerine odaklanılmıştır (MEB, 2018).

Lineer örüntüler, öğrencilerin genelleme yapma becerilerini çok yönlü olarak geliştirmelerine olanak tanıyan etkili araçlardır. Bu bağlamda Stacey (1989), öğrencilerin örüntüler üzerinde ulaştıkları genellemeleri yakın adım ve uzak adım olmak üzere iki boyutta tanımlamaktadır. Yakın adım genellemesi, örüntüyü bir veya birkaç adım daha ilerletmeye yönelik stratejileri içerirken; uzak adım genellemesi, örüntüye ilişkin genel ve kapsayıcı bir kural belirlemeyi ifade eder. Stacey, öğrencilerin bu genellemeleri yaparken yinelemeli strateji, bütüne genişletme ve doğrusal strateji olmak üzere üç temel yol izlediklerini ortaya koymuştur. Yinelemeli strateji, öğrencilerin bir önceki adımdan hareketle bir sonraki terimi bulma eğilimidir. Bütüne genişletme stratejisinde ise örüntüdeki sabit artış miktarı doğrudan istenen adımla orantısal olarak ilişkilendirilerek genellemeye ulaşılır. Doğrusal strateji, öğrencilerin örüntü kuralını fonksiyonel bir yaklaşımla, değişkenler yardımıyla ifade etmelerini kapsar.

Bu temel sınıflamanın yanı sıra Lannin (2005), genelleme stratejilerini belirgin ve belirgin olmayan stratejiler şeklinde iki ana grupta kavramsallaştırmıştır. Sayma ve yinelemeli stratejiler belirgin olmayan grupta yer alırken; bütüne genişletme, tahmin ve kontrol, içeriksel ve doğrusal stratejiler belirgin stratejiler olarak tanımlanmıştır. Sayma stratejisinde öğrenciler, örüntüdeki nesne veya terim sayısını tek tek sayarak ardışık sonuca ulaşırlar. Yinelemeli stratejide, adımlar arasındaki değişmez artış miktarı dikkate alınarak her yeni terim bir öncekinin üzerine eklenir. Bütüne genişletme stratejisi, adımlar arasındaki farkın örüntünün temel kuralı olarak varsayıp bu farkın doğrudan istenen adım sayısı ile ilişkilendirilmesidir; örneğin 2-4-6-8-... şeklindeki bir örüntüde artış miktarının 2 olarak belirlenmesi ve bu farkın 100. adım için doğrudan kullanılması gibi. Tahmin ve kontrol stratejisi, öğrencilerin örüntü kuralına dair sezgisel öngörülerde bulunarak bu öngörülerin doğruluğunu farklı adımlarda test etmeleri sürecidir. İçeriksel stratejide örüntü kuralı cebirsel değişkenler yerine aritmetik işlemlerle ve çoğunlukla sözel olarak ifade edilir; bir öğrencinin örüntü kuralını “ikiyle çarp, sonra bir ekle” biçiminde tanımlaması buna örnektir. Son olarak doğrusal strateji, elde edilen kuralların matematiksel semboller ve değişkenler kullanılarak fonksiyonel bir dille, örneğin $2n+1$ şeklinde ifade edilmesidir.

YÖNTEM

Bu çalışmada, ortaokul öğrencilerinin lineer örüntüleri modellerken kullandıkları genelleme stratejilerini derinlemesine incelemek amacıyla nitel araştırma yaklaşımlarından durum çalışması deseni benimsenmiştir. Durum çalışması, belirli bir durumu veya olguyu kendi doğal bağlamı içinde, sınırları kesin hatlarla belirgin olmayan bağlamlarda ayrıntılı ve kapsamlı biçimde irdelemeye olanak sağlayan bir araştırma yöntemidir. Araştırma kapsamında, farklı sınıf kademelerindeki öğrencilerin yakın adım ve uzak adım örüntü görevlerine yaklaşımlarının ve kullandıkları stratejilerin karşılaştırmalı olarak incelenmesi hedeflendiğinden, araştırmanın temel tasarımı olarak bütüncül çoklu durum deseni tercih edilmiştir. Bu desen, birden fazla durumun bir bütün içerisinde derinlemesine ele alınmasına ve durumlar arası karşılaştırmalı analizler yapılmasına imkân tanımaktadır (Yin, 2003).

Katılımcılar

Araştırmanın çalışma grubunu, bir devlet ortaokulunun 5, 6, 7 ve 8. sınıflarında öğrenim görmekte olan öğrenciler oluşturmaktadır. Araştırma süreci, problemin farklı boyutlarıyla ve derinlemesine incelenmesini mümkün kılmak amacıyla iki aşamalı olarak kurgulanmıştır. İlk aşamada, farklı sınıf düzeylerini temsil eden toplam 30 öğrenciye lineer örüntü görevlerinden oluşan yazılı veri toplama araçları uygulanmıştır. İkinci aşamada ise bu öğrenciler arasından belirlenen ve matematik başarı düzeyleri açısından farklılık gösteren 11 öğrenciyle bireysel görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Nitel araştırmalarda, incelenen olgunun detaylı biçimde anlaşılabilmesi ve farklı boyutlarının yansıtılabilmesi için, durumu temsil eden örneklerin amaca hizmet edecek şekilde bilinçli olarak seçilmesi büyük önem taşımaktadır (Stake, 2005). Bu teorik gerekçeden hareketle çalışmada amaçlı örnekleme yöntemine başvurulmuştur. Sürecin birinci aşamasında katılımcıların farklı bilişsel ve öğretim kademelerini temsil edebilmeleri için sınıf düzeyindeki farklılıklar dikkate alınırken; ikinci aşamada ise genelleme stratejilerindeki olası farklılıkları zengin bir biçimde ortaya koyabilmek adına matematik başarı düzeylerindeki çeşitliliğin sağlanması temel ölçüt olarak gözetilmiştir.

Tablo 1*Birinci Aşamadaki Katılımcı Özellikleri*

Sınıf düzeyi	Cinsiyet		Toplam
	Kadın	Erkek	
5	2	6	8
6	3	3	6
7	5	4	9
8	4	3	7
Toplam	14	16	30

Araştırmanın birinci aşamasında yer alan toplam 30 katılımcının sınıf düzeylerine göre dağılımı Tablo 1’de sunulmuştur. İlgili veriler incelendiğinde; çalışma grubunda 5. sınıfta öğrenim gören sekiz, 6. sınıfta altı, 7. sınıfta dokuz ve 8. sınıfta yedi öğrencinin yer aldığı görülmektedir. Birinci aşamadaki bu katılımcı havuzu içerisinden, farklı matematik başarı düzeylerini temsil edecek biçimde amaçlı olarak seçilen ve araştırmanın ikinci aşamasındaki bireysel görüşmelere dâhil edilen 11 öğrenciye ilişkin detaylı bilgiler ise Tablo 2’de verilmiştir.

Tablo 2*İkinci Aşamadaki Katılımcı Özellikleri*

Sınıf Düzeyi	Katılımcı	Cinsiyet	Matematik Başarı Düzeyi
5	Ö1	Erkek	İyi
	Ö2	Erkek	Orta
6	Ö3	Erkek	Orta
	Ö4	Kadın	Orta
	Ö5	Erkek	İyi
7	Ö6	Erkek	İyi
	Ö7	Kadın	Orta
	Ö8	Kadın	İyi
8	Ö9	Erkek	İyi
	Ö10	Erkek	İyi
	Ö11	Kadın	Orta

İlgili tablo, ikinci aşama çalışma grubunun farklı sınıf kademelerinde öğrenim gören ve kendi kademesi içerisinde çeşitli matematik başarı düzeylerine sahip öğrencilerden oluşturulduğunu göstermektedir. Verilerin analizi ve bulguların sunumu sürecinde, bu öğrencilerle gerçekleştirilen bireysel görüşmelerden elde edilen yanıtlara yönelik doğrudan alıntılara yer verilmiştir. Araştırma etiği ve katılımcı gizliliğinin korunması ilkesi gereğince öğrencilerin gerçek kimlik bilgileri saklı tutulmuş; bunun yerine her bir katılımcı S1, S2, ..., S11 biçiminde kodlanarak isimlendirilmiştir.

Veri Toplama Araçları

Araştırma kapsamında veri toplama süreci iki aşamalı olarak yürütülmüştür. İlk aşamada, öğrencilerin lineer örüntüleri modellerken başvurdukları genelleme stratejilerini belirlemek amacıyla araştırmacılar tarafından geliştirilen çalışma kâğıdı (Ek-1) kullanılmıştır. Söz konusu veri toplama aracı, yakın ve uzak adım örüntü sorularını içeren toplam dört görevden (iki sayı ve iki şekil örüntüsü) oluşmaktadır. Hazırlanan görevlerin içerik ve kapsam geçerliği iki matematik eğitimi uzmanının görüşlerine sunulmuş, alınan dönütler doğrultusunda gerekli revizyonlar yapılarak araca son şekli verilmiştir.

İkinci aşamada ise nicel araçlarla elde edilen bulguları derinleştirmek ve öğrenci yanıtlarının arkasında yatan bilişsel süreçleri anlamlandırmak üzere yarı yapılandırılmış bireysel görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Bu görüşmeler, öğrencilerin çalışma kâğıtlarındaki çözüm adımlarına dair düşünme biçimlerini daha ayrıntılı ortaya koymak amacıyla tasarlanmıştır. Görüşme süresince katılımcılara örüntüdeki belirli bir adımı nasıl buldukları, tercih ettikleri stratejiyi neden kullandıkları ve alternatif olarak hangi çözüm yollarını izleyebilecekleri gibi derinleştirici sorular yöneltilmiştir. Veri kaybını önlemek ve analiz sürecinin

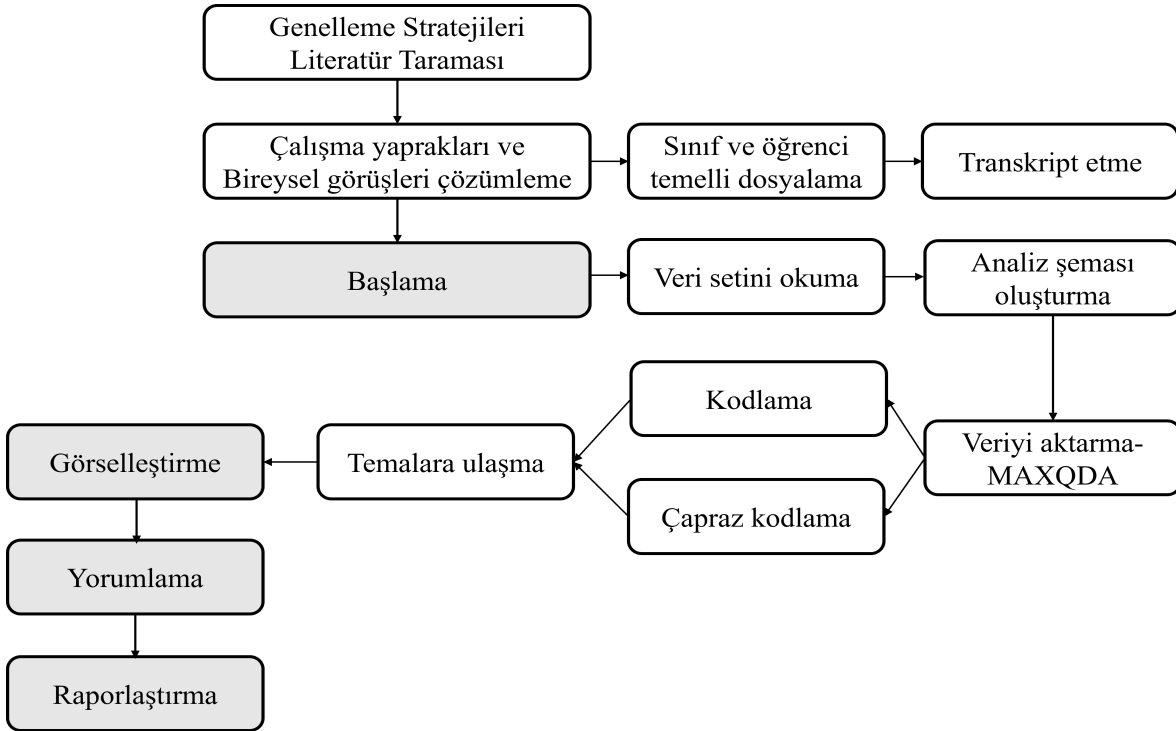
güvenirliğini sağlamak amacıyla yaklaşık 40 dakika süren bu görüşmeler, katılımcıların onayı alınarak ses kayıt cihazı ile kayıt altına alınmıştır.

Veri Analizi

Çalışmada, çalışma kâğıtları ve bireysel görüşmeler aracılığıyla toplanan verilerin çözümlenmesinde betimsel analiz yaklaşımı benimsenmiştir. Merriam (1998), alanyazında yer alan ve önceden belirlenmiş tematik çerçeveler doğrultusunda yürütülen analiz süreçlerini betimsel analiz olarak tanımlamaktadır. Araştırmanın genel veri analiz şeması Şekil 1’de sunulmuştur.


Şekil 1

Çalışmanın Veri Analiz Şeması



Bu teorik yapı doğrultusunda, öncelikle lineer örüntülerdeki genelleme stratejilerine ilişkin kapsamlı bir literatür taraması gerçekleştirilmiş ve Lannin (2005) tarafından kavramsallaştırılan genelleme stratejileri, temel veri analiz çerçevesi olarak belirlenmiştir. Toplanan veriler; ilk aşamada araştırmanın genel amacı ve sınıf düzeyleri merkeze alınarak, ikinci aşamada ise sınıf ve öğrenci temelli olacak şekilde tasnif edilip dosyalanmıştır. Dosyalanan çalışma kâğıtları ve bireysel görüşme ses kayıtları yazılı metne dönüştürülerek transkript edilmiş; elde edilen dökümler baştan sona okunarak genel bir aşinalık sağlandıktan sonra analiz edilmek üzere MAXQDA nitel veri analizi yazılımına aktarılmıştır. Veriler, program aracılığıyla önceden belirlenmiş olan genelleme stratejileri çerçevesinde kodlanmıştır. Kodlama sürecinin güvenilirliğini sağlamak amacıyla, araştırmacının analizlerine paralel olarak matematik eğitimi alanında uzman bir akademisyen tarafından bağımsız çapraz kodlamalar gerçekleştirilmiştir. Öğrencilerin yanıtlarından elde edilen örnek kodlamalar Tablo 3’te detaylandırılmıştır. Kodlama işleminin tamamlanmasının ardından elde edilen bulgular doğrultusunda nihai temalara ulaşılmıştır. Belirlenen temalar, MAXQDA programının sunduğu görsel araçlar yardımıyla haritalandırılarak yorumlamaya ve raporlaştırmaya hazır hâle getirilmiştir. Hazırlanan bu görsel yapılar, doğrudan öğrenci alıntlarıyla zenginleştirilerek araştırmanın bulgular bölümünde sunulmuştur.

Tablo 3*Örnek Kodlamalar*

Tema	Kod	Örnek Kodlama
Genelleme Stratejileri	Modelleme	Ö1: 
	Sayma	Ö7: 3. gün 26, 4. gün 35, 5. gün 44, 6. gün 53, 7.gün 62 TL olur.
	Yinelemeli	Ö1: 9 artı, 9 artı, 9 artı diye gidebilirim.
	Bütüne genişletme	Ö5: 5'er 5'er arttığı için $\times 5$ yaptım.
	Tahmin Kontrol	Ö9: $0 \times 5 = 0$, $0 + 3 = 3$ cm. $1 \times 5 = 5$, $5 + 3 = 8$ cm. $2 \times 5 = 10$, $10 + 3 = 13$ oluyor.
	Doğrusal	Ö10: $9x - 1$, x gün sayısı
	İçeriksel	Ö11: $7 \times 5 = 35$, $35 + 3 = 38$ olur.

Araştırmanın Etik İzinleri

Araştırmanın veri toplama sürecine başlanmadan önce, çalışmanın etik ilkelere uygunluğunun değerlendirilmesi amacıyla Yozgat Bozok Üniversitesi Sosyal ve Beşeri Bilimler Etik Kurulu'na resmi başvuru yapılmıştır. İlgili kurulun 20.09.2023 tarihli, 161824 evrak kayıt ve 06/25 numaralı kararı ile araştırmanın etik kurallara tam uygunluk taşıdığı değerlendirilmiş ve gerekli uygulama izinleri alınmıştır.

BULGULAR

Çalışmanın bu bölümünde; ortaokul öğrencilerinin lineer örüntülere dayalı yakın ve uzak adım görevlerinde kullandıkları genelleme stratejileri, sınıf düzeyleri bağlamında ayrı başlıklar altında ele alınarak detaylı biçimde raporlaştırılmıştır.

Beşinci Sınıf Düzeyindeki Öğrencilerin Genelleme Stratejilerine İlişkin Bulgular

Beşinci sınıf öğrencilerinin lineer örüntülerdeki yakın ve uzak adım görevlerinde kullandıkları genelleme stratejileri Şekil 2'de sunulmuştur.

Şekil 2

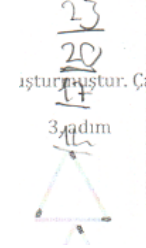
Beşinci Sınıf Öğrencilerinin Lineer Örüntülerdeki Yakın Adım ve Uzak Adım Görevlerinde Kullandıkları Genelleme Stratejileri



Şekil 2 incelendiğinde, 5. sınıf öğrencilerinin yakın adım görevlerinde örüntü kuralını genellerken sırasıyla yinelemeli ilişki ($n=15$), bütüne genişletme ($n=8$), sayma ($n=7$) ve çizme ($n=4$) stratejilerini kullandıkları görülmektedir. Bu öğrencilerin uzak adım görevlerinde örüntü kuralını bulma süreçlerinde ise yinelemeli ilişki ($n=9$), bütüne genişletme ($n=8$), sayma ($n=1$), tahmin-kontrol ($n=1$) ve içeriksel ($n=1$) genelleme stratejilerine başvurdukları anlaşılmaktadır. Bu bulgular, 5. sınıf öğrencilerinin yakın ve uzak adım

Tablo 5 (Devam)

Ö2: Teker teker yazdım sonra üç ekledim. Üçgende üç tane kibrit çöpü olduğu için 3'er 3'er arttırarak 7. adımı buldum. Her seferinde 3'er 3'er arttığı için 100. adımı; $100 \times 3 = 300$ bulurum. Ama fazla geldi ikiye bölerim.



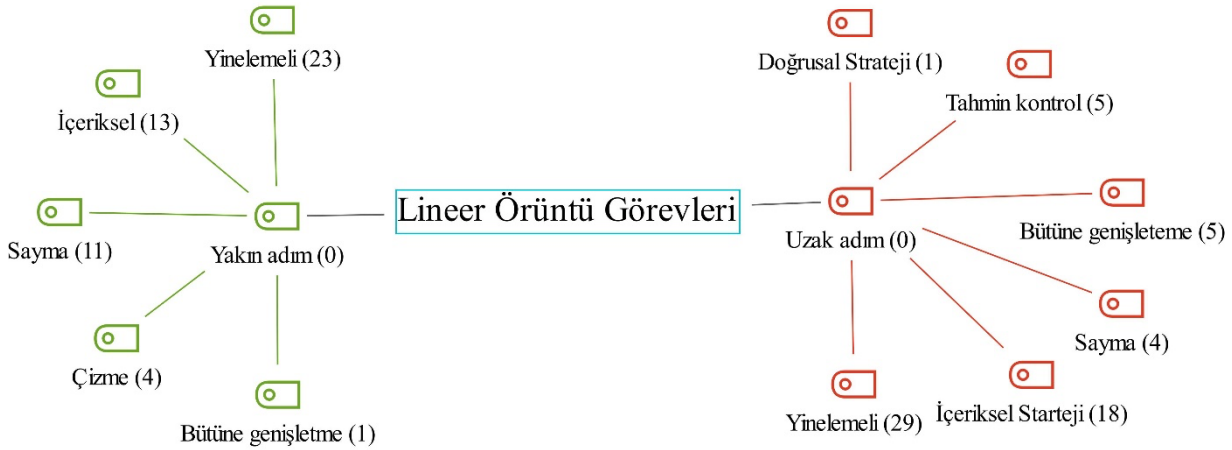
Tablo 5 incelendiğinde, yakın adım görevinde Ö1'in adımlardaki kibrit çöpü sayılarını belirleyerek şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne dönüştürdüğü, ardından belirlediği tekrar birimini (+3) 7. adıma taşıyarak "bütüne genişletme" stratejisini işe koştugu görülmektedir. Ö2'nin ise 3. adımdaki kibrit çöpü sayısını ritmik biçimde artırarak 7. adıma ulaştığı ve "sayma" stratejisini kullandığı anlaşılmaktadır. Uzak adım görevinde ise Ö1, 7. adımdan 100. adıma kadar olan aralık sayısını (93) bularak bunu artış miktarıyla çarpmış; böylece formal bir kural olmaksızın probleme özgü aritmetik adımlarla "içeriksel" genelleme stratejisini kullanmıştır. Ö2 ise tekrar birimini doğrudan 100. adıma genişleterek ($100 \times 3 = 300$) "bütüne genişletme" stratejisini kullanmış, ancak hatalı bir varsayım ile sonuca ulaşmaya çalışmıştır.

Altıncı Sınıf Düzeyindeki Öğrencilerin Genelleme Stratejilerine İlişkin Bulgular

Altıncı sınıf düzeyindeki öğrencilerin örüntü görevlerinde kullandıkları genelleme stratejileri Şekil 3'te sunulmuştur.

Şekil 3

Altıncı Sınıf Düzeyindeki Öğrencilerin Linear Örüntülerdeki Yakın Adım ve Uzak Adım Görevlerinde Kullandıkları Genelleme Stratejileri



Şekil 3 verileri doğrultusunda, 6. sınıf öğrencilerinin yakın adım görevlerinde en sık "yinelemeli ilişki" ($n=23$) stratejisine başvurdukları; bunu sırasıyla içeriksel ($n=13$), sayma ($n=11$), çizme ($n=4$) ve bütüne genişletme ($n=1$) stratejilerinin izlediği görülmektedir. Uzak adım çalışmalarında ise öğrencilerin yinelemeli ilişki ($n=29$), içeriksel ($n=18$), bütüne genişletme ($n=5$), tahmin-kontrol ($n=5$), sayma ($n=4$) ve doğrusal ($n=1$) stratejileri kullandıkları tespit edilmiştir. Bu bağlamda, 6. sınıf öğrencilerinin uzak adım görevlerinde yakın adımdan farklı olarak "tahmin-kontrol" ve "doğrusal" stratejileri repertuarlarına kattıkları, buna karşın "çizme" stratejisini terk ettikleri anlaşılmaktadır.

Öğrencilere sunulan lineer örüntü görevlerinde yer alan fidan sorusuna ilişkin Ö5'in yakın adım ve uzak adım örnek çalışması aşağıda sunulmuş bu bağlamda değerlendirilmiştir.

Şekil 4

a) Yakın Adım-Sayma Genelme Stratejisi, b) Uzak Adım-İçeriksel Genelme Stratejisi

3. hafta = 18
 4. hafta = 28
 5. hafta = 28
 6. hafta = 28
 7. hafta = 38
 8. hafta = 38
 9. hafta = 48
 10. hafta = 58



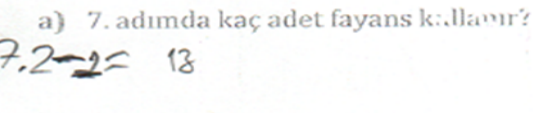
$100 \cdot 5 + 3 = 503$
 Çünkü 40 dak. 53 fidanı mesela $10 \times 5 = 50$ olduğuna göre
 100 ar. ol. yani $100 \times 5 + 3$ yaparsak cevap öğle ediyor.

Veri toplama araçlarında yer alan "fidan uzama" problemine ilişkin öğrenci yaklaşımları bu durumu somutlaştırmaktadır. Araştırma katılımcılarından Ö5, söz konusu problemin yakın adım (7. hafta) çözümünde "Başlangıçta 3 cm, 1. hafta 8 cm, 2. hafta 13 cm olmuş. 5'er 5'er arttığı için 13'ün üstüne 5 ekleyerek devam ettim, 7. haftayı 38 cm buldum" diyerek artış miktarını ardışık biçimde eklemiş ve "sayma" stratejisini kullanmıştır. Aynı öğrenci uzak adımı (100. hafta) hesaplarken ise bu stratejiyi bırakmış; "Çarparak daha kolay olur... 5'er 5'er arttığı için $100 \times 5 = 500$, başlangıçta 3 cm olduğu için $500 + 3 = 503$ cm olur" açıklamasıyla, cebirsel bir sembol kullanmadan aritmetik işlemlere dayalı "içeriksel" genelleme stratejisini sergilemiştir. Öte yandan aynı fidan problemi için Ö3, her iki adımda da içeriksel stratejiyi benimsemiştir. Ö3 yakın adım için, "7. haftadan 2. haftayı çıkarttım 5 hafta kaldı. $5 \times 5 = 25$ cm uzar. 2. hafta boy uzunluğu 13 cm olduğu için $25 + 13 = 38$ cm olur" derken; uzak adım için de "100. haftadan 7. haftayı çıkarttım 93 hafta oldu. $93 \times 5 = 465$ artış olur. $465 + 38 = 503$ cm buldum" şeklinde akıl yürütmüştür. Ö3'ün formal bir örüntü kuralı inşa edememesine rağmen problemi kendi iç bağlamı ve aritmetik ilişkiler üzerinden hatasız çözebilmesi, içeriksel stratejinin etkili kullanımına önemli bir örnektir.

Altıncı sınıftaki öğrencilerin farklı görevlerdeki strateji esneklikleri, "duvar süsleme" görevi bağlamında da incelenmiş; Ö3, Ö4 ve Ö5'in yakın adım çözümleri Tablo 6' da, uzak adım çözümleri ise Tablo 7'de detaylandırılmıştır.

Tablo 6

Ö3, Ö4 ve Ö5'in Duvar Süsleme Yakın Adım Görevine İlişkin Çözüm ve Açıklamaları

Açıklama	Çözüm
Ö3: Her bir adımda 2 fayans artıyor. Ben burada fayansları 2'şer arttırarak çizdim. Sonra teker teker saydım, cevabı 15 buldum. Ama yanlış saymışım. 4. adımda 7 olmalıydı ben 8 tane çizmişim. Doğru cevap 13 olmalı.	
Ö4: 7. adımda 13 olur. Her bir adımda fayans sayısı 2'şer 2'şer artıyor. 3. adımda 5 fayans kullanılmış o zaman 4. adım 7, 5. adım 9, 6. adım 11, 7. adım 13 fayans olur.	
Ö5: Üstüne 2 eklemiş. 4. adım 7, 5. adım 9, 6. adım 11, 7. adımda 13 olur. 2'şer arttığı için $7 \times 2 = 14$ fayans olur dedim. Sonra 1. adımdaki fayans sayısını çıkarttım. 13 buldum.	

Yakın adımı bulma görevinde Ö3'ün modelleme yaparak nesnelere tek tek saydığı ve "çizme" stratejisini işe koştuğu; Ö4'ün ise tekrar birimini (+2) belirledikten sonra ardışık eklemelerle ilerleyerek "sayma" stratejisini kullandığı görülmektedir. Ö5 ise başlangıçta yinelemeli bir yaklaşım izlese de ulaştığı tekrar birimini istenen adımla çarparak ($7 \times 2 = 14$) ve başlangıç değerini düzenleyerek cebirsel sembol kullanmaksızın "içeriksel" stratejiyi tercih etmiştir. Bu öğrencilerin uzak adım yaklaşımları Tablo 7'de ele alınmıştır.

Tablo 7*Ö3 ve Ö5'in Duvar Süsleme Uzak Adım Görevine İlişkin Çözüm ve Açıklamaları*

Açıklama	Çözüm
Ö3: 7. adımdan 14. adıma gittim. 7. adımda 15 fayans vardı 14. adımda 30 oluyor. Sonra 21. adıma gittim 60 oluyor. Bu şekilde 49. adıma kadar gittim. 49. adım 180 fayans oldu. 50. adım ise $180+2=182$ oluyor. 100. adım için 50'nin 2 katını alırım. 364 olur. Sanırım yanlış oldu. Şöyle yapsam her bir adımda 2 fayans artıyorsa ve 100. adım isteniyorsa $100-3=97$, $97 \times 2=194$ artış olması gerekir. 3. adımda 5 fayans vardı o zaman $194+5=199$ oluyor. Şimdi doğru oldu. Bunu çizerek de bulabiliriz ama fazla zaman alır.	
Ö5: Kaçınıcı adımı sorarsa hep 'adım sayısı $\times 2$ ' ve sonucun bir eksiği olur. Burada da 100. adımı sormuş. $100 \times 2=200-1=199$ olur.	

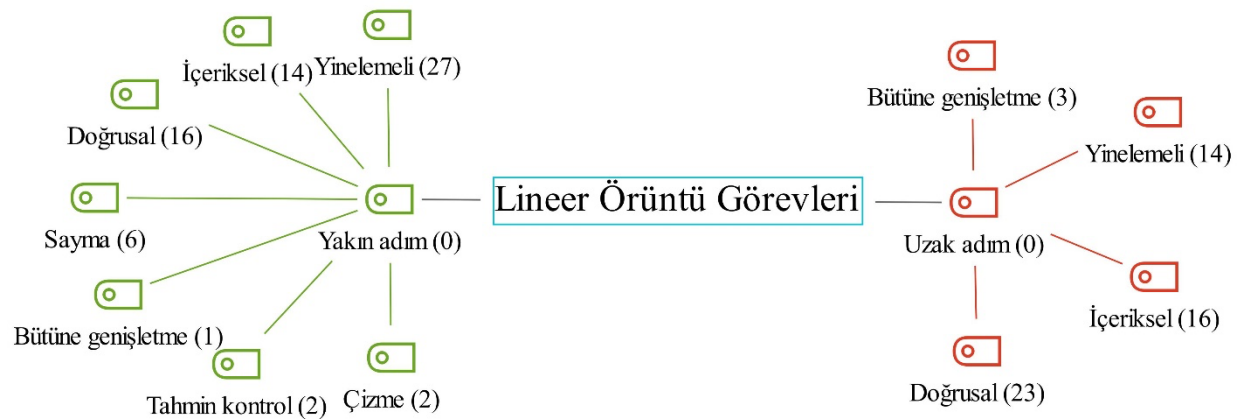
Uzak adım görevinde Ö3, yakın adımdaki referans noktalarından yola çıkarak "bütüne genişletme" stratejisini uygulamıştır. Çalışmada yer alan Ö4 ise (tabloda yer almamakla birlikte görüşmelerde); "7. adımı sayarak 14 bulmuştum. 7×2 yaparsam da 14 oluyor. Ama 13 olmuş yani 1 eksiltmiş... 100. adım için de $100 \times 2 = 200$, $200-1=199$ " diyerek girdi-çıkı değerleri arasındaki örüntüyü "tahmin-kontrol" stratejisiyle çözümlenmiştir. Ö5 ise durumu tamamen fonksiyonel bir bağlama taşıyarak $2n-1$ biçiminde sözel bir denklem ("adım sayısı $\times 2 - 1$) formüle etmiş ve doğrudan "doğrusal" genelleme stratejisini kullanmıştır.

Yedinci Sınıf Düzeyindeki Öğrencilerin Genelleme Stratejilerine İlişkin Bulgular

Yedinci sınıf öğrencilerinin yakın ve uzak adım görevlerinde kullandıkları genelleme stratejileri Şekil 5'te şematize edilmiştir.

Şekil 5

Yedinci Sınıf Düzeyindeki Öğrencilerin Lineer Örüntülerdeki Yakın Adım ve Uzak Adım Görevlerinde Kullandıkları Genelleme Stratejileri



Şekil 5 incelendiğinde, 7. sınıf öğrencilerinin yakın adım problemlerinde en sık "yinelemeli ilişki" ($n=27$) stratejisini kullandıkları; bunu sırasıyla doğrusal ($n=16$), içeriksel ($n=14$), sayma ($n=6$), çizme ($n=2$), tahmin-kontrol ($n=2$) ve bütüne genişletme ($n=1$) stratejilerinin takip ettiği görülmektedir. Uzak adımda ise yapısal bir değişim gözlenmiş ve "doğrusal" genelleme stratejisi ($n=23$) en çok tercih edilen yöntem olmuştur. Bunu içeriksel ($n=16$), yinelemeli ilişki ($n=14$) ve bütüne genişletme ($n=3$) stratejileri izlemiştir. Öğrencilerin sayma, çizme ve tahmin-kontrol stratejilerini yalnızca yakın adım görevlerinde kullanıp uzak adımlarda tamamen terk etmeleri, sayısal değerler büyüdükçe daha formel ve kurala dayalı düşünme ihtiyacı hissettiklerinin önemli bir göstergesidir.

Öğrencilere yöneltilen "para biriktirme" (sayı örüntüsü) görevinde de bu zihinsel geçiş net bir şekilde izlenebilmektedir. Ö6, Ö7 ve Ö8'in bu göreve ait yakın adım açıklamaları Tablo 8'de sunulmuştur.

Tablo 8**Ö6 ve Ö8'in Para Biriktirme Yakın Adım Görevine İlişkin Çözüm ve Açıklamaları**

Açıklama	Çözüm																											
Ö6: 7. gün kumbaraya attığı para miktarını sormuş. Birinci gün 8₺ atmış. İkinci gün 17₺ atmış. Bu şekilde devam etmiş. $(n-1)$ formülünden yapacağız. 7 ile 9'u çarpıp bir eksiltirim 62₺ olur. Kurala şöyle ulaştım; 1. gün 8'den 9'u çıkardım -1 buldum. 9'u da her gün 9'ar arttığı için yazdım.	$(n-9)-1$ $n = \text{hangi gün oldu}$																											
Ö8: 1. gün kumbarasına 8₺, 2. gün 17₺ atmış. Yani her gün para miktarı 9₺ artmış. İlk terime ulaşmak için şuraya -1 yazdım $(n-1)$ kuralını gösteriyor). Buraya 7 yazarım (n ifadesini gösteriyor) çünkü 7. günü sormuş. $9 \times 7 = 63$ olur. $63 - 1 = 62$ olur.	$n = 9 - 1$ 62 TL																											
Günler Kural Kumbaraya atılan para miktarı (TL)	<table border="1"> <tr> <td>1.gün</td> <td>2.gün</td> <td>3.gün</td> <td>7.gün</td> <td>30.gün</td> </tr> <tr> <td>$7n+3$</td> <td>$2n+12$</td> <td>$3n+21$</td> <td>$7n+57$</td> <td>$3n+1$</td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>17</td> <td>26</td> <td>62</td> <td></td> </tr> </table> <table border="1"> <tr> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> </tr> <tr> <td>14</td> <td>25</td> <td>35</td> <td>44</td> <td>53</td> <td>62</td> </tr> </table>	1.gün	2.gün	3.gün	7.gün	30.gün	$7n+3$	$2n+12$	$3n+21$	$7n+57$	$3n+1$	8	17	26	62		2	3	4	5	6	7	14	25	35	44	53	62
1.gün	2.gün	3.gün	7.gün	30.gün																								
$7n+3$	$2n+12$	$3n+21$	$7n+57$	$3n+1$																								
8	17	26	62																									
2	3	4	5	6	7																							
14	25	35	44	53	62																							
Ö7: Ben de ilk önce kural oluşturmaya çalıştım. 8'den ne çıkarırsak 3 bulabilirim diye düşündüm. Ama hepsi aynı olacaktı. Kuralı bulamadım. Sonra sayarak yaptım. 1. gün 8, 2. gün 17, 3. gün 26, 4. gün 35, 5. gün 44, 6. gün 53, 7.gün 62 oldu.																												

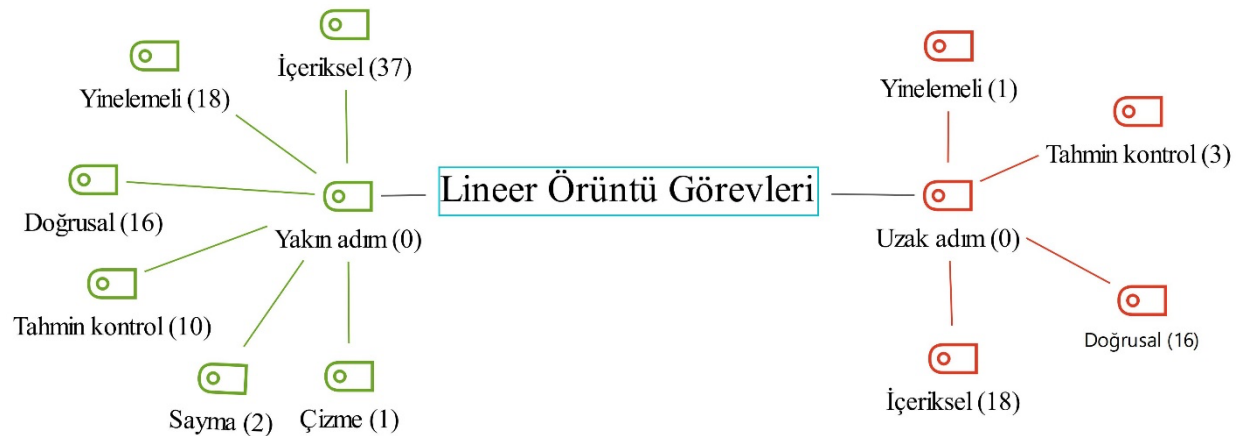
Tablo 8 değerlendirildiğinde, Ö6 ve Ö8'in artış miktarını (+9) saptadıktan sonra birinci terime göre sabiti belirleyip $9n-1$ fonksiyonel kuralını ürettikleri ve böylece "doğrusal" genelleme stratejisini başarıyla uyguladıkları saptanmıştır. Buna karşın Ö7, formel kural bulma girişiminde başarısız olunca vazgeçmiş ve terimleri ritmik biçimde ileri taşıyarak "sayma" stratejisine dönmüştür. Aynı problemin uzak adım (100. gün) sürecinde ise Ö6 ve Ö8 oluşturdukları $9n-1$ kuralını başarıyla işleterek ($30 \times 9 = 270$, $270 - 1 = 269$ TL) doğrusal stratejiyi sürdürmüşlerdir. Yakın adımda "sayma" stratejisini kullanan Ö7 ise uzak adımda saymanın zorluğunu fark edip strateji değiştirmiş; "kumbaraya atılan para her gün 9'ar 9'ar artmış. O zaman 30 ile 9'u çarparım" diyerek "bütüne genişletme" stratejisini denemiştir. Ancak artma miktarını baştaki sabitle ilişkilendirmediği için hatalı bir sonuca varmıştır.

Sekizinci Sınıf Düzeyindeki Öğrencilerin Genelleme Stratejilerine İlişkin Bulgular

Sekizinci sınıf düzeyindeki öğrencilerin lineer örüntülerdeki görevlere yaklaşımları Şekil 6'da özetlenmiştir.

Şekil 6

Sekizinci Sınıf Düzeyindeki Öğrencilerin Lineer Örüntülerdeki Yakın Adım ve Uzak Adım Görevlerinde Kullandıkları Genelleme Stratejileri



Şekil 6 incelendiğinde, 8. sınıf öğrencilerinin yakın adım görevlerinde en sık "içeriksel" ($n=37$) stratejiyi tercih ettikleri; bunu yinelemeli ($n=18$), doğrusal ($n=16$), tahmin-kontrol ($n=10$), sayma ($n=2$) ve çizme ($n=1$) stratejilerinin izlediği tespit edilmiştir. Uzak adım görevlerinde ise yelpazenin daraldığı ve öğrencilerin daha üst düzey stratejiler olan içeriksel ($n=18$) ile doğrusal ($n=16$) stratejilere yoğunlaştıkları; bunun dışında çok sınırlı düzeyde tahmin-kontrol ($n=3$) ve yinelemeli ($n=1$) stratejilerin kullanıldığı saptanmıştır. Özellikle

sayma ve çizme stratejilerinin uzak adımda tamamen bırakılması, bilişsel gelişimin bir yansıması olarak değerlendirilebilir.

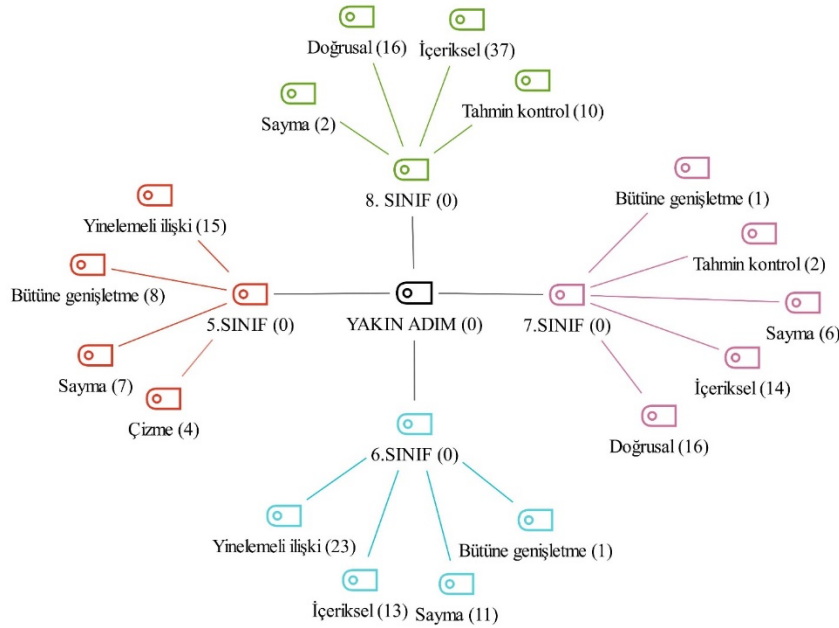
Bu sınıf düzeyinde "çam ağacı" (şekil örüntüsü) görevine verilen yanıtlar, stratejilerin nasıl işletildiğine dair iyi birer örnektir. Yakın adım için Ö9, deneme-yanılma yoluyla bir fonksiyon oluşturmaya çalışmış; "1. adımda 5 tane, 2. adımda 8 tane... $3x+5$ olur. $3x1 = 3$, $3+5=8$ olmadı... O zaman $3x+2$ olur... $7 \times 3 = 21$ ve $21+2=22$ (işlem hatası)" ifadeleriyle "tahmin-kontrol" stratejisini sergilemiştir. Aynı görev için Ö10 ise artış miktarından yola çıkarak doğrudan cebirsel ilişkiyi kurmuş; "Kibrit çöpleri 3'er 3'er artmış. 1. adım için $3x1 = 3$ olur ama 1. adımda 5 tane var. O halde $+2$ derim. Örüntünün kuralı $3x+2$ olmalı" diyerek "doğrusal" stratejiyi başarılı biçimde kullanmıştır. Uzak adım görevinde (100. adım) ise Ö9, "100 adımda 100 tane üçgen ve 2 tane de fazlalık olacak. $100 \times 3 = 300$, $300+2=302$ " açıklamasıyla formel bir harfli ifade kullanmadan bağlamın içindeki özellikleri kullanarak "içeriksel" strateji sergilemiştir. Ö10 ise elde ettiği formülü doğrudan işleterek ($3 \times 100 = 300$, $300+2=302$) doğrusal genelleme stratejisindeki istikrarını korumuştur.

Yakın Adım ve Uzak Adım Genelleme Stratejilerinin Sınıf Düzeylerine Göre Karşılaştırılması

Araştırmaya katılan ortaokul öğrencilerinin genelleme görevlerindeki strateji tercihleri, tüm kademeler bağlamında karşılaştırmalı olarak ele alınmış ve yakın adıma ilişkin bulgular Şekil 7'de sunulmuştur.

Şekil 7.

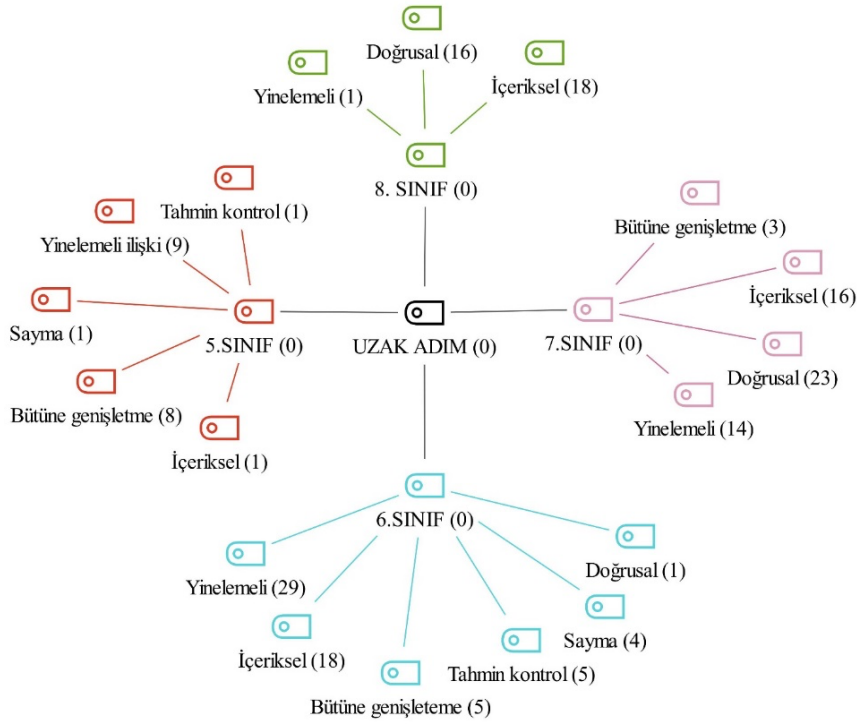
Ortaokul Öğrencilerinin Yakın Adım Örüntü Görevlerinde Kullandıkları Genelleme Stratejilerine İlişkin Şemaları



Öğrencilerin yakın adımı bulma süreçlerinde genel anlamda bir strateji paralelliği olsa da sınıf düzeyleri bağlamında niteliksel farklılaşmalar göze çarpmaktadır. Veriler incelendiğinde, 6., 7. ve 8. sınıf kademelerinde bulunan öğrencilerin 5. sınıf öğrencilerinden farklı olarak daha olgun bir akıl yürütme gerektiren "içeriksel" stratejiyi sürece dâhil ettikleri, buna karşın ilkel bir yöntem olan "çizme" stratejisini aşamalı olarak terk ettikleri saptanmıştır. Özellikle 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin doğrusal, içeriksel, sayma ve tahmin-kontrol stratejilerinde büyük bir ortaklık sergiledikleri görülmektedir. Bu üst sınıfların (7 ve 8), alt sınıflara (5 ve 6) kıyasla "doğrusal" ve "tahmin-kontrol" stratejilerini çok daha etkin şekilde işe koşmaları, yaşa ve kazanımlara bağlı cebirsel olgunlaşmanın bir işaretidir. Öğrencilerin uzak adım görevlerindeki karşılaştırmalı durumları ise Şekil 8'de görselleştirilmiştir.

Şekil 8.

Ortaokul Öğrencilerinin Uzak Adım Örüntü Görevlerinde Kullandıkları Genelleme Stratejilerine İlişkin Şemaları



Uzak adım bulguları genel hatlarıyla incelendiğinde, yinelemeli ilişki ve içeriksel genelleme stratejilerinin tüm ortaokul kademelerinde yaygın bir tabana sahip olduğu anlaşılmaktadır. Ancak derinlemesine bakıldığında, 5. sınıflarda "içeriksel" stratejinin (n=1) yok denecek kadar az kullanımı ve bu stratejinin üst kademelerde yaygınlaşması önemli bir farklılıktır. Benzer şekilde cebirsel düşünmenin zirvesi kabul edilen "doğrusal" genelleme stratejisinin 5. sınıflarda hiç görülmediği; 6. sınıflarda sadece bir öğrenci (n=1) tarafından kullanıldığı, ancak denklem kazanımlarının öğretim programına yoğun olarak dâhil edildiği 7. (n=23) ve 8. (n=16) sınıflarda bu stratejinin büyük bir sıçrama yaptığı net bir şekilde tespit edilmiştir. Sonuç olarak, uzak adım görevlerinde alt sınıfların strateji çeşitliliğinde büyük dağınıklıklar ve ilkel yöntemler (sayma, vb.) görülürken, 7. ve 8. sınıfların çok daha kompakt bir biçimde, matematikseliği güçlü olan "doğrusal" ve "içeriksel" stratejiler etrafında kümelenedikleri sonucuna ulaşılmıştır.

TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu araştırmada, ortaokul öğrencilerinin lineer örüntüler bağlamında kullandıkları genelleme stratejileri sınıf düzeyleri ekseninde derinlemesine incelenmiştir. Elde edilen bulgular, öğrencilerin strateji tercihlerinin sınıf düzeyine bağlı olarak belirgin bir gelişimsel farklılık gösterdiğini ortaya koymaktadır. Beşinci ve altıncı sınıf kademelerindeki öğrencilerin örüntüleri modellerken ağırlıklı olarak sayma, çizme ve yinelemeli düşünmeye dayalı ilkel stratejileri tercih ettikleri; uzak adım görevlerinde ise daha çok tahmin-kontrol ve içeriksel stratejilere yöneldikleri gözlemlenmiştir. Bu durum, Radford'un (2014) cebirsel düşünme ve değişken kavramının ardışık bir gelişim süreci içinde şekillendiğini öne süren kuramsal yaklaşımıyla güçlü bir paralellik taşımaktadır. Öğrencilerin genelleme yaparken aritmetik ve sözel ifadeleri kullanabilmelerine karşın, bu ilişkileri formel cebirsel sembollere dönüştürmede yaşadıkları zorluklar, matematiksel düşünme sürecinde sembolik temsillere geçişin yapılandırılmış bir öğretimle desteklenmesi gerektiğini göstermektedir (Blanton vd., 2015). Alt sınıflarda gözlemlenen bu sembolleştirme engelleri, Lannin'in (2005) belirgin ve belirgin olmayan stratejiler ayrımıyla da açıklanabilmektedir. Öğrenciler başlangıçta örüntü adımlarını tek tek sayarak veya çizerek somut yollarla ilerlemekte; kurala dayalı belirgin stratejilere geçiş ise ancak formal öğretimle birlikte olgunlaşmaktadır. Bilhassa 6. sınıf öğrencilerinin şekil örüntülerini doğrudan sayı örüntüsüne dönüştürerek çözmeye çalışmaları, Tanış ve Özdaş'ın (2009) örüntü temsilleri arasındaki geçiş becerilerinin öğretimle pekiştirilmesi gerektiğine dair bulgularıyla örtüşmektedir. Benzer şekilde Warren, Cooper ve Lamb'in (2006) öğrencilerin genelleme kapasitelerindeki gelişimi "basit tekrarlamalardan kurala, oradan da sembolik ifadeye yönelen aşamalı bir süreç" olarak tanımlamaları, mevcut araştırmanın sonuçlarını teorik açıdan destekler niteliktedir.

Yedinci sınıf düzeyindeki öğrencilerin genelleme sürecinde örüntünün bağlamsal ve biçimsel yapısını derinlemesine analiz etmeden doğrudan kural bulmaya ve formül üretmeye odaklanmaları araştırmanın dikkat çekici bir diğer bulgusudur. Bu eğilim, Stephens ve diğerleri (2007) tarafından dile getirilen “erken cebirsel düşünmenin matematiksel yapı ve ilişkilerden koparılması gerektiği” yönündeki kritik vurguyla doğrudan ilişkilidir. Çoğunlukla aritmetik ve işlemsel bir refleksle hızlı sonuca ulaşmayı hedefleyen bu öğrenciler, farklı çözüm yollarını deneme konusunda daha az esneklik göstermekte; bu durum da cebirsel genelleme sürecinin kavramsal altyapısını zayıflatmaktadır. Bununla birlikte, az sayıda da olsa bazı öğrencilerin örüntülerin biçimsel yapısını dikkate alarak yapısal temelli ve esnek çözüm yolları geliştirebilmeleri, matematik öğretim ortamlarında strateji çeşitliliğini besleyici ve çoklu temsilleri destekleyici uygulamalara duyulan ihtiyacı net bir şekilde göstermektedir (Smith, 2003).

Sekizinci sınıf öğrencilerinin problemleri çözerken ağırlıklı olarak doğrusal genelleme stratejilerine yönelmeleri ve fonksiyonel ilişkileri oluşturmada daha başarılı olmaları, cebirsel düşünme yetisinin sınıf düzeyi ve bilişsel olgunlukla birlikte geliştiğini doğrulamaktadır. Carraher, Schliemann ve Brizuela (2000) tarafından yürütülen boylamsal çalışmalar da benzer şekilde, öğrencilerin aritmetik düşünmeden sembolik düşünmeye geçişlerinin zaman içinde ve nitelikli öğretim yoluyla kalıcı hâle getirilebileceğini göstermiştir. Türkiye’deki 8. sınıf matematik öğretim programında denklem ve cebirsel ifadelerin çok daha sistematik, yoğun ve soyut bir biçimde ele alınması (MEB, 2018), bu kademedeki öğrencilerin doğrusal stratejilerdeki başarısına doğrudan katkı sağlayan temel bir pedagojik unsur olarak değerlendirilebilir.

Alanyazında Blanton ve Kaput’un (2004) erken cebirsel düşünmenin salt kural ezberlemeye değil, matematiksel yapı ve ilişkileri anlamlandırmaya dayanması gerektiği yönündeki temel argümanı, bu çalışmanın bulgularıyla güçlü bir biçimde örtüşmektedir. Nitekim Blanton ve diğerleri (2015) tarafından yürütülen güncel araştırmalarda da, örüntü temelli öğretim süreçleri sayesinde öğrencilerin nicel ilişkileri başarılı bir şekilde genelleyebildikleri, fonksiyonel düşünmeye dayalı mantıksal açıklamalar geliştirebildikleri ve bu ilişkileri sembollerle ifade etme yetkinliklerinin arttığı açıkça gösterilmiştir. Stephens ve diğerlerinin (2017) erken sınıf düzeylerinde gerçekleştirdikleri öğretim deneyleri sonucunda öğrencilerin ulaştıkları genellemeleri hem sözel hem de sembolik olarak ifade edebilme becerisi kazanmaları, bu çalışmada alt sınıflar için tespit edilen zorlukların doğru öğretimsel müdahalelerle aşılabileceğine dair önemli bir teorik kanıt sunmaktadır.

Araştırmadan elde edilen tüm bu bulgular doğrultusunda; ortaokul matematik sınıflarında örüntü temelli öğretimin yalnızca işlemsel bilgiye ve kural bulmaya indirgenmemesi; bunun yerine ilişki kurma, sembolleştirme ve bilişsel esnekliğe dayalı strateji geliştirme becerilerini merkeze alması gerektiği önerilmektedir. Öğrencilere farklı matematiksel temsil biçimlerini keşfetme ve kendi özgün stratejilerini yapılandırma fırsatı sunan zengin öğretim ortamları, cebirsel düşünmenin sağlam temeller üzerine inşa edilmesine doğrudan katkı sağlayacaktır. Bu bağlamda, öğretmenlerin örüntü görevlerini salt doğru cevaba ulaşmayı hedefleyen rutin problemler biçiminde sunmaktan kaçınmaları; aksine, bu görevleri öğrencinin zihinsel süreçlerini ve kavramsal yanılgılarını açığa çıkaran interaktif tartışma ortamlarına dönüştürmeleri büyük önem arz etmektedir. Cebirsel düşünmenin ilkökul yıllarından itibaren erken cebir perspektifiyle müfredata entegre edilmesi, öğrencilerin ileriki yıllarda ihtiyaç duyacakları soyutlama becerilerini kalıcı biçimde geliştirecektir. Dolayısıyla, öğretmen yetiştirme ve hizmet içi eğitim programlarında erken cebir öğretimi pedagojisine daha geniş yer verilmesi ve öğretmenlerin bu süreci yapılandırmalarına yönelik mesleki gelişim fırsatlarının artırılması elzemdir.

Mevcut çalışma, literatüre önemli katkılar sunmakla birlikte birtakım sınırlılıklara sahiptir. İncelenen genelleme stratejilerinin yalnızca belirli lineer sayı ve şekil örüntüleri üzerinden değerlendirilmiş olması çalışmanın temel sınırlılığıdır. Gelecekte yürütülecek araştırmalarda, öğrencilerin strateji geliştirme süreçlerini zaman içinde detaylıca izleyen boylamsal araştırma tasarımlarının kullanılması önerilmektedir. Ayrıca, farklı örüntü türlerine (kuadratik örüntüler, tekrarlayan örüntüler vb.) yönelik strateji seçimlerinin incelenmesi ve öğretmen müdahalelerinin öğrencilerin genelleme becerileri üzerindeki etkisinin deneysel desenlerle araştırılması alanyazını zenginleştirecektir. Son olarak, örüntü temelli gelişen cebirsel düşünme becerilerinin öğrencilerin problem çözme veya geometrik akıl yürütme gibi diğer matematiksel alanlardaki performanslarına transfer etkisi de derinlemesine incelenebilir.

KAYNAKÇA

- Becker, J. R., & Rivera, F. (2006). Sixth graders' figural and numerical strategies for generalizing patterns in algebra (1). In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Saiz, & A. Mendez (Eds.), *Proceeding of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 95-101). Universidad Pedagógica Nacional.
- Blanton, M., & Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. In M. Jonsen Hoines & A. Hoines (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 135-142). Bergen University College.
- Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Gardiner, A., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in six-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(5), 511–558. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.46.5.0511>
- Blanton, M., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3–5*. NCTM.
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. L. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 235-272). Lawrence Erlbaum Associates.
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Brizuela, B. M. (2000). Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions. In M. L. Fernández (Ed.), *Proceedings of the 22nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 421–426). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.
- Common Core State Standards Initiative. (2010). Common core state standards for mathematics. Retrieved from: <http://www.corestandards.org/Math/>
- Driscoll, M. (1999). *Fostering algebraic thinking: A guide for teachers grades 6-10*. Heinemann.
- Gowers, T., Barrow-Green, J., Leader, I. (Eds.). (2008). *The Princeton companion to mathematics*. Princeton University Press.
- Greenes, C., Cavanagh, M., Dacey, L., Findell, C., & Small, M. (2001). *Navigating through algebra in prekindergarten-grade 2*. NCTM.
- Hawthorne, C. (2016). *Teachers' understanding of algebraic generalization* (Doctoral dissertation). University of California, San Diego.
- Krebs, A. S. (2005). Take time for action: studying student's reasoning in writing generalizations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 10(6), 284-287. <https://doi.org/10.5951/MTMS.10.6.0284>
- Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Routledge.
- Lannin, J. (2005). Generalization and justification the challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(3), 231–258. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0703_3
- Lee, K., & Karmiloff-Smith, A. (1996). The development of external symbol systems: The child as a notator. In R. Gelman & T. Kit-Fong Au (Eds.), *Perceptual and cognitive development: Handbook of perception and cognition* (pp. 185–211). Academic Press.
- Lee, L., & Freiman, V. (2004). Tracking primary students' understanding of patterns. Paper presented at the Annual Meeting-Psychology of Mathematics & Education of North America. Toronto, Canada.

- Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 57–94). Lawrence Erlbaum Associates & National Council of Teachers of Mathematics.
- Merriam, S. B. (1998). *Qualitative research and case studies applications in education*. Jossey-Bass.
- Milli Eğitim Bakanlığı. (2018). Matematik dersi öğretim programı (İlkokul ve ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. Sınıflar). Talim Terbiye Kurul Başkanlığı.
- Milli Eğitim Bakanlığı. (2024). *Ortaokul matematik dersi öğretim programı (5-8. sınıflar)*. Ankara: MEB Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.
- Olkun, S., & Toluk, Z. (2004). *İlköğretimde etkinlik temelli matematik öğretimi [Activity-based mathematics teaching in primary education]*. Ankara: Anı Yayıncılık.
- Otte, M. F., Mendonça, T. M., Gonzaga, L., & de Barros, L. (2015). Generalizing is necessary or even unavoidable. *PNA*, 9(3), 143-164. <https://doi.org/10.30827/PNA.V9I3.6101>
- Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of pattern: a semiotic perspective. In *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 2-21). Universidad Pedagógica Nacional.
- Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of pattern: a semiotic perspective. In *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 2-21). Universidad Pedagógica Nacional, Mérida, Mexico.
- Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26, 257–277. <https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2>
- Rittle-Johnson, B., & Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other?. *Journal of Educational Psychology*, 91(1), 175. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.91.1.175>
- Şen, C. & Güler, G. (2022). *Cebir uygulamaları ile ilkokul ve ortaokulda cebir öğretimi*. Vizetek Yayıncılık.
- Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *The Journal of Mathematical Behavior*, 14(1), 15-39. [https://doi.org/10.1016/0732-3123\(95\)90022-5](https://doi.org/10.1016/0732-3123(95)90022-5)
- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20(2), 147–164. <https://doi.org/10.1007/BF00579460>
- Stake, R. E. (2005). Qualitative case studies. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Ed.), *The Sage handbook of qualitative research* (pp. 443-466). Sage Publications.
- Stephens, A. C., Fonger, N., Strachota, S., Isler, I., Blanton, M., Knuth, E., & Murphy Gardiner, A. (2017). A learning progression for elementary students' functional thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 19(3), 143-166. <https://doi.org/10.1080/10986065.2017.1328636>
- Tanışlı, D., & Özdaş, A. (2009). The strategies of using the generalizing patterns of the primary school 5th grade students. *Educational Sciences: Theory and Practice*, 9(3), 1485-1497.
- Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford, (Ed.). *The ideas of algebra, K-12.1988 yearbook* (pp. 8-19). National Council of Teachers of Mathematics.

Van de Walle, J., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2010). *Elementary and middle school mathematics* (8th ed.). Allyn & Bacon.

Warren, E., & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 67(2), 171-185. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9092-2>

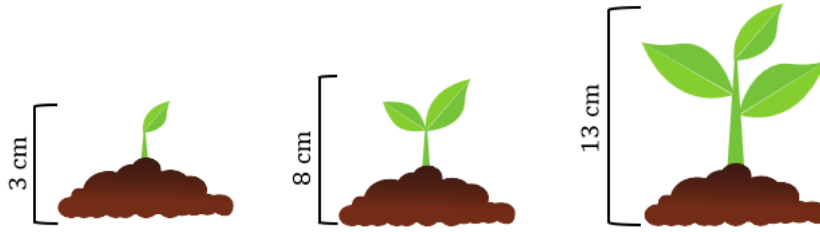
Yin, R. K. (2003). *Applications of case study research*. Sage Publishing.

EK-1: LİNEER ÖRÜNTÜ ÇALIŞMA KAĞIDI

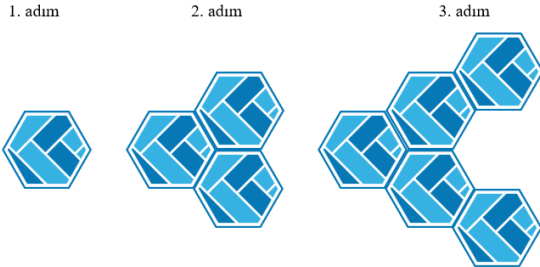
1. Bisiklet almak için para biriktiren Gizem, kumbarasına bir ay boyunca her gün belli bir miktar para atmaktadır. Aşağıdaki tabloda günlere göre kumbaraya attığı para miktarları verilmiştir. Tabloya göre soruları cevaplayınız.

Günler	1.gün	2.gün	3.gün	7.gün	30.gün
Kural					
Kumbaraya atılan para miktarı (TL)	8	17	26		

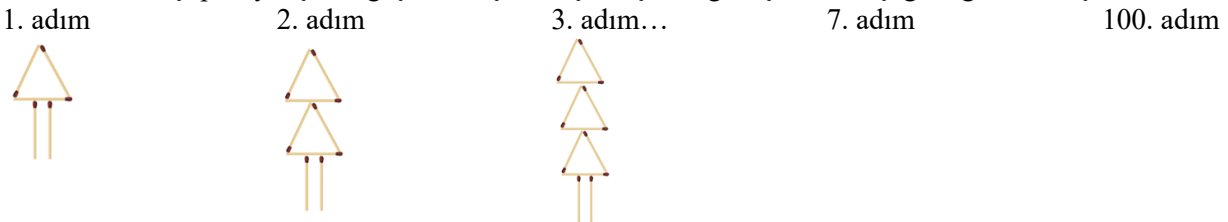
- a) 7. gün kumbarasına kaç TL attığını bulunuz.
b) 30.gün kumbarasına kaç TL attığını bulunuz.
c) Herhangi bir günde kumbarasına attığı para miktarını veren bir kural yazınız. (Kelime veya sembollerle)
2. 21-26 Mart Orman haftasında evinin bahçesine 3 cm uzunluğunda fidan diken Ebru, merak ettiği için her hafta fidanın boyunun uzunluğunu ölçmektedir. Haftalara göre ölçüm sonuçları aşağıda gösterilmiştir.



- a) 7. haftanın sonunda fidanın boyunun uzunluğu kaç cm olur?
b) 100. haftanın sonunda fidanın boyunun uzunluğu kaç cm olur?
c) Herhangi bir haftadaki fidanın boyunun uzunluğunu veren bir kural yazınız. (Kelime veya sembollerle)
3. Deniz odasının duvarlarını altıgen şeklinde fayanslar kullanarak süslemek istemektedir. Yaptığı süslemenin ilk üç adımı aşağıda gösterilmiştir. Buna göre;



- a) 7. adımda kaç adet fayans kullanır?
b) 100. adımda kaç adet fayans kullanılır?
c) Herhangi bir adımdaki fayans sayısını veren bir kural yazınız. (Kelime veya sembollerle)
d) Elinde 99 adet fayansı kalan Deniz, bu fayansların hepsini kullanarak kaçınıcı adımı oluşturabilir?
4. Arda kibrit çöpleriyle çam ağaçları oluşturmuştur. Çam ağacı şekilleri aşağıda gösterilmiştir.



- a) 7. şekil için kaç adet kibrit çöpü gereklidir?
b) 100. şekil için kaç adet kibrit çöpü gereklidir?
c) Herhangi bir adımdaki (n) toplam kibrit çöpü sayısını veren bir kural yazınız. (Kelime veya sembollerle)



From Near to Far, From Counting to Function: The Evolution of Middle School Students' Generalization Strategies

Ceylan Güler^{1*}

Elif Canlı²

¹Yozgat Bozok University, Faculty of Education, Department of Mathematics Education

ceylan.guler@yobu.edu.tr

*Corresponding Author

²Ismail Dursun Anatolian High School
91124921003@ogr.bozok.edu.tr

Received: 26.03.2025
Accepted: 29.05.2025
Available Online: 30.04.2026

Abstract: This study aims to provide an in-depth investigation of the generalization strategies employed by middle school students when modeling linear pattern tasks across various grade levels. Adopting a case study design—a qualitative research approach—the study was conducted in two phases. The data collection process involved worksheets administered to 30 students in grades 5 through 8, followed by semi-structured individual interviews with 11 students purposefully selected from this group based on their varying levels of mathematical achievement. The data were analyzed through descriptive analysis, centered on the theoretical framework of generalization strategies conceptualized by Lannin (2005). The findings reveal that 5th and 6th-grade students predominantly rely on counting, drawing, recursive relationship, and contextual strategies when modeling patterns. In contrast, 7th and 8th-grade students demonstrate cognitive maturation by shifting their focus toward contextual and explicit (linear) generalization strategies. Specifically, it was observed that students at higher grade levels develop more systematic approaches to discovering functional relationships and formulating formal rules. These results suggest that to foster the healthy development of algebraic thinking skills from an early stage, pattern-based instructional processes should be supported by differentiated and enriched pedagogical strategies tailored to the specific cognitive needs of each grade level.

Keywords: Algebraic thinking, linear patterns, generalization strategies, middle school students.

INTRODUCTION

Mathematics is a universal language built upon symbols and shapes, encompassing the processes of organizing, analyzing, interpreting, and producing information, as well as making predictions and solving problems (Ministry of National Education [MoNE], 2018). Algebra constitutes one of the fundamental building blocks of this universal language (Otte et al., 2015). In the literature, the concept of algebra has been addressed from various perspectives by researchers. For instance, while Usiskin (1988) evaluates algebra as a tool for understanding and analyzing relationships, Mason (2008) defines it as a cultural product and a body of knowledge. This continuously evolving cultural structure makes algebra a dynamic sub-discipline of mathematics (Şen & Güler, 2022). Algebra plays a critical role in helping individuals make sense of the relationships and problem situations they encounter in daily life, reason about these situations, and express their thoughts. Accordingly, algebra instruction is positioned at the center of the fundamental skills that students must acquire within mathematics curricula (Park, 2021). Indeed, this emphasis has been strongly maintained in the Mathematics Curriculum, which has been implemented since the 2024-2025 academic year and restructured within the scope of the "Century of Türkiye Education Model." In the new curriculum, developing students' mathematical reasoning and generalization skills by using fundamental concepts such as patterns, algebraic expressions, equations, equality, and association is positioned among the primary objectives (MoNE, 2024).

When national (MoNE, 2018) and international (e.g., Common Core State Standards Initiative [CCSSI], 2010; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000) mathematics curricula are examined, it is evident that comprehensive learning outcomes regarding the algebra learning area are included for grades 5-8. These outcomes cover a wide range of topics, such as finding a desired term in number patterns, making sense of algebraic expressions, recognizing the concepts of equality and equations, solving first-degree linear equations with one unknown and related problems, identities, linear equations, inequalities, and examining linear relationships between two variables (MoNE, 2018). However, despite occupying such a prominent place

in the middle school mathematics curriculum, algebra is often perceived by students as an abstract and difficult-to-understand area (Greenes et al., 2001; Lee & Freiman, 2004).

Students' ability to overcome these difficulties depends on their comprehending algebra not merely as a collection of symbolic topics and learning outcomes in school mathematics, but as a specific way of thinking (Gowers et al., 2008). This concept, referred to in the literature as "algebraic thinking," is inextricably intertwined with algebra. At this point, the question posed by Radford (2006), "What distinguishes algebraic thinking from algebra?", gains significance. Driscoll (1999) defines algebraic thinking as "the capacity to explicitly articulate the relationship between quantitative situations and variables." This concept, whose boundaries are difficult to define precisely due to its inclusion of comprehensive algebraic objects such as equations, functions, and patterns (Radford, 2014), is fundamentally considered a specialized way of mathematically reflecting upon algebraic objects. Instructional processes designed around these objects at the middle school level directly contribute to the development of students' algebraic thinking skills (Van de Walle et al., 2010). In this context, Blanton et al. (2011) draw attention to the central role of "generalization" and "justification" processes, which foster the development of algebraic thinking in the construction of mathematical structures and relationships.

Building upon this theoretical framework, the current study aims to provide an in-depth investigation of the generalization strategies middle school students employ when modeling linear patterns. Within the scope of the research, it is intended to reveal the differences in strategy use in detail by analyzing students' approaches to near-step and far-step linear pattern tasks across different grade levels.

Theoretical Framework

This section addresses the concepts of generalization, generalization strategies, and linear patterns, which constitute the theoretical foundations of the study.

Generalization in Algebraic Thinking

Although Hawthorne (2016) defines generalization as an innate human tendency, he draws attention to the special importance of performing this action through mathematical means. The sustainability of mathematical and scientific culture depends largely on individuals' ability to generalize (Otte et al., 2015). In this context, generalization is considered one of the most fundamental building blocks of algebraic thinking (Lee & Karmiloff-Smith, 1996; Sfard, 1995). Kaput (2008) also emphasizes the critical role of the ability to make more formal and symbolic generalizations and to develop different representations in algebraic thinking processes.

Despite this central position of generalization, it is observed that the activities presented to students in mathematics education are generally operation-oriented, and opportunities to construct in-depth mathematical meaning remain limited. For example, routine questions on ratio and proportion, such as "If the total cost of 5 kg of apples is 70 TL, how much does 1 kg cost?", expect students only to apply arithmetic operations with correct algorithms. However, such problem situations have the potential to offer opportunities for generalizing relationships between variables and quantities (Lannin, 2005). Therefore, it is of great importance in mathematics instruction to support students in noticing changing quantities and the functional relationships between them, making generalizations, and thereby fostering their algebraic thinking processes.

Reducing algebraic thinking merely to algebra topics or perceiving generalization solely as a process of reaching a rule disrupts the development of students' both algebraic thinking and generalization skills (Rittle-Johnson & Alibali, 1999). Consequently, by presenting rich mathematical contexts involving algebraic objects, the aim should be for students to reach generalizations by employing different strategies and to develop their algebraic thinking skills (Radford, 2006). Accordingly, patterns are one of the most powerful instructional tools that support students' generalization processes (NCTM, 2000).

Patterns and Generalization Strategies

Patterns are structures formed by the arrangement of numbers, sounds, shapes, objects, or events in a specific rule and order (Şen & Güler, 2022). These structures are generally classified into two main groups:

structures in which a specific repeating unit is consecutively reiterated are called repeating patterns, while structures that exhibit a regular increase or decrease between steps are called growing patterns (Olkun & Toluk-Uçar, 2004). Growing patterns can be designed in both number and shape formats and may exhibit structurally linear or quadratic properties. While linear patterns are generally defined by linear functions in the form of $y = mx + n$, quadratic patterns are based on second-degree functions such as $y = mx^2 + n$. In the middle school mathematics curriculum, particular emphasis is placed on linear equations and linear patterns. Therefore, in accordance with students' cognitive development levels and curriculum objectives, the current study focuses on linear number and shape patterns (MoNE, 2018).

Linear patterns are effective tools that allow students to develop their generalization skills in a multifaceted manner. In this context, Stacey (1989) defines the generalizations students reach on patterns in two dimensions as near-step and far-step. While near-step generalization involves strategies aimed at extending the pattern one or a few steps further, far-step generalization refers to determining a general and comprehensive rule regarding the pattern. Stacey revealed that students follow three fundamental paths when making these generalizations: recursive strategy, whole-object strategy, and linear strategy. The recursive strategy is the tendency of students to find the next term based on the previous step. In the whole-object strategy, generalization is achieved by directly and proportionally associating the constant amount of increase in the pattern with the desired step. The linear strategy involves students expressing the pattern rule with a functional approach, using variables.

In addition to this basic classification, Lannin (2005) conceptualized generalization strategies into two main groups: explicit and non-explicit strategies. While counting and recursive strategies fall into the non-explicit group; whole-object, guess and check, contextual, and linear strategies are defined as explicit strategies. In the counting strategy, students reach the sequential result by counting the number of objects or terms in the pattern one by one. In the recursive strategy, taking into account the constant amount of increase between steps, each new term is added onto the previous one. The whole-object strategy involves assuming the difference between steps as the fundamental rule of the pattern and directly relating this difference to the desired number of steps; for instance, identifying the amount of increase as 2 in a pattern like 2-4-6-8-... and directly using this difference for the 100th step. The guess and check strategy is the process where students make intuitive predictions about the pattern rule and test the validity of these predictions across different steps. In the contextual strategy, the pattern rule is expressed mostly verbally and with arithmetic operations instead of algebraic variables; a student defining the pattern rule as "multiply by two, then add one" is an example of this. Finally, the linear strategy is the expression of the obtained rules in a functional language using mathematical symbols and variables, for example, in the form of $2n + 1$.

METHOD

In this research, a case study design, one of the qualitative research approaches, was adopted to examine in-depth the generalization strategies used by middle school students when modeling linear patterns. A case study is a research method that allows for a detailed and comprehensive investigation of a specific situation or phenomenon within its natural context, especially when the boundaries between the phenomenon and context are not clearly evident. Because the research aimed to comparatively examine the approaches and strategies used by students at different grade levels in near-step and far-step pattern tasks, a holistic multiple-case design was preferred as the fundamental research design. This design allows multiple cases to be addressed in-depth within a whole and enables comparative analyses between cases (Yin, 2003).

Participants

The study group of the research consists of students studying in the 5th, 6th, 7th, and 8th grades of a public middle school. The research process was designed in two phases to enable a detailed examination of the problem and its various dimensions. In the first phase, written data collection tools consisting of linear pattern tasks were administered to a total of 30 students representing different grade levels. In the second phase, individual interviews were conducted with 11 students, who were selected from among these students and exhibited variance in terms of their mathematics achievement levels. In qualitative research, to thoroughly understand the phenomenon under investigation and reflect its different dimensions, it is of great importance

that the samples representing the case are consciously selected to serve the purpose (Stake, 2005). Based on this theoretical rationale, a purposive sampling method was employed in the research. While differences in grade levels were taken into consideration in the first phase of the process to ensure participants could represent different cognitive and educational stages, ensuring diversity in mathematics achievement levels was observed as the primary criterion in the second phase to richly reveal potential differences in generalization strategies.

Table 1

Table 1 Participant Characteristics in the First Phase

Grade Level	Gender		Total
	Female	Male	
5	2	6	8
6	3	3	6
7	5	4	9
8	4	3	7
Total	14	16	30

The distribution of the 30 participants involved in the first phase of the study according to their grade levels is presented in Table 1. Examining the relevant data, it is observed that the study group consists of eight students in the 5th grade, six in the 6th grade, nine in the 7th grade, and seven in the 8th grade. Detailed information regarding the 11 students who were purposefully selected from this participant pool in the first phase to represent different mathematics achievement levels and included in the individual interviews in the second phase of the research is provided in Table 2.

Table 2

Participant Characteristics in the Second Phase

Grade Level	Participant	Gender	Mathematics Achievement Level
5	S1	Male	Good
	S2	Male	Medium
6	S3	Male	Medium
	S4	Female	Medium
	S5	Male	Good
7	S6	Male	Good
	S7	Female	Medium
	S8	Female	Good
8	S9	Male	Good
	S10	Male	Good
	S11	Female	Medium

The relevant table indicates that the second-phase study group is composed of students studying at different grade levels and possessing various mathematical achievement levels within their respective grades. During the data analysis and presentation of the findings, direct quotations from the responses obtained through individual interviews with these students were included. In accordance with research ethics and the principle of protecting participant confidentiality, the students' real identities were kept anonymous; instead, each participant was coded as S1, S2, ..., S11.

Data Collection Tools

The data collection process within the scope of the research was conducted in two phases. In the first phase, a worksheet developed by the researchers (Appendix-1) was used to determine the generalization strategies students employed when modeling linear patterns. This data collection tool consists of four tasks (two number patterns and two shape patterns) containing near-step and far-step pattern questions. The content

and construct validity of the prepared tasks were presented to two mathematics education experts for review, and the tool was finalized by making necessary revisions based on the feedback received.

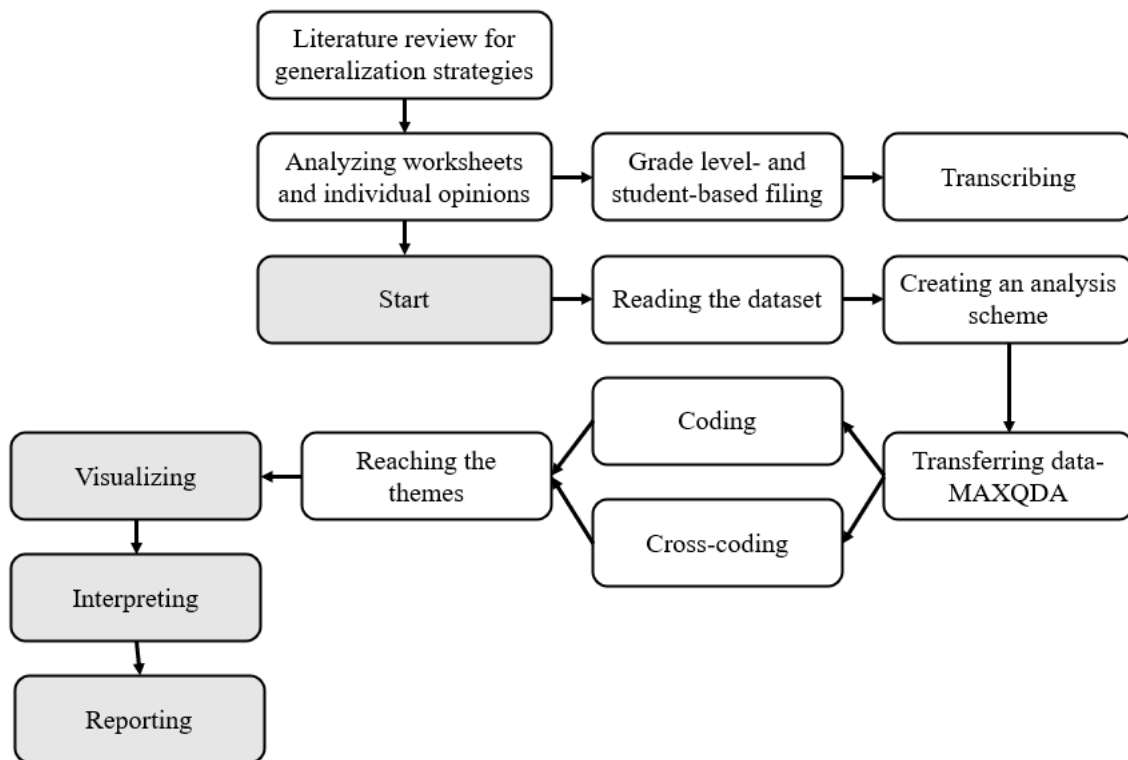
In the second phase, semi-structured individual interviews were conducted to deepen the findings obtained through the written tools and to make sense of the cognitive processes underlying the students' responses. These interviews were designed to reveal the students' thinking processes regarding their solution steps on the worksheets in greater detail. During the interviews, probing questions were asked, such as how they found a specific step in the pattern, why they used their preferred strategy, and what alternative solution paths they could have followed. To prevent data loss and ensure the reliability of the analysis process, these interviews, which lasted approximately 40 minutes, were audio-recorded with the participants' consent.

Data Analysis

In this study, a descriptive analysis approach was adopted to analyze the data collected through worksheets and individual interviews. Merriam (1998) defines analysis processes conducted in line with pre-determined thematic frameworks present in the literature as descriptive analysis. The general data analysis scheme of the research is presented in Figure 1.

Figure 1

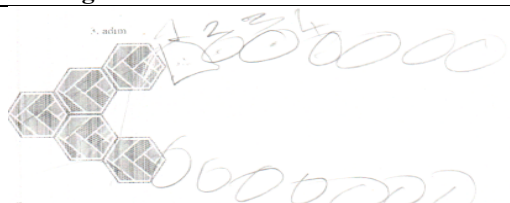
Data Analysis Scheme of the Study



In accordance with this theoretical structure, a comprehensive literature review on generalization strategies in linear patterns was first conducted, and the generalization strategies conceptualized by Lannin (2005) were determined as the primary data analysis framework. The collected data were organized and filed; initially focusing on the general aim of the study and grade levels in the first phase, and subsequently on a class and student basis in the second phase. The filed worksheets and individual interview audio recordings were transcribed into written text; the resulting transcripts were read thoroughly to gain general familiarity before being transferred into the MAXQDA qualitative data analysis software. The data were coded through the software within the framework of the predetermined generalization strategies. To ensure the reliability of the coding process, independent cross-codings were performed by an academic expert in mathematics education parallel to the researcher's analyses. Sample codings derived from the students' responses are detailed in Table 3. Upon completion of the coding process, final themes were reached based on the obtained findings. The determined themes were mapped using the visual tools provided by the MAXQDA software, making them ready for interpretation and reporting. These visual structures, enriched with direct student quotations, are presented in the findings section of the study.

Table 3

Sample Codings

Theme	Code	Sample Coding
Generalization Strategies	Modeling	S1: 
	Counting	S7: It becomes 26 TL on the 3rd day, 35 TL on the 4th day, 44 TL on the 5th day, 53 TL on the 6th day, and 62 TL on the 7th day.
	Iterative	S1: I can proceed as 9 plus 9 plus 9 plus.
	Whole-object	S5: I found $\times 5$ because it increases by 5 by 5.
	Guess-and-check	S9: I found it as $0 \times 5 = 0$, $0 + 3 = 3$ cm. $1 \times 5 = 5$, $5 + 3 = 8$ cm. $2 \times 5 = 10$, $10 + 3 = 13$.
	Linear	S10: $9x - 1$, x is the number of days
	Contextual	S11: It becomes $7 \times 5 = 35$, $35 + 3 = 38$.

Ethical Permissions of the Research

Prior to commencing the data collection process, an official application was made to the Yozgat Bozok University Social and Humanities Ethics Committee to evaluate the study's compliance with ethical principles. Through the committee's decision dated 20.09.2023, registered under document number 161824 and decision number 06/25, it was assessed that the research is in full compliance with ethical rules, and the necessary implementation permissions were obtained.

FINDINGS

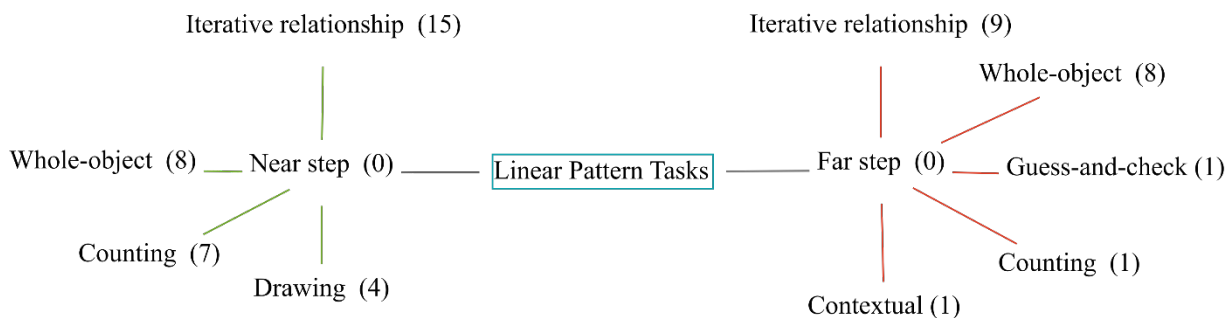
In this section of the study, the generalization strategies used by middle school students in near-step and far-step tasks based on linear patterns are addressed and reported in detail under separate headings in the context of grade levels.

Findings Regarding the Generalization Strategies of 5th Grade Students

The generalization strategies used by fifth-grade students in near-step and far-step tasks involving linear patterns are presented in Figure 2.

Figure 2

The Generalization Strategies Used by Fifth-Grade Students in Near-Step and Far-Step Tasks Involving Linear Patterns are Presented in Figure 2.



Examining Figure 2, it is observed that 5th-grade students, when generalizing the pattern rule in near-step tasks, respectively used recursive relationship ($n=15$), whole-object ($n=8$), counting ($n=7$), and drawing ($n=4$) strategies. In the process of finding the pattern rule in far-step tasks, these students resorted to recursive

relationship ($n=9$), whole-object ($n=8$), counting ($n=1$), guess and check ($n=1$), and contextual ($n=1$) generalization strategies. These findings indicate that 5th-grade students largely employ similar strategies when generalizing near and far-step pattern rules. However, alongside this similarity, it is noteworthy that the recursive strategy is less preferred in far-step generalization compared to the near-step; and unlike near-step generalizations, guess and check and contextual strategies were also incorporated into the far-step generalization process.

In the "wall decoration" shape pattern task administered to the students, participants were asked to find the number of tiles in the near step (7th step) and the far step (100th step). The solutions and explanations of students coded S1 and S2 regarding this task are presented in Table 4.

Table 4

S1 and S2's Solutions and Explanations Regarding the Wall Decoration Task

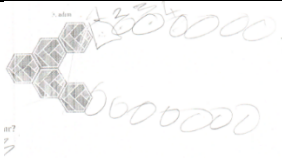
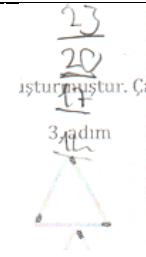
Explanation	Solution
S1: When I was finding step 7, I did as follows: In each step, it goes 2 by 2. So I found 14 by doing 7×2 . But when I draw the tiles, I find the answer 13. In step 100, I proceeded by drawing the tiles so that I wouldn't get confused, but then I did $2 \times 100 = 200$. This is how I found it.	
S2: At first, I drew the tiles by adding. Then I caught the pattern. Step 1 will have 1 tile, step 2 will have 3, step 3 will have 5, step 4 will have 7, step 5 will have 9, step 6 will have 11, and step 7 will have 13 tiles. It takes too long to proceed by adding for step 100. I'm thinking how I can find step 100 in an easy way... I can multiply 100 by 2.	

Table 5 (Continued)

S2: I wrote one by one and then added three. Since there are three matchsticks in the triangle, I found step 7 by increasing it 3 by 3. Since it increases by 3 each time, I find $100 \times 3 = 300$ for step 100. But as it's too much, I'll divide it by two.



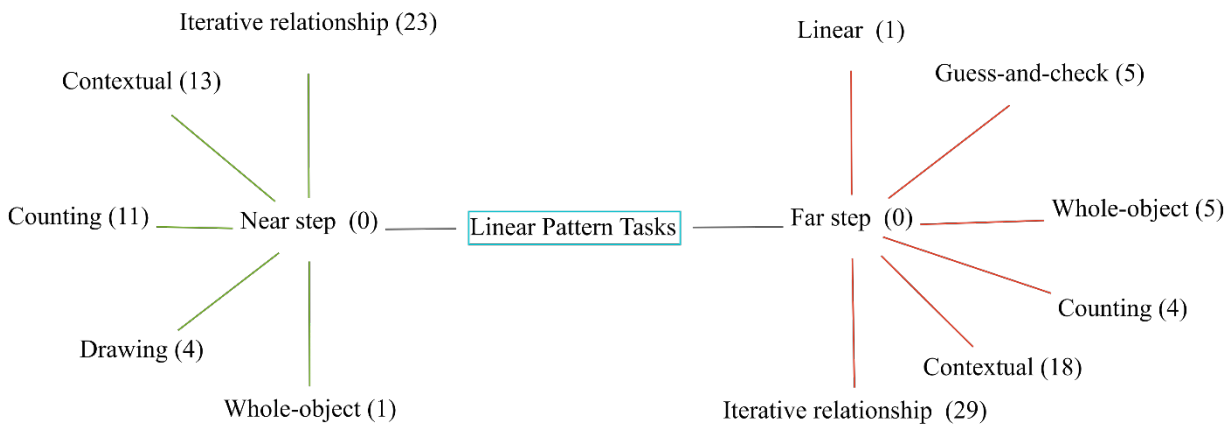
Examining Table 5, in the near-step task, it is seen that S1 converted the shape pattern into a number pattern by determining the number of matches in the steps, and then employed the "whole-object" strategy by carrying the determined repeating unit (+3) to the 7th step. S2, conversely, reached the 7th step by rhythmically increasing the number of matches in the 3rd step, utilizing the "counting" strategy. In the far-step task, S1 found the number of intervals from the 7th step to the 100th step (93) and multiplied this by the amount of increase; thus, employing the "contextual" generalization strategy with arithmetic steps specific to the problem without a formal rule. S2 directly extended the repeating unit to the 100th step ($100 \times 3 = 300$) using the "whole-object" strategy, but attempted to reach a conclusion with an erroneous assumption.

Findings Regarding the Generalization Strategies of 6th Grade Students

The generalization strategies used by sixth-grade students in pattern tasks are presented in Figure 3.

Figure 3

Generalization Strategies Used by Sixth-Grade Students in Near Step and Far Step Tasks in Linear Patterns

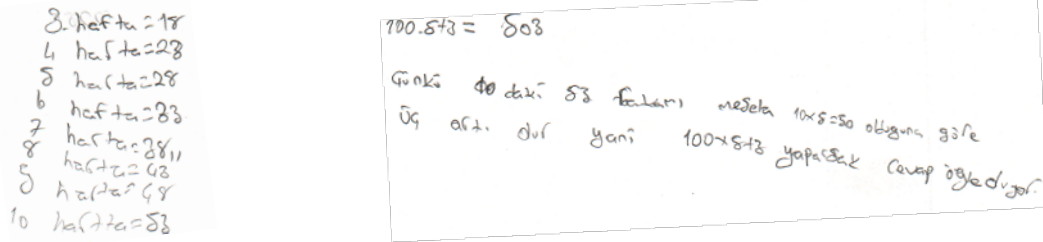


Based on the data in Figure 3, it is observed that 6th-grade students most frequently resorted to the "recursive relationship" ($n=23$) strategy in near-step tasks; followed by contextual ($n=13$), counting ($n=11$), drawing ($n=4$), and whole-object ($n=1$) strategies, respectively. In far-step tasks, it was determined that students used recursive relationship ($n=29$), contextual ($n=18$), whole-object ($n=5$), guess and check ($n=5$), counting ($n=4$), and linear ($n=1$) strategies. In this context, it is understood that 6th-grade students added "guess and check" and "linear" strategies to their repertoire in far-step tasks differently from the near-step, while abandoning the "drawing" strategy.

The sample work of S5 regarding the near-step and far-step tasks of the sapling problem, which was included in the linear pattern tasks presented to the students, is provided below and evaluated in this context

Figure 4

a) Near Step-Counting Generalization Strategy, B) Far Step-Contextual Generalization Strategy



The approaches of the students to the "sapling growth" problem included in the data collection tools embody this situation. Student S5, one of the research participants, used the "counting" strategy in the near-step (7th week) solution of the problem by sequentially adding the increase amount, stating, "At the beginning it was 3 cm, 1st week 8 cm, 2nd week 13 cm. Since it increases by 5s, I continued by adding 5 on top of 13, and found the 7th week as 38 cm." When calculating the far step (100th week), the same student abandoned this strategy; stating, "It would be easier by multiplying... Since it increases by 5s, $100 \times 5 = 500$, because it was 3 cm at the beginning, $500 + 3 = 503$ cm," demonstrating the "contextual" generalization strategy based on arithmetic operations without using an algebraic symbol. On the other hand, for the same sapling problem, S3 adopted the contextual strategy in both steps. For the near step, S3 reasoned, "I subtracted the 2nd week from the 7th week, 5 weeks left. $5 \times 5 = 25$ cm it grows. Since the length in the 2nd week is 13 cm, $25 + 13 = 38$ cm"; while for the far step, "I subtracted the 7th week from the 100th week, it became 93 weeks. $93 \times 5 = 465$ increase. $465 + 38 = 503$ cm." Although S3 could not construct a formal pattern rule, their ability to flawlessly solve the problem through its internal context and arithmetic relationships is a significant example of the effective use of the contextual strategy.

The strategic flexibility of 6th-grade students in different tasks was also examined within the context of the "wall decoration" task; the near-step solutions of S3, S4, and S5 are detailed in Table 6, and their far-step solutions in Table 7.

Table 6

Solutions and Explanations Of S3, S4, And S5 For the Wall Decoration Near Step Task

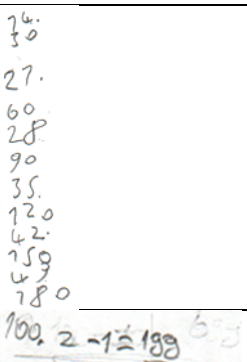
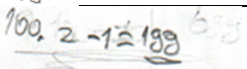
Explanation	Solution
S3: Each step increases by 2 tiles. Here I drew the tiles by increasing them 2 by 2. Then I counted one by one and found the answer 15. But I miscounted. There should have been 7 in step 4, but I drew 8 of them. The correct answer should be 13.	
S4: It becomes 13 in step 7. With each step, the number of tiles increases 2 by 2. If 5 tiles were used in step 3, then step 4 would have 7 tiles, step 5 would have 9, step 6 would have 11, and step 7 would have 13.	
S5: 2 was added to it. Step 4 becomes 7, step 5 becomes 9, step 6 becomes 11, and step 7 becomes 13. I found $7 \times 2 = 14$ tiles because it increases 2 by 2. Then I subtracted the number of tiles in step 1. I found 13.	

In the task of finding the near step, it is seen that S3 modeled and counted the objects one by one, employing the "drawing" strategy; while S4 determined the repeating unit (+2) and proceeded with sequential additions, using the "counting" strategy. Although S5 initially followed a recursive approach, they opted for

the "contextual" strategy without using algebraic symbols by multiplying the obtained repeating unit with the desired step ($7 \times 2 = 14$) and adjusting the initial value. These students' far-step approaches are addressed in Table 7.

Table 7

S3 and S5's Solutions and Explanations Regarding the Wall Decoration Far-Step Task

Explanation	Solution
S3: I went from step 7 to step 14. There were 15 tiles in step 7, and it became 30 in step 14. Then I went to step 21, it's 60. In this way, I went up to step 49. Step 49 became 180 tiles. Step 50 is $180 + 2 = 182$. For step 100, I get twice the 50. It becomes 364. I guess it was wrong. If there is an increase of 2 tiles in each step and if step 100 is asked, there should be an increase of $100-3=97$, $97 \times 2=194$. There were 5 tiles in step 3, then it becomes $194+5=199$. Now it's correct. We can find it by drawing, but it takes a lot of time.	
S5: When any step is asked, it will always be 'number of steps x 2' and the result minus one. Here, step 100 is asked. It becomes $100 \times 2 = 200 - 1 = 199$.	

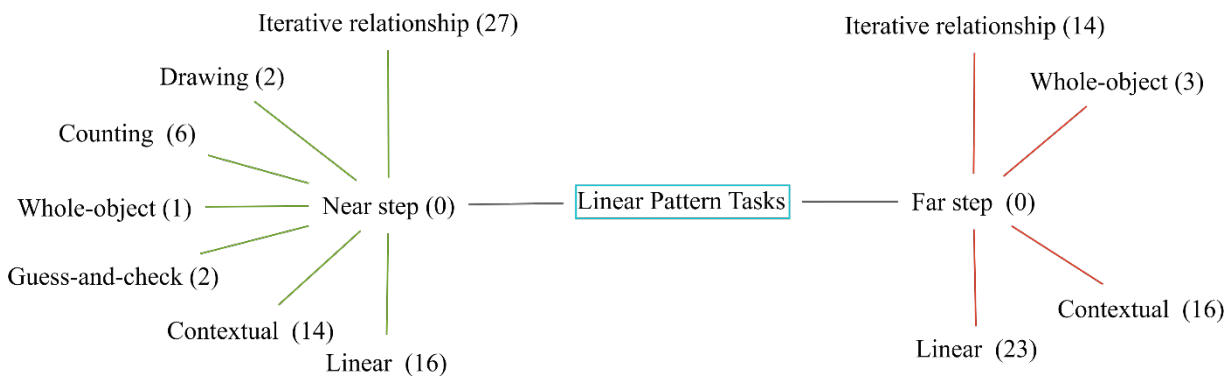
In the far-step task, S3 applied the "whole-object" strategy based on the reference points from the near step. S4 (although not in the table, from the interviews) resolved the pattern between input-output values with the "guess and check" strategy by stating; "I found 14 by counting to the 7th step. If I do 7×2 , it's also 14. But it was 13, so it subtracted 1... I thought I could do the same for the 100th step. $100 \times 2 = 200$, $200 - 1 = 199$." S5, conversely, moved the situation entirely into a functional context, formulated a verbal equation in the form of $2n - 1$ ("step number $\times 2 - 1$ "), and directly used the "linear" generalization strategy.

Findings Regarding the Generalization Strategies of 7th Grade Students

The generalization strategies used by seventh-grade students in near and far-step tasks are schematized in Figure 5.

Figure 5

Generalization Strategies Used by Seventh-Grade Students in Near Step and Far Step Tasks in Linear Patterns



When Figure 5 is examined, it is seen that 7th-grade students most frequently used the "recursive relationship" ($n=27$) strategy in near-step problems; followed by linear ($n=16$), contextual ($n=14$), counting ($n=6$), drawing ($n=2$), guess and check ($n=2$), and whole-object ($n=1$) strategies, respectively. In the far step, a structural shift was observed, and the "linear" generalization strategy ($n=23$) became the most preferred method. This was followed by contextual ($n=16$), recursive relationship ($n=14$), and whole-object ($n=3$) strategies. The fact that students used counting, drawing, and guess and check strategies only in near-step tasks and completely abandoned them in far steps is a significant indicator that they feel the need for more formal and rule-based thinking as numerical values grow.

This cognitive transition can also be clearly observed in the "saving money" (number pattern) task directed at the students. The near-step explanations of S6, S7, and S8 regarding this task are presented in Table 8.

Table 8

Solutions and Explanations of S6, S8, and S7 For the Money Saving Near Step Task

Explanation	Solution																								
S6: We are asked the amount of money he put into the money box on the 7th day. On the first day, he put 8€. On the second day, he put 17€. It continued this way. We will use the formula $(n \cdot 9 - 1)$. I multiply 7 by 9 and subtract one, so it's 62€. I reached the rule as follows; On the 1st day, I subtracted 9 from 8 and found -1. I wrote 9 because it increases by 9 every day.	$(n \cdot 9) - 1$ $n = \text{hangi gün aldığın}$																								
S8: He put 8€ into his money box on the 1st day and 17€ on the 2nd day. In other words, the amount of money increased by 9€ every day. To get to the first term, I write -1 here (indicating the $n \cdot 9 - 1$ rule). I write 7 here (indicating n) because the 7th day is asked. It becomes $9 \times 7 = 63$. $63 - 1 = 62$.	$n \cdot 9 - 1$ 62 TL																								
S7: First of all, I tried to create a rule. I thought about how I could get 3 with subtraction from 8. But it would all be the same. I couldn't find the rule. Then I made it by counting. It became 8 on the 1st day, 17 on the 2nd day, 26 on the 3rd day, 35 on the 4th day, 44 on the 5th day, 53 on the 6th day, and 62 on the 7th day.	<table border="1"> <tr> <td>Günler</td> <td>1.gün</td> <td>2.gün</td> <td>3.gün</td> <td>4.gün</td> <td>5.gün</td> <td>6.gün</td> <td>7.gün</td> </tr> <tr> <td>Kural</td> <td>$7n+3$</td> <td>$2n+12$</td> <td>$3n+21$</td> <td>$7n+57$</td> <td>$3n+1$</td> <td>$\frac{2}{8}$</td> <td>$\frac{3}{19}$</td> </tr> <tr> <td>Kumbaraya atılan para miktarı (TL)</td> <td>8</td> <td>17</td> <td>26</td> <td>62</td> <td>$\frac{2}{8}$</td> <td>$\frac{3}{19}$</td> <td>$\frac{4}{25}$</td> </tr> </table>	Günler	1.gün	2.gün	3.gün	4.gün	5.gün	6.gün	7.gün	Kural	$7n+3$	$2n+12$	$3n+21$	$7n+57$	$3n+1$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{19}$	Kumbaraya atılan para miktarı (TL)	8	17	26	62	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{19}$	$\frac{4}{25}$
Günler	1.gün	2.gün	3.gün	4.gün	5.gün	6.gün	7.gün																		
Kural	$7n+3$	$2n+12$	$3n+21$	$7n+57$	$3n+1$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{19}$																		
Kumbaraya atılan para miktarı (TL)	8	17	26	62	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{19}$	$\frac{4}{25}$																		

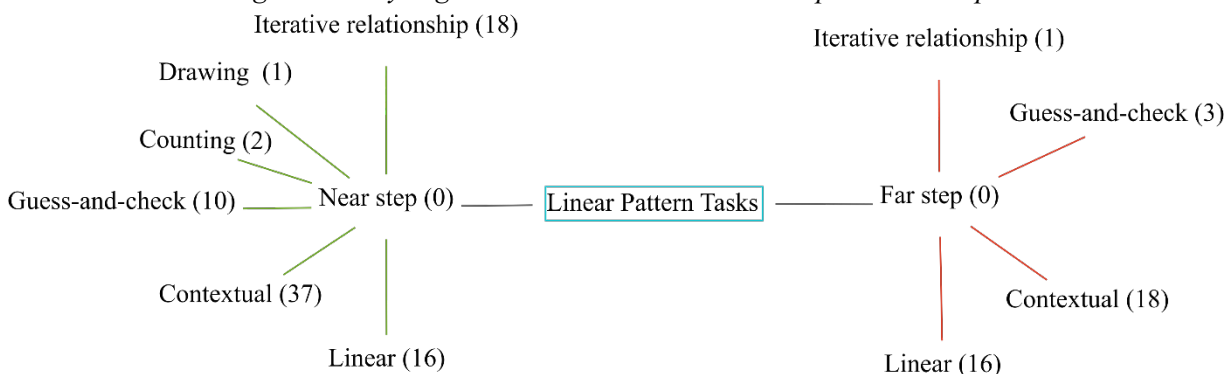
Evaluating Table 8, it was determined that after identifying the increase amount (+9), S6 and S8 determined the constant according to the first term, produced the $9n - 1$ functional rule, and thus successfully applied the "linear" generalization strategy. In contrast, S7 gave up after failing the attempt to find a formal rule and returned to the "counting" strategy by rhythmically carrying the terms forward. In the far-step (100th day) process of the same problem, S6 and S8 maintained the linear strategy by successfully operating the $9n - 1$ rule they created ($30 \times 9 = 270$, $270 - 1 = 269$ TL). S7, who used the "counting" strategy in the near step, realized the difficulty of counting in the far step and changed strategies; attempting the "whole-object" strategy by saying, "the money put in the piggy bank increased by 9s every day. Then I multiply 30 by 9." However, because they did not relate the increase amount to the initial constant, they reached an erroneous result.

Findings Regarding the Generalization Strategies of 8th Grade Students

The approaches of eighth-grade students to tasks in linear patterns are summarized in Figure 6.

Figure 6

Generalization Strategies Used by Eighth-Grade Students in Near Step and Far Step Tasks in Linear Patterns



Examining Figure 6, it was determined that 8th-grade students most frequently preferred the "contextual" ($n=37$) strategy in near-step tasks; followed by recursive ($n=18$), linear ($n=16$), guess and check ($n=10$), counting ($n=2$), and drawing ($n=1$) strategies. In far-step tasks, the spectrum narrowed, and students concentrated on higher-level strategies, namely contextual ($n=18$) and linear ($n=16$) strategies; apart from this, guess and check ($n=3$) and recursive ($n=1$) strategies were used to a very limited extent. The complete

abandonment of counting and drawing strategies, especially in the far step, can be evaluated as a reflection of cognitive development.

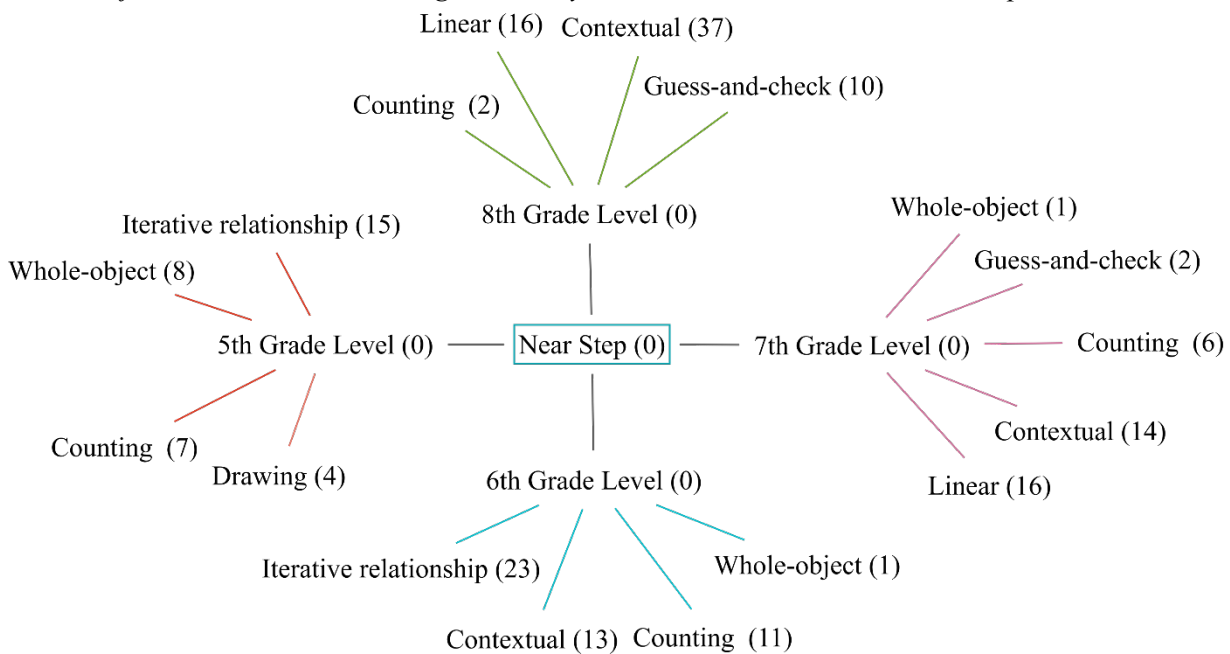
The responses given to the "pine tree" (shape pattern) task at this grade level serve as excellent examples of how the strategies are executed. For the near step, S9 attempted to create a function through trial and error; exhibiting the "guess and check" strategy with the statements, "In the 1st step 5, in the 2nd step 8... It becomes $3x+5$. $3 \times 1 = 3$, $3+5=8$ it didn't work... Then it becomes $3x+2$... $7 \times 3 = 21$ and $21+2=22$ (calculation error)." For the same task, S10 established the algebraic relationship directly starting from the increase amount; successfully utilizing the "linear" strategy by stating, "The matches increased by 3s. For the 1st step, $3 \times 1 = 3$, but there are 5 in the 1st step. So I say +2. The rule of the pattern must be $3x+2$." In the far-step task (100th step), S9 exhibited the "contextual" strategy by using the internal features of the context without using a formal letter expression, explaining, "In the 100th step, there will be 100 triangles and 2 extras. $100 \times 3 = 300$, $300+2=302$." S10 preserved their consistency in the linear generalization strategy by directly operating the formula they obtained ($3 \times 100 = 300$, $300+2=302$)

Comparison of Near-Step and Far-Step Generalization Strategies According to Grade Levels

The strategy preferences of the middle school students participating in the research in generalization tasks were comparatively addressed across all levels, and the findings regarding the near step are presented in Figure 7.

Figure 7

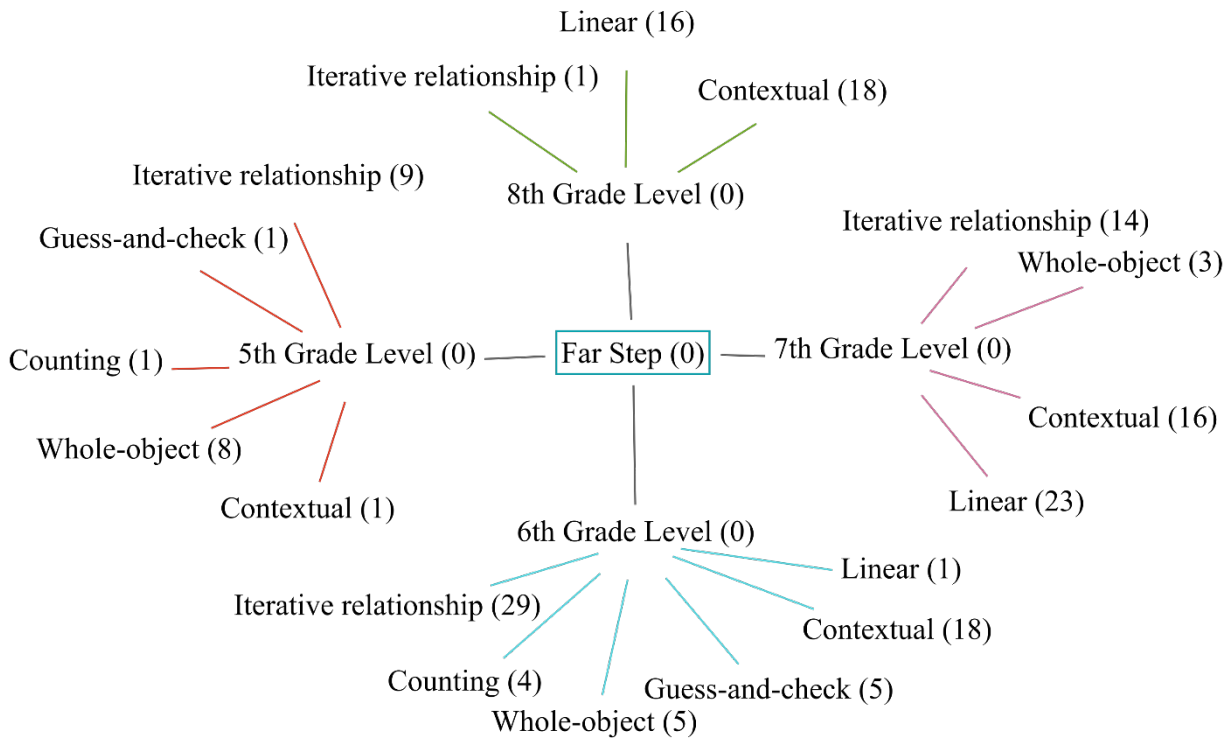
Schemes of the Generalization Strategies Used by Middle School Students in Near Step Pattern Tasks



Although there is generally a strategic parallelism in students' processes of finding the near step, qualitative differences stand out in the context of grade levels. When the data are examined, it was determined that students in the 6th, 7th, and 8th grades, unlike 5th-grade students, included the "contextual" strategy, which requires more mature reasoning, into the process, while gradually abandoning the "drawing" strategy, which is a primitive method. In particular, it is seen that 7th and 8th-grade students exhibit a strong commonality in linear, contextual, counting, and guess and check strategies. The fact that these upper grades (7 and 8) employ "linear" and "guess and check" strategies much more effectively compared to lower grades (5 and 6) is a sign of algebraic maturation linked to age and learning outcomes. The comparative situations of the students in far-step tasks are visualized in Figure 8.

Figure 8

Schemes of the Generalization Strategies Used by Middle School Students in Far Step Pattern Tasks



When the far-step findings are examined in general terms, it is understood that recursive relationship and contextual generalization strategies have a widespread base across all middle school levels. However, looking deeper, the virtually non-existent use of the "contextual" strategy ($n=1$) in 5th grades and the widespread adoption of this strategy in upper grades is a significant difference. Similarly, it was clearly determined that the "linear" generalization strategy, considered the peak of algebraic thinking, was never seen in 5th grades; was used by only one student ($n=1$) in 6th grades, but made a massive leap in 7th ($n=23$) and 8th ($n=16$) grades where equation outcomes are heavily included in the curriculum. In conclusion, while major scatterings in strategy diversity and primitive methods (counting, etc.) are observed in lower grades in far-step tasks, it was concluded that 7th and 8th grades clustered much more compactly around "linear" and "contextual" strategies, which have strong mathematical rigor.

DISCUSSION, CONCLUSION, AND RECOMMENDATIONS

In this research, the generalization strategies used by middle school students in the context of linear patterns were examined in depth across grade levels. The obtained findings reveal that students' strategy preferences exhibit a distinct developmental difference depending on the grade level. It was observed that students in the fifth and sixth grades predominantly preferred primitive strategies based on counting, drawing, and recursive thinking when modeling patterns; while they leaned more towards guess and check and contextual strategies in far-step tasks. This situation bears a strong parallelism with Radford's (2014) theoretical approach, which posits that algebraic thinking and the concept of variables take shape within a sequential developmental process over time. The fact that students experience difficulties in converting arithmetic and verbal expressions into formal algebraic symbols when generalizing, despite being able to use them, indicates that the transition to symbolic representations in the mathematical thinking process must be supported by structured instruction (Blanton et al., 2015). These symbolization obstacles observed in lower grades can also be explained by Lannin's (2005) distinction between explicit and non-explicit strategies. Students initially progress through concrete means by counting pattern steps one by one or drawing; the transition to rule-based explicit strategies only matures with formal instruction. In particular, the attempts of 6th-grade students to solve shape patterns by directly converting them into number patterns overlap with the findings of Tanışlı and Özdaş (2009) that transition skills between pattern representations should be reinforced through instruction. Similarly, Warren, Cooper, and Lamb's (2006) definition of the development in students' generalization capacities as a "gradual process moving from simple repetitions to a rule, and from there to symbolic expression" theoretically supports the results of the current research.

Another striking finding of the research is that seventh-grade students focus directly on finding a rule and producing a formula without deeply analyzing the contextual and formal structure of the pattern during the generalization process. This tendency is directly related to the critical emphasis expressed by Stephens et al. (2007) that "early algebraic thinking should not be detached from mathematical structures and relationships." These students, aiming to reach a quick result mostly with an arithmetic and operational reflex, show less flexibility in trying different solution paths; this situation weakens the conceptual infrastructure of the algebraic generalization process. However, the fact that some students, albeit few, can develop structural-based and flexible solution paths by considering the formal structure of the patterns clearly demonstrates the need for practices that nourish strategy diversity and support multiple representations in mathematics instruction environments (Smith, 2003).

The fact that eighth-grade students predominantly lean towards linear generalization strategies when solving problems and are more successful in establishing functional relationships confirms that algebraic thinking ability develops alongside grade level and cognitive maturity. Longitudinal studies conducted by Carraher, Schliemann, and Brizuela (2000) similarly demonstrated that students' transitions from arithmetic thinking to symbolic thinking can be made permanent over time and through qualified instruction. The much more systematic, intensive, and abstract treatment of equations and algebraic expressions in the 8th-grade mathematics curriculum in Turkey (MoNE, 2018) can be evaluated as a fundamental pedagogical element directly contributing to the success of students at this level in linear strategies.

In the literature, Blanton and Kaput's (2004) fundamental argument that early algebraic thinking should rely on making sense of mathematical structures and relationships, rather than mere rule memorization, overlaps strongly with the findings of this study. Indeed, current research conducted by Blanton et al. (2015) has clearly demonstrated that through pattern-based instructional processes, students can successfully generalize quantitative relationships, develop logical explanations based on functional thinking, and increase their competencies in expressing these relationships with symbols. The finding by Stephens et al. (2017), as a result of their teaching experiments at early grade levels, that students gained the ability to express the generalizations they reached both verbally and symbolically, provides significant theoretical evidence that the difficulties identified for lower grades in this study can be overcome with correct instructional interventions.

In line with all these findings obtained from the research, it is recommended that pattern-based instruction in middle school mathematics classrooms should not be reduced merely to procedural knowledge and rule finding; instead, it should center on skills of building relationships, symbolization, and developing strategies based on cognitive flexibility. Rich instructional environments that offer students the opportunity to explore different mathematical representation forms and construct their own authentic strategies will directly contribute to building algebraic thinking upon solid foundations. In this context, it is of great importance that teachers avoid presenting pattern tasks merely as routine problems aimed at reaching the correct answer; conversely, they should transform these tasks into interactive discussion environments that reveal the student's cognitive processes and conceptual misconceptions. Integrating algebraic thinking into the curriculum from elementary school years with an early algebra perspective will permanently develop the abstraction skills students will need in future years. Therefore, it is essential to give wider coverage to early algebra teaching pedagogy in teacher preparation and in-service training programs, and to increase professional development opportunities for teachers to structure this process.

While the current study offers significant contributions to the literature, it has certain limitations. The primary limitation of the study is that the examined generalization strategies were evaluated only over specific linear number and shape patterns. For future research, it is recommended to use longitudinal research designs that monitor students' strategy development processes in detail over time. Furthermore, examining strategy selections regarding different pattern types (quadratic patterns, repeating patterns, etc.) and investigating the impact of teacher interventions on students' generalization skills using experimental designs will enrich the literature. Finally, the transfer effect of pattern-based algebraic thinking skills on students' performances in other mathematical areas, such as problem-solving or geometric reasoning, can also be examined in depth.

REFERENCES

- Becker, J. R., & Rivera, F. (2006). Sixth graders' figural and numerical strategies for generalizing patterns in algebra (1). In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Saiz, & A. Mendez (Eds.), *Proceeding of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 95-101). Universidad Pedagógica Nacional.
- Blanton, M., & Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. In M. Jonsen Hoines & A. Hoines (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 135-142). Bergen University College.
- Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Gardiner, A., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in six-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(5), 511–558. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.46.5.0511>
- Blanton, M., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3–5*. NCTM.
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. L. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 235-272). Lawrence Erlbaum Associates.
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Brizuela, B. M. (2000). Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions. In M. L. Fernández (Ed.), *Proceedings of the 22nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 421–426). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.
- Common Core State Standards Initiative. (2010). Common core state standards for mathematics. Retrieved from: <http://www.corestandards.org/Math/>
- Driscoll, M. (1999). *Fostering algebraic thinking: A guide for teachers grades 6-10*. Heinemann.
- Gowers, T., Barrow-Green, J., Leader, I. (Eds.). (2008). *The Princeton companion to mathematics*. Princeton University Press.
- Greenes, C., Cavanagh, M., Dacey, L., Findell, C., & Small, M. (2001). *Navigating through algebra in prekindergarten-grade 2*. NCTM.
- Hawthorne, C. (2016). *Teachers' understanding of algebraic generalization* (Doctoral dissertation). University of California, San Diego.
- Krebs, A. S. (2005). Take time for action: studying student's reasoning in writing generalizations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 10(6), 284-287. <https://doi.org/10.5951/MTMS.10.6.0284>
- Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Routledge.
- Lannin, J. (2005). Generalization and justification the challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(3), 231–258. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0703_3
- Lee, K., & Karmiloff-Smith, A. (1996). The development of external symbol systems: The child as a notator. In R. Gelman & T. Kit-Fong Au (Eds.), *Perceptual and cognitive development: Handbook of perception and cognition* (pp. 185–211). Academic Press.
- Lee, L., & Freiman, V. (2004). Tracking primary students' understanding of patterns. Paper presented at the Annual Meeting-Psychology of Mathematics & Education of North America. Toronto, Canada.

- Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 57–94). Lawrence Erlbaum Associates & National Council of Teachers of Mathematics.
- Merriam, S. B. (1998). *Qualitative research and case studies applications in education*. Jossey-Bass.
- Milli Eğitim Bakanlığı. (2018). Matematik dersi öğretim programı (İlkokul ve ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. Sınıflar). Talim Terbiye Kurul Başkanlığı.
- Milli Eğitim Bakanlığı. (2024). *Ortaokul matematik dersi öğretim programı (5-8. sınıflar)*. Ankara: MEB Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.
- Olkun, S., & Toluk, Z. (2004). *İlköğretimde etkinlik temelli matematik öğretimi [Activity-based mathematics teaching in primary education]*. Ankara: Anı Yayıncılık.
- Otte, M. F., Mendonça, T. M., Gonzaga, L., & de Barros, L. (2015). Generalizing is necessary or even unavoidable. *PNA*, 9(3), 143-164. <https://doi.org/10.30827/PNA.V9I3.6101>
- Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of pattern: a semiotic perspective. In *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 2-21). Universidad Pedagógica Nacional.
- Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of pattern: a semiotic perspective. In *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 2-21). Universidad Pedagógica Nacional, Mérida, Mexico.
- Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26, 257–277. <https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2>
- Rittle-Johnson, B., & Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other?. *Journal of Educational Psychology*, 91(1), 175. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.91.1.175>
- Şen, C. & Güler, G. (2022). *Cebir uygulamaları ile ilkokul ve ortaokulda cebir öğretimi*. Vizetek Yayıncılık.
- Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *The Journal of Mathematical Behavior*, 14(1), 15-39. [https://doi.org/10.1016/0732-3123\(95\)90022-5](https://doi.org/10.1016/0732-3123(95)90022-5)
- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20(2), 147–164. <https://doi.org/10.1007/BF00579460>
- Stake, R. E. (2005). Qualitative case studies. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Ed.), *The Sage handbook of qualitative research* (pp. 443-466). Sage Publications.
- Stephens, A. C., Fonger, N., Strachota, S., Isler, I., Blanton, M., Knuth, E., & Murphy Gardiner, A. (2017). A learning progression for elementary students' functional thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 19(3), 143-166. <https://doi.org/10.1080/10986065.2017.1328636>
- Tanişlı, D., & Özdaş, A. (2009). The strategies of using the generalizing patterns of the primary school 5th grade students. *Educational Sciences: Theory and Practice*, 9(3), 1485-1497.
- Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford, (Ed.). *The ideas of algebra, K-12.1988 yearbook* (pp. 8-19). National Council of Teachers of Mathematics.

Van de Walle, J., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2010). *Elementary and middle school mathematics* (8th ed.). Allyn & Bacon.

Warren, E., & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 67(2), 171-185. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9092-2>

Yin, R. K. (2003). *Applications of case study research*. Sage Publishing.