

Matematik Ders Kitabı Yazarlarının İspat Algılarının ve İspatın Okul Matematiğindeki Yerine İlişkin Görüşlerinin İncelenmesi

Examining Mathematics Textbook Authors' Perceptions of Proof and Their Views on the Place of Proof in School Mathematics

Betül Korkmaz Karafilik¹, Sevgi Esen², Ebru Aylar Çankaya^{*3}

Öz

Bu çalışmada, 1 - 8. sınıflar Matematik Dersi Öğretim Programı (2018) kullanılarak yazılan matematik ders kitapları yazarlarının ispat algılarını ve ispatın okul matematiğindeki yerine ilişkin görüşlerini ortaya koymak amaçlanmaktadır. Çalışmanın katılımcıları, 2023 yılında ilkökul ve ortaokul matematik ders kitabı yazarlığı yapan 11 kişiden oluşmaktadır. Veriler, iki bölümden oluşan yarı yapılandırılmış görüşme formu ile toplanmıştır. Görüşme formunun ilk kısmı yazarların demografik özelliklerini belirlemeye yönelik sorulardan oluşmaktadır, ikinci kısmı ise ispat algısı, matematik eğitimi ve ispat, öğretim programı ve ispatla ilgili sorular ile verilen ispat örneğinin değerlendirildiği sorulardan oluşmaktadır. Veriler, içerik analizi yöntemi ile çözümlenmiştir. Çalışmanın sonucunda, yazarlar ispat kavramını ağırlıklı olarak matematik ve bilimsellik ile ilişkilendirerek, parçalı ve uzun tanımlar yapmışlardır. Diğer yandan çalışmada, ispatı matematiği öğrenme ile ilişkilendiren, öğretim programındaki kazanımları ve amaçları ispatla ilişkili bulan yazarlar olmasına rağmen, ders kitabı yazarken ispatı kullanmaya ihtiyaç duyduğunu belirten sadece tek bir yazar olmuştur. Ayrıca, yazarlar görüşme boyunca ispata yönelik değişen, görüşme süreci içerisinde ispat ile öğrenme arasında daha kuvvetli ilişki kuran yanıtlar üretebilmişlerdir. Bu eğilim kitap yazma süreçlerinde ispat becerisinin gelişimine yönelik bir perspektifi taşımadıklarına işaret etmektedir.

Anahtar Kelimeler: akıl yürütme, ispat, ders kitabı, yazar, öğretim programı.

Abstract

This study aims to reveal the perceptions of proof and the views of the authors of mathematics textbooks written using the 1st - 8th grade Mathematics Curriculum (2018) regarding the place of proof in school mathematics. The study comprised 11 authors of 2023 primary and secondary mathematics textbooks. The data were collected with a semi-structured interview form consisting of two parts. The first part of the interview form consists of questions aimed at determining the demographic characteristics of the authors, while the second part consists of questions regarding the perception of proof, mathematics education and proof, the curriculum and proof, and questions evaluating the given proof example. The data were analyzed with the content analysis method. Consequently the study, the authors made fragmented and long definitions by associating the concept of proof mainly with mathematics and scientific knowledge. While many authors linked proof to math learning and curriculum goals, only one used it when writing a textbook. In addition, the authors' answers about proof evolved during the interview, showing a stronger link between proof and learning. This tendency indicates that they didn't carry a perspective on the development of proof skills in the book writing process.

Keywords: reasoning, proof, textbook, author, curriculum.

Başvuru tarihi: 18/04/2025 | **Kabul tarihi:** 16/09/2025

Araştırma Makalesi / Research Article

Önerilen atıf: Korkmaz Karafilik, B., Esen, S., & Aylar Çankaya, E. (2025). Matematik ders kitabı yazarlarının ispat algılarının ve ispatın okul matematiğindeki yerine ilişkin görüşlerinin incelenmesi. *Manisa Celal Bayar Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 13(2), 604-636. <https://doi.org/10.52826/mcbuefd.1679157>

***Sorumlu yazar:** eaylar@ankara.edu.tr

Not: Bu makale 20-23 Eylül 2023 tarihlerinde Ankara Üniversitesi'nin ev sahipliğinde düzenlenen EDUCongress'te sunulan bir bildirinin genişletilmiş versiyonudur.

^{*3}Sorumlu yazar:  Temel Eğitim Bölümü, Ankara Üniversitesi, Ankara, Türkiye

¹  Milli Eğitim Bakanlığı, Ankara, Türkiye

²  Milli Eğitim Bakanlığı, Urfa, Türkiye

Matematik Ders Kitabı Yazarlarının İspat Algılarının ve İspatın Okul Matematikindeki Yerine İlişkin Görüşlerinin İncelenmesi

Giriş

Her çağın kendine özgü zorlukları bulunur. Çağlar boyu insanlar karşılaştıkları zorlukların çözümü için doğru bilgiye erişmeye gayret etmişlerdir. Bilgiye ulaşmanın ve sorunları çözmenin farklı yolları bulunmaktadır. Bu yollardan biri, deneme yanılma yöntemiyle bilginin doğruluğunu tespit etmektir. Yaşamımız boyunca birçok şeyin doğruluğunu deneyimlerimize dayanarak veririz. Ancak matematikte deneyimler tek başına bilginin kesin doğruluğu için yeterli değildir (Moralı vd., 2006). Matematikçiler, karşılaştıkları sorunları matematiksel yöntemlerle çözmek için çaba sarf ederler (Nasibov ve Kaçar, 2005). Matematikçilere göre özgün bir düşünme yöntemi olan matematik bizi kesin bilgiye ve doğruya götürür (Baki, 2020). Bir ifadenin doğruluğunu matematik alanında kanıtlamak, sonsuz sayıda olsa bile tüm durumları değerlendirerek, mantık ve muhakemeyi kullanarak bütün olası durumlar için bir ifadenin doğruluğunu göstermektir. Aynı zamanda bir ifadenin yanlış olduğunu kanıtlamak için de doğruluğu iddia edilen ifadeyi sağlamayan en az bir örnek sunulmalıdır (Dituri, 2013).

Kelime anlamı olarak ispat, bir gerçeğin veya bir iddianın doğruluğunu gösterme ve geçerliliğini veya doğruluğunu sınama süreci olarak ifade edilebilir (Oxford American Dictionary, 2004). Türk Dil Kurumu [TDK] sözlüğüne göre ise ispat, bir şeyin gerçek yönünü tanııt ve kanıt göstererek ortaya çıkarma, kanıtlama veya tanıtlama olarak tanımlanmaktadır (TDK, 2020).

Literatürde matematiksel ispat için matematik eğitimcileri tarafından yapılan farklı tanımlar yer almaktadır. Balacheff (1988), ispatı daha önce doğruluğu kanıtlanmış iddialara dayalı olarak, dikkatle seçilmiş ve mantıksal olarak inşa edilmiş adımlar serisi şeklinde tanımlar. Weber (2005) ise ispatı, bir kişi tarafından sunulan varsayımlar, tanımlar ve aksiyomlar gibi önemli bilgilerin kullanıldığı matematiksel bir çalışma olarak tanımlar. Ayrıca ispat ile önceki teoremler ve kabul edilen gerçekler yoluyla türetilen çıkarımsal kuralların uygulanmasıyla istenilen sonuçların elde edildiğini belirtir. Diğer taraftan Harel ve Sowder (2007), matematiksel ispatı insanlar tarafından yapılan zihinsel bir aktivite olarak tanımlar ve bu aktivitenin bir iddianın doğruluğu hakkındaki şüpheleri ortadan kaldırmak için kullanıldığını belirtir. Baki (2008) ise matematiksel ispatı bir süreç olarak tanımlar ve bu süreci doğrulama, açıklama ve soyutlama şeklinde üç aşamada açıklar. Kısaca ispat, kabul edilebilir bir kanıt sunarak bir yargı veya savın doğruluğunu veya yanlışlığını belirleme çabasıdır (Yıldırım, 2000).

Harel ve Sowder (1998) öğrencilerin ispat yaparken ki düşünme süreçlerini analiz etmişlerdir ve ispat şeması kavramını ortaya çıkarmışlardır. Ayrıca bu kavramı, bir iddianın aslını anlama ve başkalarını bu iddiaya ikna etme sürecini kapsayan düşünsel bir süreç olarak tanımlamışlardır. İspat şemaları, matematiksel ifadelerin doğruluğunu veya yanlışlığını belirleme sürecinde kullanılan düşünme biçimleridir; bu süreçte bireyler, kendilerini veya başkalarını ikna etmek, açıklamak ve ispatlamak için çeşitli yöntemler kullanırlar (Aydoğdu İskenderoğlu, 2016). Kısaca bir kişinin ispatı değerlendirme şekillerini ve ispatlama metotlarını belirlemenin bir yolu ispat şemalarıdır.

Van Dormolen (1977), öğrencilere üç problem sunarak onların bu problemlere verdikleri cevapları, onların düşünme biçimlerini dikkate alarak incelemiş ve öğrencilerin ispata yönelik geliştirdiği

üç farklı düşünme kategorisi elde etmiştir. Balacheff (1991) ise bu yapıyı daha kapsamlı bir biçime getirerek pragmatik ispatlar, kavramsal ispatlar ve gösterme olmak üzere üç ispat düzeyinden bahsetmiştir. Pragmatik ispatlarda istenilen sonuç ya da kural örneklerle dayalı olarak doğrulanır. Bu seviye kullanılan örneklerle bağlı olarak kendi içinde üç kategoriye ayrılır. Bunlar, saf deneysellik, kritik deney ve genelleyici örnektir (Sarı Uzun, 2020). Saf deneysellik kavramı, bir ifadenin doğruluğunu çeşitli örneklerle test etmeye dayanır. Kritik deney kavramı, genel durumu belli örnekler üzerinden temsil etme fikrine dayanırken, genelleyici örnek kavramı ise tüm durumları temsil edebilecek özel bir örnek seçme fikrini ifade eder (Balacheff, 1988). Kavramsal ispatlar, pragmatik ispatlara göre daha soyuttur. Bu düzey düşünce deneyi kategorisini içine almaktadır. Düşünce deneyi kategorisinde, örneklerden değil, matematiksel kavramlar, çıkarımlar ve teoremler kullanılarak ispattaki işlemler ve temel ilişkiler kullanılır. Balacheff'in ispat şemasının en ileri düzeyi gösterme seviyesidir. Bu seviyede bilgi; mantıksal kurallar, tanımlar ve teoremleri içine alan bir teori çerçevesi içerisinde düzenlenmektedir (Sarı Uzun, 2020). Öğrencilerin farklı şemalar kullanabilmeleri için erken yaşta ispat yapmaya başlamaları gerekmektedir. Bu sayede matematiksel savunma yapabilen, sorgulayabilen, akıl yürütme ve muhakeme becerilerini kullanabilen öğrenciler yetiştirilebilir.

İspat ve öğrenme

Matematiksel ispatlar, bir önermenin doğruluğunu çeşitli gerekçelerle göstermek, başka kişileri bu gösterime dair bilgilendirmek ve ikna etmek, elde edilen ürünü bir sistem içinde sunmak üzere yapıldığı için (Hanna, 1991) matematik eğitiminin öğrenme hedeflerine ulaşılmasında önemli bir rol oynar. Aynı zamanda ispat, bir ifadenin doğruluğunu veya yanlışlığını göstermekten öte, çeşitli roller ve işlevler de üstlenir (Kaplan vd., 2016). İspatın temel rolleri ve işlevleri, yaygın olarak literatürde doğrulama, açıklama, keşfetme, iletişim, sistematikleştirme ve araştırma olarak tanımlanmakta olup bu rollerin arasından en çok öne çıkanı doğrulamadır (Uğurel, 2020). Bell (1976) doğrulamanın bir iddianın doğru olduğunu savunmak, açıklamanın da bir önermenin neden doğru veya yanlış olduğunu belirtmek olduğunu ifade etmiştir. Doğrulama, ispatın en bilinen işlevi olmasına rağmen eğitim açısından daha kritik olan, kavramları anlama sürecini kolaylaştıran açıklama işlevidir. Bazı matematik eğitimcileri, okul matematiğinde ispatın birincil amacının açıklama işlevi olduğunu da savunurlar (Knuth, 2002a). İspatın bir diğer önemli rolü de keşfetmedir. Bireyin doğmasıyla başlayan keşfetme ve araştırma duygusu, neden ve niçin gibi sorulara yönelik cevaplar arama eğilimini ifade eder. İspatlar aracılığıyla yeni yolların keşfedilmesi, bilgi ve anlayışın derinleştirilmesini sağlar (Uğurel, 2020). Bu bağlamda ispatın işlevlerinin de öğrenme üzerinde etkili olduğu söylenebilir.

Herbst (2002)'e göre, ispat yapmanın matematikteki kavramları ve terimleri açıklama ve özelliklerini ortaya çıkarma üzerinde önemli bir etkisi vardır. İspat matematik eğitimde, ezberden uzak kalarak, kavramsal bilginin oluşturulması ile anlamlı bir öğrenme sağlanması için matematiksel bilgiyi anlamının temel unsurlarından biridir (Aylar, 2014). Aynı şekilde, okul matematiğinde matematiksel kavramların ve terimlerin temellendirilerek anlatılması, öğrencilerin matematiği anlamalarına yardımcı olur. İspatlar, öğrencilere matematiksel düşünme yeteneklerini geliştirme, problem çözme becerilerini artırma ve matematik kavramlarını daha derinlemesine anlama fırsatı verir. Bu sebeple ispat matematik öğrenmede önemli bir araçtır (Knuth, 2002). İspatın sadece lise ve sonrası seviyelerinde anlamlı öğrenme

sağlayabileceği düşüncesi, Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (National Council of Teachers of Mathematics- [NCTM])’nin 2000 yılındaki "okul matematiği ilkeleri ve standartları" raporuyla önemli ölçüde değişmiştir (Cooper vd., 2011; Fawcett, 1995). Günümüzde, ispatın matematiksel akıl yürütmeyle birlikte ele alındığı ve her seviyedeki öğrencilerin öğrenmesi gereken önemli bir kavram olarak kabul edildiği gözlemlenmektedir (Common Core State Standards Initiative (CCSSI), 2010; Hanna, 2018; NCTM, 2000; Stylianides vd., 2017). NCTM (2000), tüm konularda ispatın sınıf tartışmalarının doğal bir parçası olması gerektiğini vurgulayarak öğretim programlarına entegre edilmesi gerektiğini belirtmiştir. Ayrıca yapılan çalışmalarda da ispatın matematik eğitiminde öneminin arttığı ve ispat konusunun müfredata dâhil edilmesi için genel bir eğilim olduğu ortaya konulmuştur (Mariotti, 2006). TIMSS gibi uluslararası sınavların ve NCTM’in matematiksel akıl yürütme ve ispat konularına verdikleri önem göz önüne alındığında, Türkiye’de de bu konuların benzer bir öneme sahip olması beklenir (Doğan, 2019).

Türkiye’de öğretim sürecinde ispatın yeri

Günümüzde ilkokul 3-4, ortaokul 7-8. sınıflarda uygulanan Millî Eğitim Bakanlığı (MEB) 2018 1-8. sınıflar matematik dersi öğretim programına bakıldığında ispat kavramının programda doğrudan yer almadığı görülmektedir. Fakat programın özel amaçları incelendiğinde akıl yürütme ile ispatın ilişkilendirilerek, ispatın programda dolaylı olarak yer aldığı görülmektedir. *“Problem çözme sürecinde kendi düşünce ve akıl yürütmelerini rahatlıkla ifade edebilecek, başkalarının matematiksel akıl yürütmelerindeki eksiklikleri veya boşlukları görebilecektir [3]”, “Matematiksel düşüncelerini mantıklı bir şekilde açıklamak ve paylaşmak için matematiksel terminolojiyi ve dili doğru kullanabilecektir [4]”* ilgili özel amaçlar olarak ele alınabilir (MEB, 2018). Bu ifadeler ispat kavramı ile dolaylı bir şekilde ilişkilendirilebilir. Ele alınan bu öğretim programında ispatın yeterince öne çıkarılmaması önemli bir eksiklik olarak görülmelidir.

2024 – 2025 eğitim öğretim yılında 1, 5 ve 9. sınıflarda uygulanmaya başlanan ortaokul matematik dersi öğretim programında ise matematiksel muhakeme becerisi tanımı şu şekildedir (MEB, 2024a):

“Matematiksel muhakeme becerisi; çözümleme, yorumlama, çıkarım yapma, matematiksel doğrulama ve/veya ispat yapma şeklinde dört ana beceriden ve bunların süreç bileşenlerinden oluşmaktadır.”

Tanımda da görüldüğü üzere ispat kavramına 2018 programının aksine bu programda bir beceri olarak yer verilmiştir. Tematik bir yaklaşımın benimsendiği bu programda “İşlemlerle Cebirsel Düşünme”, “Geometrik Şekiller”, “Sayılarla Nicelikler” gibi temalarda 5. sınıftan itibaren ispat yapma becerisinin yer aldığı görülmektedir (MEB, 2024a). Ayrıca 2024 ortaokul matematik dersi öğretim programında “MAT.7.2.3. Sayılar ve özelliklerini içeren ispatlara ilişkin matematiksel muhakeme yapabilme” gibi ispatla ilgili öğrenme çıktılarının da doğrudan yer aldığı görülmektedir (MEB, 2024a). İlkokul matematik eğitimi programında (MEB, 2024b) ortaokul programına göre ispata daha sınırlı yer verilmiştir. Programda ispat kavramı yer almazken, matematiksel muhakeme, sadece çözümleme ve yorumlama becerileri ile ele alınmıştır. Lise matematik dersi öğretim programı (MEB, 2024c) ise bu üç kademe içerisinde ispat kavramının en sık yer aldığı, matematiksel muhakeme becerinin yoğunluğunun diğer kademelere oranla arttığı program olmuştur. Bu programda ispat yöntemlerinin öğretilmesinin yerine, öğrencilerin kendi deneyimleri ile özellikle doğrudan ispat ve aksine örnek verme yöntemlerine dair deneyimlerinin geliştirilmesi hedeflenmiştir. İspat yapma becerisinin yenilenen öğretim programlarında önceki programa

göre önemsendiği ve daha yoğun bir içerikte ele alındığı görülmektedir. Bu çalışmanın katılımcıları 2018 matematik öğretim programına göre ders kitabı yazdıkları için araştırma yürütülürken 2018 1-8. sınıflar matematik dersi öğretim programı temel alınmıştır.

Ders kitabı, müfredatın belirlediği hedeflere uygun olarak konuların ele alındığı, öğrencilere bilgi, beceri ve alışkanlıkların kazandırıldığı temel bir kaynaktır (Demirel ve Kiroğlu, 2021). Kitapların öğretimdeki rollerini etkili ve eksiksiz şekilde yerine getirebilmesi için hem biçimsel hem de içeriksel olarak gerekli niteliklere sahip olması gerekmektedir (Alkan, 1998). Matematiksel akıl yürütme ve ispatla ilgili uygulamaların sınıf içinde nasıl gerçekleştirileceği önemlidir ve bunun için en temel kaynaklardan biri ders kitaplarıdır (Doğan, 2019). Ders kitapları hem öğretmenler hem de öğrenciler için birincil kaynaklar olup eğitim-öğretimde önemli bir yere sahiptir (Dituri, 2013). 2018 öğretim programının becerilere yönelik vurgu açısından yeterli olmadığı çeşitli çalışmalarla ortaya konga da (Pınar ve Ocak, 2025; Şengül vd., 2021) 2018 programı “... üst bilişsel becerilerin kullanımına yönlendiren, anlamlı ve kalıcı öğrenmeyi sağlayan, sağlam ve önceki öğrenmelerle ilişkilendirilmiş, diğer disiplinlerle ve günlük hayatla değerler, beceriler ve yetkinlikler çevresinde bütünleşmiş bir öğretim programları toplamı” oluşturulması hedefiyle geliştirilmiştir (MEB, 2018). İçerikte eksiklikler olsa da 2018 programında beceri vurgusu sınırlı da olsa yer almaktadır. Matematiksel becerilerin programda ne düzeyde yer aldığından bağımsız olarak, becerilerin öğretim sürecine yansıtılmasına yönelik tartışmalar yakın dönemde yoğunluk kazanmıştır. İspat becerisi özelinde düşünüldüğünde, Thompson vd., (2012) eğer ders kitapları öğrencilere yeterli düzeyde akıl yürütme ve ispat yapma olanağı sunmazsa, ispatın öğretim sürecine dahil edilmesinin çok mümkün olmadığını belirtmişlerdir. Ders kitapları ve hatta programda becerilerin ele alınış düzeylerinde eksikliklerin bulunduğu durumlarda, öğretmenlerin program ve kitaplardan bağımsız hareket etmeleri, derslerini beceriler açısından zenginleştiren ek materyaller kullanmaları önerilebilmektedir. Örneğin Dituri (2013) gerçekleştirdiği çalışmanın sonucunda ders kitabı materyalleri akıl yürütme ve ispat süreçlerini içermiyorsa, öğretmenlerin bu ders kitaplarından ve ilgili öğretim programından sapmalarının gerekebileceğine değinmiştir. Ayrıca öğretmenlerin öğretim sürecine bu içeriklerde eklemeler yapmalarının mümkün olduğunu işaret ederken, ders kitaplarının ispata doğrudan yer vermeseler bile bu becerinin gelişimini destekleyecek bir içerikte yazılabileceğine yönelik öneride de bulunmuştur (Dituri, 2013). 2018 matematik öğretim programında ispat sınırlı düzeyde ele alınmış olsa da ders kitaplarına akıl yürütme ve ispat becerisinin nasıl ve ne düzeyde yansıtılabilmiş olduğuna yönelik çalışmalar literatürde mevcuttur.

Şengül ve Kırıl (2023), MEB'in 2021-2022 döneminde EBA'da yayımladığı beşinci ve altıncı sınıf matematik ders kitaplarındaki etkinlikleri ispat ve akıl yürütme becerisi açısından incelemişlerdir. Çalışmalarında, MEB 5. sınıf matematik kitabının yalnızca %21'inin ve MEB 6. sınıf matematik kitabının yalnızca %13'ünün matematiksel akıl yürütme ve ispata yönelik etkinlikler içerdiği, geri kalan etkinliklerin çoğunlukla işlemsel bilgi düzeyinde olduğu belirlenmiştir. Başka bir çalışmada, 5-8. sınıf matematik ders kitaplarındaki etkinlikler Miyazaki'nin ispat düzeylerine göre incelenmiştir (Köğce ve Şahin, 2021). Bu çalışmada kitapta yer alan etkinliklerin tümünün ispat düzeylerinin en düşük düzeyi olan İspat C düzeyinde olduğu bulunmuştur. Bu etkinlikler genellikle basit ispat süreçlerini içermektedir. Tümevarımsal muhakeme gerektiren etkinliklerde, öğrencileri varsayım ve genellemeye yönlendiren yeterli örnek sunulmadığı tespit edilmiştir (Köğce ve Şahin, 2021). Doğan (2019) tarafından yapılan bir diğer çalışmada,

8. sınıf matematik ders kitabındaki etkinliklerinin incelendiği ve değerlendirildiği görülmektedir. Araştırmada, sekizinci sınıf matematik ders kitabında 998 içerik ele alınmış ve bunların sadece %7,7'si ispat etkinliği olarak kodlanmıştır. Bu araştırma güncel ders kitaplarının matematiksel akıl yürütme ve ispata yeterli düzeyde yer vermediğini göstermektedir. Tüm bu araştırmalar öğretim programında sınırlı düzeyde ele alınan bir beceri alanının ders kitaplarına yansıma düzeyinin de sınırına işaret etmektedir. Akıl yürütme ve ispatın uluslararası düzeyde gördüğü önem ve öğrenme üzerindeki olumlu etkisi dikkate alındığında, 2018 öğretim programında ispatın yeterli düzeyde yer almaması önemli bir eksiklik olarak ele alınabilir (Doğan, 2019). Matematik öğretim programında 2024 yılında gerçekleştirilen değişiklikler ile ortaokul programında yer alan öğrenme çıktılarının 2018 programına kıyasla daha ileri düzey bilişsel beceriler gerektirdiği görülmektedir (Cihan ve Doruk, 2024). Ayrıca Cihan ve Doruk (2024)'un 2024 Ortaokul Matematik Öğretim Programı öğrenme çıktıları üzerine gerçekleştirdikleri analiz sonucunda öğrenme çıktılarının, programın çözümleme, yorumlama, çıkarım yapma, matematiksel doğrulama veya ispat yapma becerilerinden oluşan matematiksel muhakeme becerisini geliştirecek düzeyde olduğu sonucuna da ulaşılmıştır. Programda ortaya konan bu gelişimin ders kitaplarından başlayarak öğretim sürecine yansması önemlidir. Bu durum öğretmen ve ders kitabı yazarlarının yeterlikleri gündemini ön plana çıkarmaktadır.

Dalkılıç ve Zeybek Şimşek (2022), öğretmen ve öğretmen adaylarının matematiksel argüman oluşturma ve değerlendirme süreçlerini inceledikleri bir çalışma yapmışlardır. Çalışmalarında katılımcıların kendilerine sunulan matematiksel ifadelerin doğruluğunu değerlendirebildiklerini, çoğunlukla genel bir argüman oluşturabildiklerini ancak bazı durumlarda argüman oluşturmada zorlandıklarını tespit etmişlerdir. Çalışmanın sonucunda argüman oluşturmada zorlanmalarının temel nedenlerinden birinin ispat yöntemlerini bilme ve doğru bir şekilde uygulama konusundaki eksikliklerden kaynaklandığı belirtilmiştir. Demircioğlu ve Tuncay (2018)'ın matematik öğretmeni adayları, matematik öğretmenleri ve akademisyenlerin ispat yeteneklerini araştırmak ve karşılaştırmak amacıyla yaptıkları çalışma, lisansüstü eğitim alan katılımcıların ispat yapma süreçlerinde başarılı olduklarını, diğer katılımcıların ise bu süreçte zorlandıklarını ve ispatlarını tamamlayamadıklarını ortaya koymuştur. Öztürk ve Kaplan (2018), ortaöğretim matematik öğretmenleri ve öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerini inceledikleri çalışmalarında, öğretmen ve öğretmen adaylarının matematiksel notasyonları kullanmada ve ispat yapma sürecinde zorluklar yaşadıklarını ortaya koymuşlardır. Ayrıca çalışmanın sonucunda, katılımcıların ispat yaparken yeterli farkındalığa sahip olmadıklarını ve sorgulama yapmadıklarını ifade etmişlerdir. Tüm bu araştırmalar birlikte değerlendirildiğinde öğretmenlerin ispat yapma becerilerinin yeterli düzeyde olmadığı, onlara derslerinde yardımcı olacak mevcut ders kitaplarında ise akıl yürütme ve ispat becerisi ile ilgili yeterince içerik bulunmadığı söylenebilir.

Öğrencilerin ispat becerilerinin geliştirilmesinde öğretmen yeterliği ve ders kitapları önemli etmenlerdir. Ders kitabı yazarları öğretim programlarını, somut materyaller hâline getiren kişiler olduğundan öğretim programları ve ders kitapları arasında köprü görevi görmektedirler. Bundan dolayı ders kitabı yazarlarının ispat yapma becerileri ve ispat algıları ders kitaplarında ispatın yeri için kritik bir öneme sahiptir. 2024 Matematik öğretim programlarında akıl yürütme ve ispat becerisine daha geniş bir içerikte yer verildiği düşünüldüğünde, yeni ders kitaplarının yazımında ve bu kitapların yazımı için yazarlarının seçiminde akıl yürütme ve ispat ile ilgili verili durumu analiz eden ve ihtiyaçları ortaya koyan

çalışmaların yeni kitap yazım süreçlerini besleyici etkisi olacaktır. Literatür incelendiğinde matematik ders kitabı yazarları ve ispat kavramı ile ilgili çalışmaya rastlanılmadığı söylenilebilir. Matematik ders kitabı yazarlarının ispat anlayışı ve ispatın okul matematiğindeki yeri ile ilgili görüşlerinin ders kitaplarının ispat içeriği üzerinde doğrudan etkili olabileceği düşünülebilir. İspat düşüncesinin gelişiminin erken yaşlardan itibaren gelişiminin önemi ile ilk ve ortaokula yönelik ders kitapları ve öğretim programlarının bu alandaki yetersizlikleri göz önüne alındığında, özellikle bu kademelerde görev alan yazarların yaklaşımının tespiti ve bu alanda belirlenen eksikliklerin giderilmesinin önemli olduğu düşünülmektedir. Bu çalışmada bu bağlam temel alınarak, 1 - 8. sınıflar Matematik Dersi Öğretim Programı (2018) kullanılarak yazılan matematik ders kitapları yazarlarının ispat algılarını ve ispatın okul matematiğindeki yerine ilişkin görüşlerini ortaya koymak amaçlanmaktadır. 2018 programı ve bu programa uyumlu ders kitapları üzerinden gerçekleştirilen bu araştırma yeni öğretim programı kapsamında yazılacak ders kitabı sürecine de önerileriyle katkı sunacaktır.

Yöntem

Bu bölümde araştırma deseni, çalışma grubu, veri toplama araçları, verilerin toplanması ve verilerin analizine yönelik bilgiler bulunmaktadır.

Araştırma deseni

Bu araştırma, matematik ders kitabı yazarlarının ispat algılarını ve ispatın okul matematiğindeki yerine ilişkin görüşlerini belirlemeye yönelik nitel bir araştırmadır. Aynı zamanda bir durum çalışmasıdır. Durum çalışması, belirli bir olayın, ortamın veya bireyin kendi bağlamı içinde derinlemesine incelendiği bir araştırma yöntemidir (Büyüköztürk vd., 2020). Nitel araştırmalar, araştırmacının sürece oldukça aktif katıldığı, gözlem, görüşme ve doküman analizi gibi nitel veri toplama araçlarını kullanarak veri topladığı araştırmalardır. Nitel araştırmalarda olgular kendi doğal ortamlarında olabildiğince eksiksiz ve zengin bir şekilde ortaya çıkarılır (Yıldırım ve Şimşek, 2016).

Çalışma grubu

Katılımcılar 2023 yılında matematik ders kitabı yazarlığı yapan on bir yazardan oluşmaktadır. Çalışmaya Milli Eğitim yayınları ilköğretim ve ortaokul matematik ders kitabı yazarları dahil edilmiştir, özel yayın evlerine ders kitabı yazan yazarlar araştırmaya dâhil edilmemiştir. Katılımcıların isimleri gizlilik esasına dayalı olarak 1. Yazar, 2. Yazar,...,11. Yazar şeklinde kodlanmıştır. Çalışmaya katılan yazarların demografik özellikleri Tablo 1’de sunulmuştur.

Tablo 1. Katılımcılara yönelik bilgiler

Katılımcılar	Cinsiyet	Mesleki deneyim	Yazdığı kitap düzeyi
1.Yazar	Kadın	13 yıl	Ortaokul
2.Yazar	Kadın	22 yıl	Ortaokul
3. Yazar	Kadın	29 yıl	İlkokul
4.Yazar	Kadın	13 yıl	Ortaokul
5.Yazar	Kadın	29 yıl	Ortaokul

6.Yazar	Erkek	13 yıl	İlkokul
7.Yazar	Erkek	26 yıl	İlkokul
8.Yazar	Kadın	8 yıl	Ortaokul
9.Yazar	Erkek	16 yıl	Ortaokul
10.Yazar	Erkek	16 yıl	Ortaokul
11.Yazar	Erkek	16 yıl	Ortaokul

Tablo 1'e bakıldığında katılımcıların üçü ilkokul matematik, sekizi ortaokul matematik ders kitabı yazarıdır. Katılımcılardan altısı kadın, beşi erkektir. Görüşme yapılan öğretmenlerden biri sınıf öğretmeni (7. Yazar), diğerleri ilköğretim matematik öğretmenidir. Öğretmenler kıdem olarak genellikle deneyimli, 15 yıl üstünde çalışmış olan öğretmenlerden oluşmaktadır.

Bu araştırmanın katılımcıları, amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt (kriter) örnekleme yöntemi ile belirlenmiştir. Amaçlı örnekleme, seçkisiz olmayan bir örnekleme yaklaşımıdır. Çalışmanın amacı doğrultusunda, bilgi açısından zengin durumların belirlenip detaylı olarak incelenmesine olanak tanır. Belirli kriterlere uyan veya özel nitelikleri olan durumlar inceleneceğinde kullanılır (Büyüköztürk vd., 2020). Bir araştırmada gözlemlenecek gruplar belli niteliklere sahip kişiler, olaylar, nesneler ya da durumlar arasından seçilebilir. Bu durumda, belirlenen kriterleri karşılayan gruplar örneklem olarak seçilir. Araştırma verilerine dayanarak belirli özelliklere sahip bireyler üzerinde bir uygulama yapılmak istenmesi de ölçüt örnekleme örneği olarak kabul edilir (Patton, 1990). Bu doğrultuda belirlenen kriterler; 2023 yılında ilkokul veya ortaokul matematik ders kitabı yazarlığı yapıyor olma, Milli Eğitim yayınları için ilkokul veya ortaokul matematik ders kitabı yazıyor olma şeklindedir.

Veri toplama araçları

Bu araştırma için veriler araştırmacılar tarafından hazırlanmış yarı yapılandırılmış sorulardan oluşan görüşme formları aracılığıyla toplanmıştır. Yarı yapılandırılmış görüşmeler hem yapılandırılmış hem de yapılandırılmamış görüşmelerin özelliklerini taşır. Soru formu vardır fakat görüşmenin akışına göre yeni soru eklenebilir veya soruların sırası değiştirilebilir. Analizlerin basit olması, görüşülen kişinin kendini rahatça ifade edebilmesi ve belirli bir çerçevede derinlemesine bilgi toplanabilmesi gibi avantajları vardır (Büyüköztürk vd., 2020). Bu nedenlerden dolayı yarı yapılandırılmış görüşme yapılması tercih edilmiştir.

Araştırmanın veri toplama sürecinde kullanılacak olan yarı yapılandırılmış görüşme formu iki bölümden oluşmaktadır. Bu bölümlerden ilkinde katılımcılarla ilgili demografik özelliklerin yer aldığı sorular bulunmaktadır. İkinci bölümde ise araştırma problemlerine cevap vermek için ispat algısı, matematik eğitimi ve ispat, öğretim programı ve ispat ile verilen ispat örneğinin değerlendirildiği sorularının yer aldığı dört kısım bulunmaktadır. İlk kısımda ispat algısıyla ilgili ispatın tanımı ve işlevlerini kapsayan sorular bulunmaktadır. İkinci kısımda yazarların okul matematiğinde ispatın yerine ilişkin görüşlerini sunacağı sorular bulunmaktadır. Üçüncü kısımda öğretim programına odaklanılmıştır ve öğretim programının amaçları ve kazanımlarının ispat ile ilişkisi ile programın ders kitaplarına yansımaya odaklanan sorular bulunmaktadır. Son kısımdaki soruda öğretmenlere (ilkokul ve ortaokul kitabı yazarları için farklı) bir önerme ile bu önermenin olası ispatları sunulmuştur. Bu kısımda önermelere yönelik sunulan olası ispatlar üzerinden yazarların görüşleri alınmaya çalışılmıştır. Formdaki sorular bulgular bölümünde yer almaktadır.

Geçerlik ve güvenirlik

Veri toplama araçlarını geliştirme sürecinde ilgili literatür incelenmiş ve araştırma soruları araştırmanın amacı doğrultusunda oluşturulmuştur. Veri toplama araçlarının geçerliğinin sağlanması için görüşme formu alan uzmanı iki akademisyene gönderilerek uzman görüşü alınmıştır. Uzmanlar formu incelemiş ve herhangi bir soru eklenmesine veya çıkarılmasına gerek olmadığını belirtmişlerdir, öneri olarak sundukları bazı dil bilgisi ve ifade düzeltmeleri dikkate alınarak forma son şekli verilmiştir. Ayrıca, bu araştırma için matematik öğretmenliği ve matematik ders kitabı yazarlığı deneyimi olan dört katılımcı ile pilot görüşmeler yapılmış, bu görüşmelerle görüşme formundaki soruların anlaşılabilirliği ve kapsam yeterliği sınanmıştır. Görüşmeler neticesinde görüşme formundaki soruların anlaşılabilirliği ve kapsam yeterliğinin yeterli olduğu düşünülerek formda herhangi bir değişiklik yapılmamıştır.

Veri analizi sürecinde içerik analizi iki farklı araştırmacı tarafından ayrı ayrı yapılmış ve kodlar oluşturulmuştur. Miles ve Huberman'ın (1994) önerdiği Güvenirlik = Görüş Birliği/(Görüş Birliği + Görüş Ayrılığı) güvenirlik formülü kullanılarak araştırmanın güvenirliği %93 olarak hesaplanmıştır. Daha sonra “görüş birliği” ve “görüş ayrılığı” olan konular tartışılmış ve gerekli düzenlemeler üçüncü araştırmacı da sürece dahil edilerek yapılmıştır.

Raporlaştırma sürecinde ise kitap yazarlarının görüşme esnasında vermiş oldukları cevaplar doğrudan alıntı şeklinde bulgulara sunulmuştur. Bir araştırmanın sonucunda ulaşılan verilerin detaylı biçimde sunulması ve bu sonuçların nasıl elde edildiğinin açıklanması nitel araştırmaların geçerliği için önemli kriterlerdendir (Yıldırım ve Şimşek, 2021).

Verilerin toplanması

Veriler toplanmadan önce Ankara Üniversitesi Rektörlüğü Etik Kurul Başkanlığı'na başvuruda bulunularak gerekli izin alınmıştır. Görüşmelere başlamadan önce katılımcılar süreç hakkında bilgilendirilmiş ve katılımcılara katılımcı onam formları gönderilmiştir. Katılımcılardan alınan onay sonrasında görüşmelere başlanmıştır. Görüşmeler yüz yüze veya online platformlarda (Zoom, Skype vb.) gerçekleştirilmiştir. Yazarlar Türkiye'nin farklı illerinde olduğu için görüşmede online platform kullanımı da tercih edilmiştir. Yapılan görüşmeler ortalama bir saat sürmüştür. Yazarların bilgisi ve izni dahilinde veri kaybı olmaması için görüşmelerden ses ve görüntü kaydı alınmıştır.

Veri analizi

Görüşmeler tamamlandıktan sonra kayıt altına alınan ses dosyaları transkript edilip içerik analizi yöntemi ile çözümlenmiştir. İçerik analizi, bir metin ya da metin grubundaki belirli kelimelerin veya kavramların varlığını tespit etme amacıyla yapılır. Araştırmacılar, metinlerdeki bu kelime ve kavramların varlığını, anlamlarını ve birbirleriyle olan ilişkilerini saptar ve analiz ederler; bu sayede metinlerin ilettiği mesajlar hakkında sonuçlar çıkarırlar (Büyüköztürk vd., 2020). Kodlama iki farklı araştırmacı tarafından ayrı ayrı yapılmış ve kodlar oluşturulmuştur. Örneğin yazarlardan ispatı tanımlamaları istendiğinde sunulan aşağıdaki açıklama araştırmacılar tarafından ayrı ayrı kodlanmıştır. Aşağıdaki anlatım “matematik”, “bilim” ve “doğruluk” kavramlarıyla ilişkilendirilmiştir.

“İspat kavramı aslında ne yapıyoruz bir formülün bir bilginin doğruluğunu kanıtlıyoruz... çok iç içe geçmiş bir ilişkidir ispatla matematik... bir araştırma yapılmış araştırmalar sonucunda bir şeye ulaşılmış ama ulaştığı şeylerin bilim olması için tabi ki ispatlanması gerekiyor. Dolayısıyla bizden matematikte kullandığımız her şeyi gerçek bir araştırma sürecinden geçmiş bilimsel bir çalışmanın sonucunda ortaya çıkmış ve ispatlanmış şeyler olarak kabul ediyoruz...”

Daha sonra araştırmacılar bir araya gelerek oluşturulan kodları birleştirmişlerdir. Ardından bu kodlar da birleştirilerek kategoriler ve kategoriler birleştirilerek temalar oluşturulmuştur. Yazarların anlatılarında yer alan “ıkna”, “matematik”, “bilim”, “öğrenme” ve “doğruluk” kodları bir araya gelerek “ispat tanımı” kategorisini, “ispat tanımları”, “ispatın işlevleri” ve “ispat yapmaya duyulan ihtiyaç” kategorileri altında toplanan görüşler ise “ispat algısı” temasını oluşturmuştur. Araştırmanın analizi sonucu elde edilen temalar ve kategoriler Tablo 2’de verilmiştir. Katılımcıların vurguladıkları ifadeleri ortaya çıkarmak amacıyla bulgular bölümünde doğrudan alıntılamalara da yer verilmiştir.

Tablo 2. Araştırmanın temaları ve kategorileri

Temalar	Kategoriler
İspat algısı	İspat tanımları İspatın işlevleri İspat yapmaya duyulan ihtiyaç
Matematik eğitimi ve ispat	Matematik öğrenme ile ispat ilişkisi Matematiksel beceriler İspatın başlayabileceği düzeyler
Öğretim programı ve ispat	İspatla ilişkili bulunan amaçlar İspatla ilişkili bulunan kazanımlar
Verilen ispat örneğinin değerlendirilmesi	İspat örneğinin düzeye uygunluğu Verilen ispat yanıtlarına yönelik görüşler

Tablo 2 incelendiğinde, araştırmada analiz sürecinde “ispat algısı”, “matematik eğitimi ve ispat”, “öğretim programı ve ispat” ile “verilen ispat örneğinin değerlendirilmesi” temaları oluşmuştur. Her bir tema kendi içinde de kategorilere ayrılmıştır.

Bulgular

Matematik ders kitabı yazarlarının ispat algılarının ve ispatın okul matematiğindeki yerine ilişkin görüşlerinin incelenmesinin amaçlandığı bu çalışmada bulgular elde edilen dört ana temayı içeren başlıklar altında sunulmuştur.

İspat algısı temasına ait bulgular

Bu tema görüşmede yer alan “İspat kavramını nasıl tanımlarsınız?”, “İspatın işlevleri nelerdir?” ve “İspat yapmaya ihtiyaç duyuyor musunuz, duyuyorsanız ispat yapmaya hangi durumlarda ihtiyaç duyuyorsunuz?” sorularına yazarların vermiş oldukları cevaplardan oluşmaktadır. Tablo 3’te yazarların “İspat kavramını nasıl tanımlarsınız?” sorusuna verdiği cevaplara dair kodlar yer almaktadır. Yazarlar uzun tanımlar yapabilmiş, aynı anda birden fazla koda değinebilmişlerdir.

Tablo 3. Yazarların yaptıkları ispat tanımlarında yer alan kodlar

Kategori	Kodlar	Katılımcılar
İspat tanımları	Matematik	1, 2, 5, 6, 9, 11
	Bilimsellik	2, 3, 4, 5, 6, 11
	Doğruluk	1, 5, 9, 10
	İkna	4, 6, 7, 10
	Öğrenme	6, 8

Tablo 3'e bakıldığında yazarların ispatı farklı şekillerde tanımlayabildikleri görülmektedir. İspata yönelik yazarların tanımları beş ayrı koda ayrılmıştır. Ayrıca yazarların büyük bir kısmının yaptığı tanımlarda ispatı matematik ve bilimsellik kodlarıyla ilişkilendirdikleri görülmektedir. Yazarlar, ispatı tanımlarken doğruluk ve ikna kodlarına da değinmişlerdir. İspat ile öğrenme arasında bağ kuran yazar sayısı diğer kodlara göre az olmuştur. Matematik, bilimsellik ve doğruluk kodlarına değinen 5. Yazar'ın tanımı aşağıdaki gibidir:

5. Yazar. *“İspat kavramı aslında ne yapıyoruz bir formülün bir bilginin doğruluğunu kanıtlıyoruz... çok iç içe geçmiş bir ilişkidir ispatla matematik... bir araştırma yapılmış araştırmalar sonucunda bir şeye ulaşılmış ama ulaştığı şeylerin bilim olması için tabi ki ispatlanması gerekiyor. Dolayısıyla bizden matematikte kullandığımız her şeyi gerçek bir araştırma sürecinden geçmiş bilimsel bir çalışmanın sonucunda ortaya çıkmış ve ispatlanmış şeyler olarak kabul ediyoruz...”*

İspat ile bilgiyi zihinde yapılandırma, yani öğrenme arasında bağ kuran 8. Yazar ise ispatın tanımını yaparken “... belli bir kavramı zihinlerinde oluşturmaları, şemalar kurabilmeleri açısından, bağlantı kurabilmeleri açısından kullanılan matematiksel bir terimdir.” ifadesini kullanmıştır.

Yukarıdaki alıntılardan da görüldüğü üzere yazarlar ispata yönelik parçalı ve uzun tanımlar yapabilmişlerdir. Yazarların ispata yönelik algılarını ortaya koyabilmek adına onlara ispata yükledikleri işlevler de sorulmuştur. Tablo 4'te yazarların “İspatın işlevi nelerdir?” sorusuna verdikleri cevaplara ait bulgular yer almaktadır.

Tablo 4. Yazarlara göre ispatın işlevleri ile ilgili kodlar

Kategori	Kodlar	Katılımcılar
İspatın işlevleri	Doğrulama ve yanlışlama	1, 2, 3, 5, 9, 10
	İletişim	1, 4, 5, 6, 7, 10
	Açıklama	3, 4, 9
	Keşfetme	10, 11
	Genelleme	4, 9
	Öğrenme	6, 8, 9
	Öz yeterlilik	6, 8
	Matematiksel düşünme	8

Tablo 4'e bakıldığında yazarların ispatın farklı işlevlerinden, farklı yoğunluklarda bahsettikleri görülmektedir. Ayrıca yazarların büyük kısmı ispatın “doğrulama ve yanlışlama” ve “iletişim” kodlarıyla ilişkili işlevlerine değinmişlerdir. Yazarlar ispatın işlevleriyle ilgili açıklama, keşfetme, genelleme, öğrenme, öz yeterlilik kodlarına da değinmişlerdir. 8. Yazar ispatın işlevinde de ispat ile öğrenme arasında bağ kuran bir değerlendirmeyi aşağıdaki gibi yapmıştır:

8. Yazar. *“Öğrencilerin belli kavramları daha iyi anlamalarını sağlayacaktır, soyut düşünme becerilerini arttıracaktır. ... Muhakeme, karşılaştırma yapmalarını sağlar diye düşünüyorum. Öz güvenini arttırabilir, matematiği anlayabilirim düşüncesi oluşturur öğrencilerde. Öğrendiklerini o anlık değil de hani daha böyle kalıcı bir şekilde öğrenmelerini sağlar. Neden, niçin hani bunların temel sebeplerini*

sorgular öğrenci matematiksel ispat sayesinde. Matematiğe karşı önyargıları yıkabilir, ben de yapabiliyordum anlayabiliyordum matematiği diye hani öyle yüzeysel değil de bir ezberleme değil de hepsinin nedenini sorgular.”

9. Yazar ise açıklamasında pek çok koda değinmiş, ispatın işlevine değinirken öğrencinin öğrenme sürecine de vurgu yapmıştır.

9. Yazar. “...kendi anlamıyla gerçekliği ortaya çıkarma, eğitim anlamında da. Hani biz ortaokulda çok fazla kullanamıyoruz öğrenci seviyesi nedeniyle ama hani basit anlamda işte çocukların mevcut eşitlikleri, ifadeleri daha rahat algılayabilmesi için kullandığımız bazı ispatlar var.” [Pisagor teoremini kastetmekte]

Alıntılardan da görüldüğü üzere yazarlar ispatın işlevlerini matematik yapma ve matematiği öğretme/öğrenme ile de ilişkilendirmektedir. Kitap yazarlarının ispat yapmaya neden ihtiyaç duyduklarına dair bulgular ise Tablo 5’te yer almaktadır.

Tablo 5. Yazarların ispat yapmaya ihtiyaç duyduğu durumlar

Kategori	Kodlar	Katılımcılar
İspat yapmaya duyulan ihtiyaç	Ders anlatma Matematik çalışma Kitap yazma	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10, 11 3, 8 6

Yazarlara ispat yapmaya ihtiyaç duyup duymadıkları sorulduğunda tüm yazarların ihtiyaç duyduklarını ifade etmişlerdir. Tablo 5’te yer alan kodlara göre yazarlar 3 ayrı gerekçe ile ispata ihtiyaç duymuşlardır. Ayrıca tablodan yazarların tamamının ders anlatırken ispat yapmaya ihtiyaç duydukları görülmektedir. Bir yazar ders anlatırken ispata duyduğu ihtiyacı şu şekilde anlatmıştır:

1. Yazar. “*Mesela üçgenler konusunu işliyorum açılar konusunu işliyorum o 180 derece nereden geliyor üçgen iç açıları toplamı ya da dörtgenin beşgenin iç açıları toplamı... kuralları ezberletmektense aslında nereden geliyor nasıl bulunmuş aslında oraya üzerine koyarak çocuklara tersine düşündürerek ispat yaptırarak konuyu daha net bir şekilde öğretmeye çalışıyorum mesleki anlamda”*

Kitap yazarken ispat yapmaya ihtiyaç duyduğunu belirten tek bir yazar bulunmaktadır. Ayrıca yazarlar matematik çalışırken de ispat yapmaya ihtiyaç duyduklarını belirtmişlerdir. 3. Yazar bu konudaki ihtiyacını “unuttuğum formülü bu ispatların gidişinden hatırlayarak çıkarırım genel olarak. O yüzden hani benim çıkarım için işime yarar o ispatlar” ifadesi ile belirtmiştir.

Bu soruya kadar olan tüm sorularda ispat ile öğrenme arasında bir ilişki kurarak yanıtlar üreten 6. yazar ispat yapmaya duyduğu ihtiyacı anlatırken ilkökul matematik ders kitabı yazma sürecine ve bu süreçte yaşadığı zorluğa aşağıdaki gibi değinmiştir:

6. Yazar. “*İspatı kullanıyorum. Hani sınıfta kullanıyordum, İspat çok iyi sonuçlar veriyor. Öğrencilerimde bunu gördüm yani ders kitaplarını yazarken de, yani ona ufaktan ufaktan değinmeye çalıştık. Yani direk ispatı budur değil de çocuk onun nereden geldiğini anlasın diye bir süreç konuya girişte işte bu böyle bu böyle buradan dolayı bu işte şundan dolayı şunu yapmalıyız. Bak şöyle olunca böyle oluyor gibi süreci böyle yayarak öğrencilerin bu anlamda zihnine oturmasını amaçladık ama genel anlamda sınıfta daha da etkili oluyor yani kitapta onu tam istediğimiz gibi yapamıyoruz.”*

Kitap yazarlarının ispata yönelik yaptığı değerlendirmelerde genel olarak ispat ve öğrenme ilişkisi sınırlı yer almıştır. Buna karşın ispat yapmaya ne zaman ihtiyaç duyduklarını belirtirken daha çok ders anlatma süreçlerine değinmişlerdir.

Matematik eğitimi ve ispat temasına ait bulgular

Bu tema görüşmede yer alan “İspatın matematiği öğrenmeyle bir ilişkisi olduğunu düşünüyor musunuz?”, “Matematik dersi ile ilgili becerileri sayabilirsiniz? İspat bir beceri midir?”, “Okul matematiğinde ispat hangi düzeyden itibaren yer almalıdır?” sorularına yazarların vermiş oldukları cevaplardan oluşmaktadır.

İspatın işlevi ve tanımı ile ilgili kendilerine sorulan sorularda yazarların küçük bir kısmı ispat ve öğrenme arasında ilişki kurarak yanıt vermişlerdir. Görüşmenin ilerleyen kısımlarında kendilerine ispat yapmanın matematiği öğrenme ile ilişkisi var mı diye sorulduğunda bu sefer öğretmenlerin önemli bir bölümü ispat ile öğrenme arasında bağ kurmuşlardır. Tablo 6’da yazarların bu soruya verdikleri yanıtlara yönelik kodlar yer almaktadır.

Tablo 6. Yazarların matematiği öğrenme ile ispat ilişkisi hakkındaki görüşleri

Kategori	Kodlar	Katılımcılar
Matematik öğrenme ile ispat ilişkisi	Öğrenme	1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11
	Doğrulama	4, 7, 10
	İkna etme	4, 7, 10
	Matematik kaygısını giderme	6

Tablo 6’den görüldüğü üzere yazarlardan biri hariç diğerleri ispatın matematiği öğrenme ile ilişkili olduğunu doğrudan ifade etmişlerdir. Yazarlar doğrulama ve ikna etme kodlarına da değinmişlerdir. Bir yazar ispatın eğitimdeki rolünü matematik kaygısını giderme ile de ilişkilendirmiştir. İlkokul matematik kitabı yazarı 6. Yazar ispat ve kaygı arasındaki kurduğu bağı “ispat matematikte çok büyük başarı sağlar çok büyük bir korku, işte kaygı şeyini giderir” şeklinde belirtmiştir. Geri kalan diğer üç koda ifadesinde değinen 4. Yazar’ın açıklaması ise şu şekildedir:

4. Yazar. *“Tabii ki bu ihtiyaç, ders akışı getiriyor bunu, öğrenci istiyor çoğu zaman da anlatım sırasında, neyin nereden geldiğini çocuk daha iyi bilirse ya da ispatlayacak olan birey daha çok sahipleniyor ve aynı şekilde onu yerleştirip bir şekilde devam ettiriyor bir başkasına aktarabilmeyi sağlıyor”*

Görüşmenin devamında yazarlara matematiksel becerilere dair görüşlerinin alınabileceği bir soru sorulmuştur. Bazı yazarlar önce sorudaki beceri ifadesi ile karşılaştıklarında duraksamışlardır. Biraz düşündükten sonra her yazar matematik dersi ile ilişkili en az bir beceri sayabilmiştir. Yazarların en fazla bahsettiği beceriler problem çözme (Yazar 1, 2, 3, 5, 6, 8, 10), işlem yapma (Yazar 3, 4, 9, 10, 11) ve akıl yürütme (Yazar 1, 4, 6, 8, 9, 10) olmuştur. Yazarlar, okuma-yazma (Yazar 4, 6), uzamsal düşünme (Yazar 4, 6), matematiği günlük yaşamla ilişkilendirmeyi (Yazar 7, 8) de beceri olarak ifade etmişlerdir. Birer yazar tarafından da zihinden işlem yapma (Yazar 2), tahmin yapma (Yazar 2), soyut düşünme (Yazar 8), eleştirel düşünme (Yazar 4), yaratıcı düşünme (Yazar 4) ve iletişim (Yazar 8) becerileri ifade edilmiştir.

Yazarların matematik dersi ile ilişkili saydıkları beceriler arasında ispat becerisi bir ifade olarak doğrudan yer almamıştır. Sayılan beceriler arasında ispat yapma becerisinin bulunmaması üzerine yazarlara “İspat yapma bir beceri midir?” sorusu da yöneltilmiştir ve 8. Yazar dışındaki tüm yazarlar ispat yapmanın da bir beceri olarak ele alınabileceğini bu sorunun ardından ifade etmişlerdir. 8. Yazar ise beceriye yönelik kendi tanımını sunarak ispatın bir beceri olmayışına şu şekilde değinmiştir:

8. Yazar. “İspat beceri değil de ilişki kurabilmenin alt dalı gibi hissettim şu an... Yetenek anlamında beceriyi öyle düşünüyorum. Problem çözme günlük hayatta da karşılaşılabileceği bir durum o yüzden genel bir beceri. Ama ispat daha çok matematiksel olarak düşündüğümüz bir durum o yüzden bir alt dalı olarak görüyorum.”

Soru ilk sorulduğunda ispat ile ilişkilendirilebilecek bir beceri olan akıl yürütmeyi beceri olarak ifade eden 10. Yazar, ispatı bir beceri olarak ele alabilir miyiz diye kendisine sorulduğunda sınıf düzeyleri üzerinden bir değerlendirme sunarak, ispat becerisini sınıf düzeylerine göre farklılaştıran bir açıklama sunmuştur.

10. Yazar. “İlköğretim seviyesinde pek böyle yani ispat kavramı olarak değil de hocam işte mesela çocuktan yaptığı işlemin doğruluğunu göstermesini istememiz de yani bir ispat gibi düşünürsek yani mesela bir problem soruyoruz, çözüyor ama diyoruz ki bana anlat bunu yani nasıl yaptın doğru mu yaptın acaba onun doğruluğunu göstermesi de aslında çocuk için bir ispatıdır. Yani bana onun doğruluğunu ispat etmiş oluyor bir anlamda. O anlamda düşünürsek tabi o da bir beceridir yani”

Yazarlara daha sonra ispatın öğretim sürecinde hangi kademelerde yer alması gerektiğine dair görüşleri de sorulmuştur. Önceki sorularda ilk ve ortaokul düzeylerine dair daha çekinceli cevap ileten yazarların önemli bir kısmı bu soruya okul öncesi döneminden itibaren yanıtını verebilmiştir. Tablo 7’de yazarların “Okul matematiğinde ispat hangi düzeyden itibaren yer almalıdır?” sorusuna verdiği cevaplara dair kodlar yer almaktadır.

Tablo 7. Yazarlara göre ispatın başlayabileceği düzeyler

Kategori	Kod	Katılımcılar
İspatın başlayabileceği düzeyler	Okul öncesi	1, 3, 7, 10
	İlkokul	4, 5, 6, 9
	Ortaokul	2, 8
	Lise	11

Tablo 7’den görüldüğü üzere yazarlar ispatın okul öncesinden lise düzeyine kadar farklı düzeylerde yer almaya başlayabileceğinden bahsetmişlerdir. Yanıtlar daha çok okul öncesi ve ilkökul düzeyinde yoğunlaşmıştır. Tercihini lise düzeyinden yana kullanan tek bir yazar olmuştur. 11. Yazar gerekçesini matematik tarihine değinerek ve lise matematiğinde gözlemlediği eksiği ifade ederek belirtmiştir.

11. Yazar. “Sanki ispatın tarihsel geçmişi eksik gibi yani bizim lise kitaplarından görüyorum tamam bir ispat yapılmış ama bu ispati yapan hangi şartlarda yaptı, hangi ihtiyaçtan yaptı? Newton’un veya buna benzer çağdaşların integrali birbirlerinden habersiz hesaplamaları nihayetinde o integrale ihtiyacı gösteriyor. Tarihsel bağlam sanki lise seviyesinde eksik olduğu kanaatindeyim... Lise seviyesinde çok detaylı olmayan çok basit ve hakikaten böyle öğrencinin de algılayabileceği seviyedeki ispata yer verilmesi gerektiğini düşünüyorum.”

Yazarlar genel olarak ispatın ezberlemeyi engelleyeceği gerekçesi ile erken düzeylerden itibaren ele alınması gerektiğini belirtmişlerdir. İspata okul öncesinden itibaren yer verilmesi gerektiğini savunan 1. Yazar ispata temelden başlamalı yaklaşımını şu şekilde ifade etmiştir.

1. Yazar. “Anasınıfında başlanmalı hani en temelden başlanmalı, çünkü biz çocuklara temelden matematiği hep korkutarak yani ezber olarak verdiğimiz için çocuklar bunu anlayamadığı için zorlanıyorlar, zorlandıkları için yapamıyorlar, yapamadıkları için korkuyorlar.”

Bazı yazarlar da değerlendirmelerinde ispatın farklı düzeylerde farklı şekillerde ele alınabileceğini vurgulamışlardır. Ortaokul düzeyinden itibaren ispata yer verilebileceğini belirten 2. Yazar lise ve ortaokul düzeyine ilişkin şu değerlendirmeyi yapmıştır:

2. Yazar. *“Hangi düzeyde yer almalıdır? Çok soyut olmamalı yani bence ortaokul seviyesinde etkinliklerle ispat olmalı. Kes yapıştır. Ondan sonra gör, onu ispatla, geometri de mesela ne vardı alan, paralelkenarın alanı, yani onları, alanını çıkarmayı (üçgenin alanını kesip yapıştırmayı kastetmekte) o şekilde yaşayarak öğrenirse daha kalıcı olur. Lise düzeyinde daha soyut olabilir.”*

Yazarların verdiği bazı yanıtlarda belirttikleri düzeye ilişkin tereddütleri de yer almıştır. 9. Yazar ispatın ilkökul düzeyinden itibaren ele alınması gerektiğini belirtirken, bu düzeyde başlamasını “zor” olarak, okul öncesini ise “yapılamaz” olarak tanımlamıştır.

9. Yazar. *“Hani öğrenci seviyesine göre, bulunduğu düzeye göre ilkökulda da olmalı. Birinci kademedede de olmalı, ikinci kademedede de olmalı. Ortaöğretimde de olmalı. Yani lise seviyesinde de bunun seviyesine göre. Bu bilişsel düzeye göre, ezberletmekten ziyade yeri geldikçe bunları ispata yönlendirmek bence gerekli... Yani çok zor olur gibi geliyor ya şu an tam zihnimde oluşturamıyorum, matematik anlamında da sayılar dışında herhangi bir şey. O okul öncesinde bilmedikleri için... Kavramları tam olarak bilmedikleri için hani orada nasıl yapılabilir? Ya da o çocukta ne uyandırabilir tereddütteyim sanki yapılamaz daha ağır basıyor gibi aslında.”*

İspatı ilk etapta bir beceri olarak değerlendirmeyen kitap yazarlarının önemli bir kısmı okul matematiği içerisinde ispata erken dönemde yer verilmesi gerektiğini vurgulamıştır. Ayrıca ispatın öğrenci seviyesine göre uyarlanabileceğini de belirtmişlerdir.

Öğretim programı ve ispat temasına ait bulgular

Bu tema görüşmede yer alan “1-8. Sınıflar Matematik Dersi Öğretim programında ispat becerisi ile ilişkili bulduğunuz amaçlar var mı, varsa neden ispatla ilişkilendirdiğinizi açıklayınız.”, “1-8. Sınıflar Matematik Dersi Öğretim Programında ispatla ilişkili bulduğunuz ilkökul/ortaokul düzeyinde kazanımlar var mı, varsa neden ispatla ilişkilendirdiğinizi açıklayınız.” sorularına yazarların vermiş oldukları cevaplardan oluşmaktadır.

Görüşmenin önceki bölümlerinde yazarların büyük bir kısmı ispatı öğrenme ile ilişkilendirmiş, okul öncesi ve ilkökuldan itibaren okul matematiğinde ispata yer verilebileceğinden bahsetmişlerdi. Yazarların çoğu ayrıca ders anlatırken ispat yapmaya ihtiyaç duyduklarını da belirtmişlerdir ama yalnızca tek bir yazar kitap yazarken ispat yapmaya ihtiyaç duyduğunu söylemiştir. Yazarların matematik öğretim programını ispat perspektifinden nasıl değerlendirdiklerini anlamak için yazarlara öğretim programında ispatla ilişkili buldukları amaçlar olup olmadığı sorulmuştur. Yazarlar öğretim programında yer alan amaçları ilk başta hatırlayamamışlardır. Bu nedenle 1-8. sınıflar matematik dersi öğretim programındaki 13 özel amaç yazarlara gösterilmiştir (Ek 1) ve soru tekrar sorulmuştur. Tablo 8’de yazarların programda yer alan ve ispat becerisi ile ilişkilendirdiği amaçların dağılımı yer almaktadır.

Tablo 8. İspatla ilişkili bulunan amaçlar

Kategori	Kod	Katılımcılar
İspatla ilişkili bulunan amaçlar	Amaç 1	1, 2, 3, 4, 9, 10, 11
	Amaç 2	1, 3, 7, 8, 10, 11

Amaç 3	1, 2, 3, 4, 10, 11
Amaç 4	1, 3, 4, 5, 7, 9
Amaç 5	1, 4, 5, 7
Amaç 6	3, 4
Amaç 7	2, 4, 10
Amaç 8	1, 8, 9
Amaç 9	5
Amaç 10	6, 11
Amaç 11	6, 7

Öğretim programında 13 tane amaç olmasına karşın Tablo 8'e bakıldığında yazarların 11 tane amaç ile ispatı bağlantılı buldukları, en çok Amaç 1 ile ispatı ilişkilendirdikleri görülmektedir. Yazarların çoğu 2, 3 ve 4 numaralı amaçlar ile de ispatı ilişkilendirmişlerdir. İlk dört maddeyi yoğun bir şekilde tercih eden yazarlar ispat ile öğrenme arasında kurdukları ilişkiyi gerekçe olarak sunmuşlardır. Bu yazarlardan birisi olan 10. Yazar'ın anlatımı şu şekildedir:

10. Yazar. *“Amaç 2’yi yapabilmesi için çocuğun o konuyu içselleştirmesi lazım, çocuğun bildiği şeyin doğruluğundan emin olması lazım. Bu emin olma işi de işte ispat... Amaç 1 ve Amaç 3 de hocam bu da ancak yine ispat edilmiş bir bilgiyle mümkün olur. Hani çocuğun neyin nasıl olduğunu, niye o bilginin o şekilde gerçekleştiğini, çocuğun oradaki kavramları çok iyi bilmesi lazım... Araştırma yapması, yeni bilgi üretmesi için çocuğun var olan bilgiyi iyi içine sindirmiş olması lazım ki o bilgi üzerine yeni bilgiler üretebilirsin. Yani onları kullanabilsin, farklı alanlara taşıyabilsin. Biraz ispat olunca iş ezberden de çıkmış oluyor. Yani çocuğun zihninde tam anlamıyla bir anlamlı bir yapı oluşmuş oluyor.”*

Diğer yazarların tercihlerinin aksine farklı maddeleri seçen, en az seçilen iki maddeyi (Amaç 10 ve 11) tercih eden 6. Yazar ise amaçlarla ispat arasında daha dolayimli bir bağ kurarak aşağıdaki ifadeleri kullanmıştır:

6. Yazar. *“Matematiksel okuryazarlık demiş ya. Bunda da matematiksel kavramları anlamada da bunların hepsinin aslında faydasında yine ispatı göreceğiz... Sistemli ve dikkatli, sabırlı ve sorumlu olma özelliklerini geliştirebileceklerdir. Şimdi siz mesela ispatta da bir sistem var, belli bir akış üzerine oluyor ispat, dikkatli olunması lazım, sabır mevzuu zaten ispatlar... Eğer sabırlı insanlar olmasaydı süreçte yani bunların hepsini ispat, araştırma yapma, bilgi üretme, bilgi becerisi, kullanma becerileri geliştirecektir.”*

Öğretim programında yer alan amaçlara ek olarak kitap yazarlarından programdaki kazanımları da ispat ile ilişkilendirmeleri istenmiştir. Tablo 9'da yazarların “1-8. Sınıflar Matematik Dersi Öğretim Programında ispatla ilişkili bulduğunuz ilkökul/ortaokul düzeyinde kazanımlar var mı, varsa neden ispatla ilişkilendirdiğinizi açıklayınız.” sorusuna verdikleri cevaplardaki kazanımlar (EK 2) yer almaktadır. Yazarların yarıya yakını kazanımları hatırlayamadıklarını ifade etmişlerdir. Kazanımları hatırlamakta güçlük çeken yazarlara, öğretim programını inceleme fırsatı sunulmuştur. Yazarlar tabloda yer alan belirledikleri kazanımlara ek olarak, tek tek kazanımları vurgulamasalar da öğrenme alanlarını işaret eden daha genel değerlendirmelerde de bulunmuşlardır.

Tablo 9. İspatla ilişkili bulunan kazanımlar

Kategori	Kod	Katılımcılar
İspatla ilişkili bulunan kazanımlar	Kazanım 1	3, 7
	Kazanım 2	5
	Kazanım 3	5, 7
	Kazanım 4	1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 11
	Kazanım 5	2, 4, 6, 8, 9
	Kazanım 6	2, 10, 11

Tablo 9'a bakıldığında, yazarlar tarafından ispatla en çok ilişkilendirilen kazanımın Kazanım 4 (Pisagor bağıntısını oluşturur, ilgili problemleri çözer) olduğu görülmektedir. Geometri ile ilgili iki kazanımı belirten 5. Yazar bu kazanımların içeriğinin ispatla nasıl ilişkilendirileceğini şu şekilde anlatmıştır:

5. Yazar. *“Burada geometrik şekli çizip işte üçgen diyoruz, dörtgen diyoruz, 4 tane kenarı olmaktan bahsediyoruz, zaten direk ilişkilendirilebilir bu... (Kazanım 2'yi gösteriyor) Origami ile falan yapıyoruz ya bunları, aldık kağıdı elimize katladık yani olabilir, simetri doğrusu olduğunu şekli katlayarak belirler çok net, bu bir ispat mıdır, elime kağıdı aldım katlayarak gösterdim. Evet yani o zaman kesinlikle ispatla ilişkilendirilebilir yani.”*

Yazarların önemli bir kısmı kazanımları inceleyip belirlemeye ek olarak matematik konu alanlarının içeriğine değinen değerlendirmelerde de bulunmuştur. Bu yazarlardan biri olan 10. Yazar'ın ifadelerinden de görüleceği üzere bazı yazarlar programa yönelik değerlendirmelerini sunarken ders kitaplarındaki eksikliklerden veya ders kitabına eklenebilecek içeriklerden de bahsetmişlerdir. Yazarlar ifadelerinde kitap yazım sürecinde kendi yaptıklarına değil, yapılabileceklerle değinmişlerdir.

10. Yazar. *“Ortaokul düzeyinde yani problem çözme kazanımları hocam bence bunu kapsıyor. Yani bu problem çözme de her sınıf düzeyinde var. Başka mesela... Sekizden geriye doğru gidersek. Yani kareköklü ifadelerde mesela işte işlemler var. Toplama çarpma oradaki bazı kurallar var. Yine üslü ifadelerde temel kurallar var. ...Sekizinci sınıfta üslü ifadelerde işte üstün sıfır olduğu durumlarda ya da negatif olduğu durumlarda sonuç nasıl değişiyor? Orada kullanılabilir. Hocam özellikle hacimde verdiğimiz formüller var. Bu formüllerin işte nereden geldiği konusunda bir çocuğun anlayabileceği düzeyde bir şeyler söylenebilir. Yedinci sınıfta doğru denklemlerinde kullanılabilir. Yine sekizinci sınıfta eğim konusu, üçgenler, Pisagor bağıntısı falan var.”*

Bir diğer yazar (4. Yazar) ise kazanımları ilk etapta hatırlayamamış, sonra da ders kitaplarına ispat becerisinin nasıl dahil edilebileceğini anlatmıştır.

4. Yazar. *“Şu an aklımıza gelmemiş olabilir (kazanımları kastediyor). O kazanımların sonunda ünite değerlendirmelerinde birer soru ekleyerek, yavaş yavaş ders kitaplarına bunları ekleyebiliriz. Daha sonra bu bir soru ikiye çıkar. Daha sonra konu anlatım bölümüne doğru yerleşir ve bu ispatla anlatıma doğru gider.”*

9. Yazar ise ders kitaplarında ispata yer verilemeyişi öğrenci seviyelerindeki farklılıkları ve öğretim programını gerekçe göstererek şu şekilde belirtmiştir.

9. Yazar. *“Ders kitaplarında şöyle bir problem de var, tüm öğrencilere hitap etmek zorundasınız. Her yerdeki öğrenciye, dolayısıyla ispattan ziyade daha çok konuları ya da kavramları anlamlandırma üzerinde kalıyorsunuz. Yaaa çok ispat seviyesine kitaplarda çıkamıyorsunuz, onun nedeni de hitap ettiğiniz kitlenin heterojen bir kitle olması, çok karma bir kitle olması. ... Ortaokulda zaten kazanımlar daha kısıtlı olduğu için zaten bunu (ispatı kastediyor) kullanma şansınız yok. Zaten o yönden müfredattan ötürü zaten kısıtlısiniz. Bir de üstüne öğrenci çeşitliliği ortaya çıkınca iyice kısıtlanmaya başlıyorsunuz bu sefer kitapta yani hadi şunun ispatını yaptıralım ya da şunun ispatını öğretmen yapsın gibi bir ifadeye girmek bazen zorluyor.”*

Bu tartışmaları takiben kitap yazarlarına bahsettikleri kısıtlamalar olmasa ispat becerisini ders kitapları aracılığıyla nasıl geliştirecekleri de ek olarak sorulmuştur. Bu soruya 9. Yazar ispat becerisi ile

öğrenci başarı düzey farklılıkları arasındaki ilişkiye değinerek, ispata ders kitaplarında yer verilmesine yönelik olumsuz görüşünü belirtmiştir. 10. Yazar ise ispata yönelik kendi yetersizliğini belirterek ispat becerisini içeren içerikleri kitaplara eklemekte sahip olduğu sınırlılıktan bahsetmiştir.

10. Yazar. “*Hem kitaptaki alan açısından hem öğrenci seviyesi açısından problemler var, yani orada hocam ispat yöntemlerinin evet kullanılmasını isterdim ama orada da açıkçası yani ben hani yazar olarak her konuya uygun ispatı yapabilecek bir şeyim yok, aslında yani o donanıma da o bilgiye de sahip değilim.*”

9. Yazar. “*Olabildiğince nedensellik üzerinde kurgulama yapılabilirse, çocuklara direkt net bilgi değil de en azından olabildiğince adım adım o bilgiyi bulmaya yönlendirecek şekilde etkinliklerin tasarlanması çocukları ispata daha çok yönlendirir ama ders kitaplarında şöyle bir problem de var, tüm öğrencilere hitap etmek zorundasınız. Kısıtlanıyoruz. Sizin kitabınızı okuyacak olanlar belki belli bir seviyenin üstündeki çocuklar ama ders kitabında herkese hitap ettiğiniz için ispat işi kitaptan ziyade artık öğretmene kalıyor ve öğretmen hitap ettiği gruba uygun şekilde mümkünse onu yapabiliyor ama kitapta direkt olarak vermek çok şey gelmiyor, mantıklı gelmiyor bana.*”

Verilen ispat örneğinin değerlendirilmesi temasına ait bulgular

İlkokul ve ortaokul kitabı yazarlarına ilkökul ve ortaokul öğrenci düzeylerine uygun birer ispat sorusu ve bu soruya ilgili düzeydeki öğrencilerin verebileceği olası dört öğrenci yanıtları sunulmuştur. Bu yanıtlar Balacheff (1988)’in acemi deneycilik, kritik deney, jenerik örnek ve düşünce deneyi düzeylerinde uygun olarak hazırlanmıştır. Bu başlık altında bu soruları inceleyen kitap yazarlarına yöneltilen “Verilen sorunun ilkökul/ortaokul düzeyine uygun olduğunu düşünüyor musunuz, bu tarz sorular ilkökul/ortaokul ders kitabında yer almalı mıdır? Açıklayınız.” ve “Verilen dört öğrenci yanıtından hangisi/hangileri verilen ifadenin ispatıdır? Neden?” sorularının analizi yer almaktadır.

Aşağıda yazarlara sunulan sorular ve sorulara verilen olası öğrenci yanıtları yer almaktadır.

“İki tek sayının toplamı her zaman çift sayıdır. Sizce bu ifade her zaman doğru mudur? İfadenin doğruluğunu/yanlışlığını nasıl gösterirsiniz?”

ORHAN	RÜMEYSA
İki tek sayıyı ele alalım, bunlar 3 ve 5 olsun. $3 + 5 = 8$ ve 8 bir çift sayı olduğundan yukarıda verilen ifade doğrudur.	$5 + 7 = 12$ $137 + 231 = 368$ $1001 + 391 = 1392$ Birden fazla deneme yaptım, büyük tek sayıları da denedim. Sonuç hep çift çıktığı için yukarıda verilen ifade doğrudur.
SEZEN	NAZİM
5 sayısını ikili olarak gruplandırırsam,  elde edilir. Yani, iki tane ikili grup ve bir adet de 1 kalanı elde edilir. 13 sayısını ele alırsam yukarıdaki gruplamaya benzer şekilde, 6 adet ikili grup ve bir adet de 1 kalanı olacaktır. İkisini topladığımda, bu sayılardan artan 1’ler bir tane ikili grup oluştururlar. Sonuç olarak ikili gruplama sonucu açıkta kalan 1 olmaz yani toplam çift olur. Bu yüzden, yukarıdaki ifade doğrudur.	Bir tek sayı, ikili olarak gruplandırıldığında daima 1 kalanına verir. İki tek sayıyı topladığımızı düşünelim. Bunların her birinde ikili gruplar ve bir adet de 1 kalanı olacaktır. Bunları topladığımızda elimizde ikili gruplar ve iki adet de 1 kalanı olur. İki adet 1 kalanının toplanması bize bir adet ikili grup verir. Sonuç olarak elimizdeki toplam tamamen ikili gruplardan oluşur. O halde yukarıda verilen ifade doğrudur.

Şekil 1. İlkokul kitabı yazarlarına sunulan soru ve bu soruya verilen olası öğrenci yanıtları

Şekil 1 incelendiğinde “İki tek sayının toplamı her zaman çift sayıdır.” önermesine isimleri Orhan, Rûmeysa, Sezen ve Nazım olan dört öğrencinin verdikleri cevaplar görülmektedir. Orhan’ın yanıtı acemi deneycilik, Rûmeysa’nın yanıtı kritik deney, Sezen’in yanıtı jenerik örnek düzeyine uygun iken Nazım’ın yanıtı düşünce deneyi düzeyine uygundur.

“1’den n’ e kadar olan tam sayıların toplamı $n(n+1)/2$ ’dir. Sizce bu ifade her zaman doğru mudur? İfadenin doğruluğunu/yanlışlığını nasıl gösterirsiniz?”

AYDA	BARİS
$n = 2$ olsun o halde $1 + 2 = 3$ olur. Bu da $2 \cdot 3/2 = 3$ ifadesine eşittir. $n = 3$ olsun o halde $1 + 2 + 3 = 6$ olur. Bu da $3 \cdot 4/2 = 6$ ifadesine eşit olur. O halde, denediğim iki değer için sağlandığı için yukarıdaki ifade doğrudur.	$n = 2$ olsun o halde $1 + 2 = 3$ olur. Bu da $2 \cdot 3/2 = 3$ ifadesine eşittir. $n = 3$ olsun o halde $1 + 2 + 3 = 6$ olur. Bu da $3 \cdot 4/2 = 6$ ifadesine eşit olur. Şimdi daha büyük bir değer için deneyelim. $n = 10$ olsun, yani toplam $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$ olsun. Bu toplamı hesaplırsak 55 elde ederiz. Formülde de $n = 10$ yazıldığında $10 \cdot 11/2 = 55$ elde edilir. O halde, yukarıdaki ifade doğrudur.
IRMAK	AYGÜL
$n = 11$, yani toplam $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11$ olsun. Bu toplamın altına sırayla tersini yazarsak ve toplarsak; $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11$ <u>$11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$</u> $12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 = 11 \cdot 12$ elde edilir. İki kere toplandığından ikiye bölünür ve $11 \cdot 12/2$ elde edilir. 1’den 11’e kadar olan sayıların toplamı gerçekten de formülde $n = 11$ yazılması ile elde edilen $11 \cdot 12/2$ ifadesine eşit olduğundan önermede verilen ifade doğrudur.	$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$ $S = n + n-1 + (n-2) + \dots + 1$ olup bu iki satır toplanırsa, $2S = (1 + n) + (2 + (n-1)) + (3 + (n-2)) + \dots + (n + 1) = (1 + n) + (n + 1) + (n + 1) + \dots + (n + 1) = n(n + 1)$ elde edilir. İfadenin ikiye bölünmesi ile $S = n(n + 1)/2$ elde edilir. O halde verilen ifade doğrudur.

Şekil 2. Ortaokul kitabı yazarlarına sunulan soru ve bu soruya verilen olası öğrenci yanıtları

Şekil 2 incelendiğinde “1’den n’e kadar olan tam sayıların toplamı $n(n + 1)/2$ ’dir.” önermesine isimleri Ayda, Barış, İrmak ve Aygül olan dört öğrencinin verdikleri cevaplar görülmektedir. Ayda’nın yanıtı acemi deneycilik, Barış’ın yanıtı kritik deney, İrmak’ın yanıtı jenerik örnek düzeyine uygun iken Aygül’ün yanıtı düşünce deneyi düzeyine uygundur.

Tüm yazarlar kendilerine sunulan ispat örneklerinin ilgili okul düzeyine uygun olduğunu belirtmiştir. Buna karşın 3 ortaokul kitap yazarı (Yazar 8,9,10) yine de bu tür örneklerin ders kitaplarında yer almasının uygun olmadığını belirtmişlerdir. Bu yazarlar gerekçelerini öğretim programına dayandırmışlar ve aşağıdaki değerlendirmelerde bulunmuşlardır:

8. Yazar. “Ortaokul düzeyinde sıkıntı olmaz bence ama yok, müfredatta yok ama çok da sorun olmaz sanki. Onlardan ispatlamasını istersek uygun olmaz ama biz bir şekilde bunun doğruluğunu gösterebiliriz. Uygun olur mu olmaz mı buna ben karar veremem galiba, müfredatta olmadığı için uygun olmaz demek istiyorum ben buna.”

10. Yazar. “Bunu şu anda bir kazanımla da doğrudan ilişkilendiremiyorum açıkçası. Birden n’e kadar olan tamsayıların toplanmasının böyle bir formülle öğretilmesi gerektiği ile ilgili bir kazanım yok

yani. Çocuklar zaten cebirsel ifadeyi içselleştirmekte biraz zorlanıyor. Bilgi anlamında yeterliler ama oradaki akıl yürütmeyi, muhakemeyi yapabilecek zihinsel yapıda değiller.”

Diğer tüm kitap yazarları bu tür soruların ders kitaplarında yer alması gerektiğini belirtmiştir. Bir ilkokul ders kitabı yazarı (5. Yazar) ve bir ortaokul ders kitabı yazarı (2. Yazar) gerekçelerini bu tür soru yapılarının düzeye uyun olmasına ve öğretim sürecinde bu tür sınıf içi tartışmalarına yer verilmesi gerektiğine bağlayarak şu şekilde sunmuştur:

5. Yazar. *“Bu soru olabilir yani burada öğrenci beyin fırtınası yapıp, sınıfta bunu tartışmalı. Belki Orhan gibi, Rümeysa gibi deneyecek çocuklar, ondan sonra bir genellemeye giderek ispat yapacaklar. Sezen’in ve Nazım’ın genellemesine çıkabilmeli çocuk, bu işlemleri yaptıktan sonra bu mantığı geliştirebilmeli zaten bunu başarabiliyorsak tamamdır.”*

2. Yazar. *“Ortaokul düzeyi için bence uygun. 6. sınıf algılayabilir diye düşünüyorum. 5 için erken olabilir 6 7 8’in hepsinin algılayabileceğini düşünüyorum... 6. sınıfta başlıyor demi cebirsel ifadeler? Ondan dolayı 5 için daha bir soyut belki... Bu tarz sorular yer almalı zaten okuduğunu anlamaya da dayalı.”*

Tablo 10’da ilkokul ders kitabı yazarlarının “Verilen dört öğrenci yanıtından hangisi/hangileri verilen ifadenin ispatıdır? Neden?” sorusuna verdiği cevaplara dair kodlar yer almaktadır. Öğrenci yanıtları Balacheff (1988)’in ispat düzeylerine (acemi deneycilik, kritik deney, jenerik örnek, düşünce deneyi) göre sınıflandırılmıştır.

Tablo 10. İlkokul ders kitabı yazarlarının öğrenci yanıtlarına yönelik görüşleri

Kategori	Kod	Katılımcılar
İlkokul ders kitabı yazarlarının öğrenci yanıtlarına yönelik görüşleri	Acemi deneycilik (Orhan)	3
	Kritik deney (Rümeysa)	3
	Jenerik örnek (Sezen)	3, 5, 7
	Düşünce deneyi (Nazım)	3, 5, 7

Tablo 10’a bakıldığında ilkokul ders kitabı yazarlarının tamamının jenerik örnek ve düşünce deneyi düzeylerindeki öğrenci yanıtlarını verilen önermenin ispatı olarak kabul ettikleri, bir ilkokul ders kitabı yazarının ise tüm öğrenci yanıtlarını verilen önermenin ispatı olarak kabul ettiği görülmektedir. 3. Yazar ispatın ilgili yaş kuşağına bağlı olarak değişebileceğini savunurken diğer yazarlar genellenebilir bir argüman sunma ile ispat arasında bağ kurmuşlardır. İlkokul ders kitabı yazarlarının öğrenci yanıtlarına yönelik görüşleri aşağıdaki gibidir:

3. Yazar. *“Bana kalırsa dördü de ispat. İkisi direkt verilen ifadeden gitmiş ama sonuçta onlar da bir ispat o yaş grubu için. En azından söyleneni bize bir şekilde göstermiş.”*

5. Yazar. *“Orhan ve Rümeysa’nın ki asla ispat değil çünkü yaptıkları bu haliyle ispat olmaz, genelleme yapmamışlar, genelleme yapmak zorundayız, bu genellemeyi de mantıksal bir şeye dayandırmak zorunda Sezen ve Nazım gibi. Onlar da örneklerden yola çıkmışlar ama bu ifadede her zaman şartını bu genellemeyi yaparak sağlayabilmişler.”*

Tablo 11’de ortaokul ders kitabı yazarlarının “Verilen dört öğrenci yanıtından hangisi/hangileri verilen ifadenin ispatıdır? Neden?” sorusuna verdiği cevaplara dair kodlar yer almaktadır. Öğrenci yanıtları Balacheff (1988)’in ispat düzeylerine göre sınıflandırılmıştır.

Tablo 11. Ortaokul ders kitabı yazarlarının öğrenci yanıtlarına yönelik görüşleri

Kategori	Kod	Katılımcılar
Ortaokul ders kitabı yazarlarının öğrenci yanıtlarına yönelik görüşleri	Acemi deneycilik (Ayda)	-
	Kritik deney (Barış)	-
	Jenerik örnek (Irmak)	4
	Düşünce deneyi (Aygül)	1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 11

Tablo 11'e bakıldığında ortaokul ders kitabı yazarlarının tamamının düşünce deneyi düzeyindeki öğrenci yanıtını verilen önermenin ispatı olarak kabul ettikleri görülmektedir. Ayrıca yazarların hiçbirinin acemi deneycilik ve kritik deney düzeylerindeki öğrenci yanıtlarını verilen önermenin ispatı olarak kabul etmediği ve yalnızca 4. Yazarın jenerik örnek düzeyindeki öğrenci yanıtını verilen önermenin ispatı olarak kabul ettiği görülmektedir. Yazarlar örnek kullanarak önermenin doğrulanabileceğini, tüm durumları kapsayan bir genelleme olmadığını belirtmişlerdir. Bazı yazarlar, ortaokul düzeyindeki öğrencilerin Irmak (Jenerik örnek) ve Aygül (Düşünce deneyi) düzeyinde akıl yürütemeyeceğini, onlardan ispat yapmalarını istense Ayda (Acemi deneycilik) ve Barış (Kritik deney) gibi yanıtlar vereceklerini ifade etmişlerdir. Bazı Ortaokul ders kitabı yazarları da Irmak'ın yanıtındaki (jenerik örnek düzeyindeki yanıt) akıl yürütmeyi üst düzey bulmalarına rağmen bu yaklaşımın tüm durumları kapsayan bir genelleme olarak nitelememişlerdir.

4. Yazar. *"Aygül bunun ispatıdır ama Iрмаğınki öğrenci düzeyine uygun olanıdır. (Ayda ve Barışın cevabına bakıyor) Bunun ispatıdır demem mümkün değil. Sadece 2 tane örnekle bunu denemeye çalıştığında doğru sonuca ulaşamayabilir. (Irmak'ın cevabına bakıyor) Irmak'ın vermiş olduğu cevabı da her öğrencinin verebileceğini düşünmüyorum. Hepsinin ilk yapacağı şey önce yerine koyma metoduyla bunu deneyerek yapmaktır."*

9. Yazar. *"Ayda ve Barışınki ispat değil. Irmak tek bir değer üzerinden yola çıktığı için o da değil. Ama Aygül'ünki işte o cebir işin içine girdiği için, geneli ifade ettiği için n'in herhangi bir sınırlaması yok. Dolayısıyla bence Aygül'ünki ispat. Diğerleri doğruluğa kendini inandırma gibi."*

Tartışma, Sonuç ve Öneriler

1 - 8. sınıflar Matematik Dersi Öğretim Programı (2018) kullanılarak yazılan matematik ders kitapları yazarlarının ispat algılarını ve ispatın okul matematiğindeki yerine ilişkin görüşlerini ortaya koymayı amaçlayan bu çalışmada yazarlardan ispat kavramını tanımlamaları istendiğinde yazarlar, ağırlıklı olarak ispatı matematik ve bilimsellik ile ilişkilendirerek parçalı ve uzun tanımlar yapmışlardır. Eş vd. (2019) matematik öğretmen adaylarının bilim matematik ilişkisine dair algılarına yönelik yaptıkları çalışmalarında, matematik öğretmen adaylarının matematiği bir bilim dalı ve bilime yardımcı bir alan olarak gördüklerini ayrıca matematiksel bilgi üretme sürecini de problem çözme ve ispat süreci olarak değerlendirdiklerini ortaya koymuşlardır. İki çalışmanın bulgularının bu anlamda benzerlik gösterdiği söylenebilir. Tanımlarını yaparken doğruluk, ikna, öğrenme ilişkisini kuran yazarlar da olmuştur. Yazarlar kendilerine ispatın işlevlerinin neler olduğu sorulduğunda, ispatın farklı işlevlerinden bahsetmişlerdir. Yazarların büyük kısmı ispatın doğrulama ve yanlışlama, iletişim kodlarıyla ilişkili işlevlerinden bahsetmişlerdir, ayrıca az sayıda da olsa, açıklama, öğrenme, keşfetme, genelleme, öz yeterlilik, matematiksel düşünme kodlarına da değinen yazarlar olmuştur. Literatürde ispatın tanımı ve amacına yönelik görüşleri inceleyen çalışmalara bakıldığında ispatın doğrulama, öğrenme, iletişim, keşfetme,

açıklama, genelleme ile ilişkilendirildiği görülmektedir (Çontay ve Duatepe-Paksu, 2019; Güler ve Dikici, 2012; Konur ve Keskin, 2022; Özdemir ve Kaplan, 2014). Bu durum, ulaşılan sonuçların paralellik gösterdiği şeklinde yorumlanabilir.

Yazarlara ispat yapmaya ihtiyaç duyup duymadıkları sorulduğunda tüm yazarlar ders anlatırken ispata ihtiyaç duyduklarını ifade etmişlerdir. Ayrıca yazarlar matematik çalışırken de ispat yapmaya ihtiyaç duyduklarını belirtmişlerdir. Benzer olarak Konur ve Keskin (2022) yaptıkları çalışmada, çoğu öğretmenin matematiksel ispatı meslek hayatlarında kullandıklarını ortaya koymuşlardır. Ancak Stylianides (2009) çalışmasında öğretmenlerin çoğunun sınıf içi uygulamalarda örnekler ve mantıksal açıklamalarla sınırlı şekilde ispatı derse entegre ettiklerinden bahsetmiştir. Üç yazar, önceki sorularda ispat ile öğrenme arasında bir ilişki kurarak yanıtlar üretmelerine rağmen kitap yazarken ispat yapmaya ihtiyaç duyduğunu belirten tek bir yazar olmuştur. Bunun nedeni kitap yazarlarının ders kitabı yazarken karşılaştıkları güçlükler ve öğretim programı olabilir. Nitekim 6. Yazar ispat yapmaya duyduğu ihtiyacı anlatırken ilkökul matematik ders kitabı yazma sürecine ve bu süreçte yaşadığı zorluğa değinmiştir.

Yazarlara ispat yapmanın matematiği öğrenme ile ilişkisi olup olmadığı sorulduğunda, önceki sorularda ispat ile öğrenme arasında sınırlı ilişki kurmalarına rağmen yazarların tamamı ispatın matematiği öğrenme ile ilişkili olduğunu ifade etmişlerdir. Görüşlerindeki bu değişimin nedeni, sonraki soruların yazarları ispatın öğrenme ile ilişkisini düşünmeye teşvik etmesi olabilir, ayrıca yazarlar ispat üzerine düşünüp konuştukça anlayışları ve farkındalıkları da gelişmiş olabilir. Görüşmenin devamında yazarlara matematiksel becerilere dair görüşlerinin alınabileceği bir soru da sorulmuştur. Yazarların bu soruya verdikleri yanıtlarında ilk etapta ispatı öğrenmeyi etkileyecek bir beceri olarak görmediklerini ifade etmişlerdir. Yazarların matematik dersi ile ilişkili saydıkları beceriler arasında ispat becerisi bir ifade olarak doğrudan yer almamıştır. Sayılan beceriler arasında ispat yapma becerisinin bulunmaması üzerine yazarlara “İspat yapma bir beceri midir?” sorusu da yöneltildiğinde 8. Yazar dışındaki tüm yazarlar ispat yapmanın da bir beceri olarak ele alınabileceğini ifade etmişlerdir.

Yazarlar görüşme boyunca ispata yönelik değişen, süreç içerisinde ispat ile öğrenme arasında daha kuvvetli ilişki kuran yanıtlar üretebilmişlerdir. Bu eğilim kitap yazma süreçlerinde ispat becerisinin gelişimine yönelik bir perspektifi taşımadıklarına işaret etmektedir. Ders kitaplarında ispat düşüncesinin gelişimine yönelik eksikliklerin ortaya konulduğu çeşitli çalışmaların (Dituri, 2013; Doğan, 2019; Köğçe ve Şahin, 2021; Şengül ve Kırıl, 2023) sonuçlarını ortaya koyan faktörlerden birisi ders kitabı yazarlarıdır, bu araştırmanın ders kitabı yazarlarında ortaya koyduğu sonuçlar bahsi geçen çalışmaların sonuçlarını etkileyen faktörlerden birisi olmaktadır. Yazarların bu eğilimine rağmen görüşmenin ilerleyen bölümlerinde yazarlara ispatın öğretim sürecinde hangi kademelerde yer alması gerektiğine dair görüşleri de sorulmuştur. Önceki sorularda ilk ve ortaokul düzeylerine dair daha çekinceli cevap ileten yazarların önemli bir kısmı bu soruya okul öncesi döneminden itibaren yanıtını verebilmiştir. Yazarlar ispatın okul öncesinden lise düzeyine kadar farklı düzeylerde yer almaya başlayabileceğinden bahsetmişlerdir. Yanıtlar daha çok okul öncesi ve ilkökul düzeyinde yoğunlaşmıştır. Aylar (2014), çalışmasında ispatın matematik öğretimini destekleyen bir araç olarak görülmeye başlandığını, bu nedenle anaokulundan itibaren her düzeyde gerçekleştirilebileceğini belirtmiştir. Nitekim Weber ve Mejía-Ramos (2011) çalışmalarında öğretmenlerin ispatı mantıksal doğrulama olarak görmelerinin yanı sıra öğrenme aracı olarak da gördüklerini ortaya koymuşlardır. Yazarların görüşleri ile bu düşünce paralellik göstermektedir. Yazarlar

kendileri ders kitaplarına bu eğilimi tam olarak yansıtmamasalar da genel olarak ispatın ezberlemeyi engelleyeceği gerekçesi ile erken düzeylerden itibaren ele alınması gerektiğini belirtmişlerdir. İspatın öğrenci seviyesine göre uyarlanabileceğini de ifade etmişlerdir.

Yazarların öğretim programını ispat açısından nasıl bulduklarını değerlendirebilmek için onlara öğretim programındaki amaçların ispatla ilişkisi sorulmuştur. Yazarların hiçbirinin öğretim programındaki amaçları hatırlamaması en dikkat çekici bulgulardan biri olmuştur. Yazarların çoğunluğunun programın amaçları gösterildiğinde akıl yürütme, problem çözme, matematiksel düşüncelerini açıklama gibi beceriler gerektiren amaçlar ile ispatı ilişkilendirdikleri görülmektedir. Karakuş ve Korkutan (2021), yaptıkları çalışmada 2013 yılına göre 2018 yılında revizyon edilen öğretim programında öğrencilerin fikirlerini mantıklı biçimde ifade etmeleri ve arkadaşlarının fikirlerindeki eksiklikleri ortaya çıkabilmeleri açısından program amaçlarının önceki programlara göre ön planda olduğunu vurgulamıştır. Aynı zamanda Beyindi (2018)'de, öğretim programında öğrencilerin matematiksel muhakeme becerilerinin geliştirilmesinin öneminden bahsetmiştir. Ders kitabı yazarları dolaylı bir ilişki kurarak da olsa bu çalışmalarda ön plana çıkarılan düşünme biçimleri ile ispat arasında bir ilişki kurarak amaçlara dair değerlendirmelerde bulunmuşlardır. Yine de görüşmenin ilerleyen kısımlarda ispat düşüncesinin gelişiminin ders kitaplarına yansımalarının ne düzeyde mümkün olabileceğine dair çekincelerine de değinmişlerdir.

Öğretim programında yer alan amaçlara ek olarak kitap yazarlarından programdaki kazanımları da ispat ile ilişkilendirmeleri istendiğinde, yazarların yaklaşık yarısının kazanımları hatırlamıyor olması dikkat çekici biri durum ortaya koymuştur. Yazarlar “Pisagor bağıntısı oluşturma” ve “özdeşlikleri modelle açıklama” gibi geometri ve cebir öğrenme alanlarındaki kazanımlarla ispatı kolayca ilişkilendirebilmişlerdir. Öğretim programında yazarlar tarafından az sayıda kazanımın ispatın ilişkilendirilmiş olması, yeterli sayıda ispat becerisi kullanmayı gerektiren kazanımın programda yer almadığı ve yazarların ders kitabı yazım sürecinde kazanımları bu bağlamda ele almadıklarını göstermektedir. Benzer olarak Zeybek Şimşek ve Kılıçoğlu (2022) gerçekleştirdikleri çalışmada öğretim programındaki kazanımların en çok problem çözme ile ilişkili olduğunu, en az ise akıl yürütme ve ispat ile ilişkili olduğunu ortaya koymuşlardır. Yazarlar kazanımlarla ispatı ilişkilendirirken ders kitaplarına ispatı nasıl dahil ettiklerinden değil, ispat becerisinin kitaplara nasıl yansıtılacağından da bahsetmişlerdir. Kendi kitap yazma deneyimlerini örneklenirerek görüşmedeki sorulara yanıt vermemiş olmaları, şu anki ders kitaplarının ispat düşüncesinin gelişimine yönelik etkisinin kısıtlılığını ortaya koymaktadır. Yazarlar mevcut ders kitapları her öğrenci seviyesine uygun olacak şekilde hazırlandığı için kitaplarda ispatla ilgili etkinliklerin yer alması hususundaki sınırlılıklara da değinmişlerdir. Bu şekilde bir sınırlılığa sahip olduklarını düşünen kitap yazarlarının ortaya koyduğu ürünlerde de ispat becerisine ait etkinliklerin az olduğu düşünülebilir. Nitekim Şengül ve Kırıl (2023) ve benzer şekilde Doğan'ın (2019) gerçekleştirdikleri çalışmalar bu düşünceyi destekleyen bulgular ortaya koymuştur.

Yazarlar görüşme esnasında bir süre düşündükten ve ilgili kazanım ve amaçları inceledikten sonra, matematik öğretim programındaki (MEB, 2018) bazı amaç ve kazanımların ispat ile ilişkili olduğunu belirtmişlerdir, buna rağmen bu durumun ders kitaplarına yansımalarının sınırlı olduğunu da vurgulamışlardır. Bu durum Zeybek vd. (2018)'nin ortaokul matematik ders kitaplarındaki etkinlikleri inceledikleri çalışmalarındaki bulgularla; ders kitaplarında bulunan ispat ve muhakeme etkinliklerinin sayısının matematik eğitimcileri tarafından ve güncel eğitim reformlarının önerileri ile uyumadığına

yönelik tespitleri ile uyumludur. Bu durum bu eğilimin bir süredir ders kitaplarında mevcut olduğunu ortaya koymaktadır.

Çalışmanın son kısmında ilkokul ve ortaokul öğrenci düzeylerine uygun birer ispat sorusu yazarlara gösterildiğinde tüm yazarların ispat örneklerinin okul düzeyine uygun olduğunu belirtmelerine rağmen ders kitabında yer alması hususunda endişelerini belirtmişlerdir. Yazarların bu şekilde düşünmesinde 2018 öğretim programında ispat becerisinin yeterli kadar vurgulanmamış olması ve içeriği kazanımlarla ilişkilendirememeleri etkili olmuştur. Yazarlar ispat örneğine ilişkin öğrenci yanıtlarını incelerken bir ifadenin doğruluğunu gerekçelendiren, genelleme yapılabilen ve cebirsel ifade kullanılan durumları ispat olarak kabul etmişlerdir. Görüşmenin önceki bölümlerinde ispat düşüncesinin gelişiminde öğrencilerin düzeylerine uygun içeriklerin öğretim sürecine dahil edilebileceğini savunan yazarlar, ispatın ne olduğuna dair bu örnekler üzerinde gerçekleştirdikleri değerlendirmelerde örnek vererek ifadenin doğruluğunun sınırlı olduğu argümanlara şüpheli yaklaşmış, bu örnekleri ispat olarak değerlendirmemişlerdir. Dituri (2013), çalışmasında öğretmenlerin matematiksel iddiaları kanıtlamak için sık sık deneysel örnekler kullandıklarını belirtmiştir. Bazı durumlarda matematik öğretmenleri deneysel, örneğe dayalı argümanların sınırlılıklarını bilmelerine rağmen bu örnekler öğrencilerin düzeylerine uygun olduğu için bu yaklaşımları ispat olarak kabul edebilmektedirler (Knuth, 2002). Dalkılıç ve Zeybek Şimşek'in (2022) öğretmen ve öğretmen adayları ile gerçekleştirdiği çalışma da bu sonucu ortaya koymaktadır. Bu çalışmada ise ders kitabı yazarları bu eğilimi sergilememiştir. Bu sonuç ders kitabı yazarlarının örnekle doğrulamanın ispat düşüncesinin gelişiminde sahip olduğu sınırlılıkların farkında olduğunu ortaya koymaktadır. Buna karşın yazarların önemli bölümünün jenerik örnek türündeki düzeyin içerdiği genelleme yaklaşımına dair bir değerlendirmede bulunmaması dikkat çekicidir. Bu durum yazarların matematik eğitiminde ispata yönelik deneyimlerinin sınırlılığından kaynaklanıyor olabilir.

Matematik ders kitabı yazarlarının ispat algılarının ve ispatın okul matematiğindeki yerine ilişkin görüşlerinin ortaya koyulmasını amaçlayan bu araştırmanın sonuçları literatürü genel olarak desteklemektedir. Çalışmada ulaşılan önemli sonuçlar; yazarların ispatı ağırlıklı olarak matematik ve bilimsellik ile ilişkilendirerek tanımlayabilmeleri, ispatın işlevlerine değinebilmeleri, ders anlatırken ispata ihtiyaç duyduklarını belirtmeleri, ispat ile öğrenme arasında bir bağ kurabilmeleri, ispatın okul öncesinden lise düzeyine kadar farklı düzeylerde yer almaya başlayabileceğinden bahsetmeleri, ispat yapmanın da bir beceri olarak ele alınabileceğini ifade etmeleridir. Bu sonuçlar literatürde matematik öğretmenleri ile yapılan çalışmaların sonuçları ile paralellik göstermektedir. Ayrıca, yazarların kitap yazarken ispat yapmaya ihtiyaç duyduklarını belirtmemeleri, kendilerine amaç ve kazanımlarla ilgili sorulan sorularda amaç ve kazanımları hatırlayamamaları dikkat çekici bir sonuç olmuştur. Yazarlar kendilerine gösterilen amaç ve kazanımları inceledikten sonra bazılarının ispat ile ilişkili olduğunu belirtmişlerdir, kitaplarda ispat becerisinin nasıl yansıtılacağı üzerine fikir yürütmüşlerdir ancak kendi kitap yazma deneyimlerinden örnek vermemişlerdir ve ispat becerisinin ders kitaplarına yansımalarının sınırlı olduğunu da vurgulamışlardır. Yazarlar, mevcut ders kitaplarının heterojen bir öğrenci grubuna hitap etmesi gerektiği için ispat etkinlikleri konusunda sınırlamalar olduğunu da belirtmişlerdir. Çalışmanın son kısmında, yazarlar bazı olası ispat örneklerini değerlendirmişlerdir. Yazarlar, deneysel, örneğe dayalı argümanları ispat olarak kabul etmemişlerdir. Bu sonuç ders kitabı yazarlarının örnekle doğrulamanın ispat düşüncesinin gelişiminde sahip olduğu sınırlılıkların farkında olduğunu ortaya koymaktadır ve bu sonuç literatürdeki çalışmaların

sonuçlarından farklılık göstermektedir. 2018 programında bir beceri olarak ispata sınırlı düzeyde yer verildiği göz önüne alındığında, ilk ve ortaokul matematik ders kitabı yazarları ile gerçekleştirilen bu araştırmanın bulgularının sınırları şaşırtıcı değildir. Yine de yazarların ispata yönelik yaklaşımları tüm eksikliklere rağmen çok olumsuz değildir.

Kitap yazarları öğretim programlarının ders kitaplarına yansıtılmasında en önemli rolü oynayan kişilerdir. Dituri (2013), müfredatların ispat becerisini içermedikleri durumlarda bile, öğretmenler ve ders kitabı yazarlarının ders ve kitap içeriklerine ispat becerisine yönelik eklemeler yapmalarının mümkün olduğunu ifade etmiştir. Bu nedenle, kitap yazarları ya matematik eğitimindeki güncel gelişmelere, kavramlara, becerilere hâkim olanlar arasından seçilmeli ya da bu bağlamlar açısından yazarları geliştirecek eğitim vb. araçlar yaratılmalıdır. İspat becerisi 2024 eğitim öğretim programlarında yoğunluğu tüm kademelerde artan bir beceri olmuştur. Bu araştırma şu an belirli kademelerde uygulanan Matematik Dersi Öğretim Programının (MEB, 2018) hem içeriğinin hem de bu program temelinde yazılan ders kitaplarının ispat becerisi bağlamında taşıdığı eksikliklerin başka bir kaynağına, ders kitabı yazarlarına yönelik verileri ortaya koymuştur. Yeni program temelinde yazılacak ders kitaplarının yazarlarının belirleniminde bu araştırmanın sonuçları ve yazarlarda tespit edilen eksiklikler dikkate alınmalıdır. Ders kitabı yazarlarının öğretmenler arasından belirlendiği ve hem öğretmenlerin ispat algı ve beceri düzeylerine ilişkin araştırmaların sonuçları (Dalkılıç ve Zeybek Şimşek, 2022; Demircioğlu ve Tuncay, 2018; Öztürk ve Kaplan, 2018) hem de bu araştırmanın sonuçları birlikte göz önüne alındığında, yeni belirlenecek ders kitabı yazarlarının ispat becerisinin gelişimi ve bu becerinin ders kitaplarına yansıtılabilmesi için eğitimler düzenlenmelidir. Ayrıca ders kitabı yazarları belirlenirken yazarların matematik eğitiminde güncel tartışmalara hâkim olması, beceri temelli öğretim süreçlerini heterojen öğrenci yapılarını kapsayacak şekilde, farklılaştırma ve zenginleştirme etkinlikleriyle birlikte planlayabilmeleri dikkate alınabilir.

Sınırlılıklar

Katılımcılar yalnızca 2023 yılında matematik ders kitabı yazarlarından oluşmaktadır. Çalışmaya Milli Eğitim yayınları ilkökul ve ortaokul matematik ders kitabı yazarları dahil edilmiştir, özel yayın evlerine ders kitabı yazan yazarlar araştırmaya dâhil edilmemiştir.

Beyanlar

Etik beyan: Araştırma kapsamında araştırma verilerinin toplanmasından önce Ankara Üniversitesi Etik Kurul Başkanlığı'ndan 11/07/2023 tarihli ve 14/138 sayılı izin alınmıştır.

Çıkar çatışması: Yazarların çıkar çatışması yoktur.

Veri erişilebilirliği: Veriler, yazarlardan talep üzerine sağlanabilir.

Kaynaklar

Alkan, C. (1998). *Eğitim teknolojisi*. Anı yayıncılık.

Aydoğdu İskenderoğlu, T. (2016). Kanıt ve kanıt şemaları. Bingölbali, E., Arslan, S., & Zembat, İ. Ö.

- (Ed.), *Matematik eğitiminde teoriler içinde* (s. 65-84). Pegem Akademi.
- Aylar, E. (2014). An analysis of seventh graders' skills in doing proofs. *Ankara University Journal of Faculty of Educational Sciences (JFES)*, 47(1), 351-376.
- Baki, A. (2008). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi*. Harf Eğitim Yayıncılık.
- Baki, A. (2020). *Matematik öğretmen bilgisi*. Pegem Akademi.
- Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers, and children* (pp.216-238). Hodder & Stoughton.
- Balacheff, N. (1991). Treatment of refutations: Aspects of the complexity of a constructivist approach to mathematics learning. In E. Von Glaserfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 89-110). Springer.
- Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7(1-2), 23-40.
- Beyindi, S. (2018). 2013 ve 2018 ortaokul matematik dersi öğretim programlarının karşılaştırılması. *Birey ve Toplum Dergisi*, 8(15), 117-200.
- Büyüköztürk, Ş., Çakmak, E. K., Akgün, Ö. K., Karadeniz, Ş., & Demirel, F. (2020). *Eğitimde bilimsel araştırma yöntemleri*. (4. Baskı). Pegem Akademi.
- CCSSI (Common Core State Standards Initiative). (2010). *Common core state standards for mathematics*. National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.
- Cihan, F., & Doruk, M. (2024). 2024 ortaöğretim matematik dersi öğretim programının SOLO taksonomisi ve bilişsel istem düzeylerine göre değerlendirilmesi. *Uşak Üniversitesi Eğitim Araştırmaları Dergisi*, 10(3), 144-157.
- Cooper, J. L., Walkington, C. A., Williams, C. C., Akinsiku, O. A., Kalish, C. W., Ellis, A. B., & Knuth, E. J. (2011). Adolescent reasoning in mathematics: exploring middle school students' strategic approaches in empirical justifications, *In Proceedings of the 33rd Annual Conference of the Cognitive Science Society*. Boston, MA.
- Çontay, E. G., & Duatepe Paksu, A. (2019). Ortaokul matematik öğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin görüşleri. *The Journal of Limitless Education and Research*, 4(1), 64-89.
- Dalkılıç T., & Zeybek Şimşek, Z. (2022). Akademik erteleme matematik öğretmenlerinin ve öğretmen adaylarının argüman oluşturma ve değerlendirme süreçlerinin incelenmesi. *Pamukkale Eğitim Fakültesi Dergisi*, 54, 357-384. doi:10.9779.pauefd.814059
- Demircioğlu, Ö. Ü. H., & Tuncay, H. A. (2018). Matematik öğretmen adaylarının, matematik öğretmenlerinin ve akademisyenin ispat becerilerinin incelenmesi. *Jass Studies-The Journal of Academic Social Science Studies*, 73, 493-508. <http://dx.doi.org/10.9761/JASSS7906>
- Demirel, Ö., & Kiroğlu, K. (2021). *Ders kitabı incelenmesi*. Pegem Akademisi
- Dituri, P. (2013). *Proof and reasoning in secondary school algebra textbooks*. Columbia University.
- Doğan, M. F. (2019). Opportunities to learn reasoning and proof in eighth-grade mathematics textbook. *Inonu University Journal of the Faculty of Education*, 20(2), 601-618.
- Eş, H., Özdemir, A., & Kaplan, M. (2019). Matematik bir bilim dalı mıdır? Matematik öğretmen adaylarının bilim-matematik ilişkisine dair algıları. *Kastamonu Education Journal*, 27(1), 407-419.
- Fawcett, H. P. (1995). *The Nature of Proof*. Thirteenth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Güler, G., & Dikici, R. (2012). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Education Journal*, 20(2), 571-590.
- Hanna, G. (1991). Mathematical proof. *In Advanced mathematical thinking* (pp. 54-61). Springer.
- Hanna, G. (2018). Proof and proving in mathematics education research. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed., pp. 247-278). Routledge.

- Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students proof schemes: Results from exploratory studies, *CBMS Issues in Mathematics education*, 7, 234-283.
- Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward Comprehensive Perspectives on the learning and teaching of proof. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning* (805-842). National Council of Teachers of Mathematics.
- Herbst, P.G. (2002). Engaging students in proving: Adouble bind on the teacher. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33, 3, 176-203.
- Kaplan, A., Doruk, M., Öztürk, M., & Duran, M. (2016). Matematik ve matematik eğitimi öğrencilerinin matematiksel ispata yönelik görüşleri arasında fark var mıdır. *Journal of Human Sciences*, 13(3), 6020-6037.
- Karakuş, F., & Korkutan, E. (2021). Ortaokul matematik ders kitaplarında geometri ve ölçme konularına yönelik yapılan ispatların muhakeme ve ispat analitik çerçevesi kapsamında incelenmesi. *Manisa Celal Bayar Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 9(1), 1-16.
- Knuth, E. J. (2002). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teachers Education*, 5, 61 – 88.
- Knuth, E. J. (2002a). Proof as a tool for learning mathematics. *The Mathematics Teacher*, 95(7), 486-490.
- Konur, K., & Keskin, B. (2022). Matematik öğretmenlerinin ispat kavramına ilişkin görüşleri. *Türkiye Bilimsel Araştırmalar Dergisi*, 7(2), 342-353.
- Köğçe, D., & Şahin, H. N. (2021). Ortaokul matematik ders kitaplarındaki ispat etkinliklerinin incelenmesi. *Turkish Computer & Mathematics Education Symposium Tam Metin Kitabı içerisinde* (s. 41-56).
- Mariotti, M. A. (2006). *Proof and proving in mathematics education*. A. Gutierrez, & P. Boero (Ed.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (pp. 173-204). Sense Publishers.
- Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook* (2nd ed). Sage Publications, Inc.
- Millî Eğitim Bakanlığı. (2018). *Matematik dersi öğretim programı (ilkokul ve ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. Sınıflar)*. Millî Eğitim Bakanlığı Yayınları. <https://mufredat.meb.gov.tr/ProgramDetay.aspx?PID=329>
- Millî Eğitim Bakanlığı. (2024a). *Ortaokul matematik dersi öğretim programı (5, 6, 7 ve 8. Sınıflar)*. Millî Eğitim Bakanlığı Yayınları. <https://mufredat.meb.gov.tr/ProgramDetay.aspx?PID=1978>
- Millî Eğitim Bakanlığı. (2024b). *İlkokul matematik dersi öğretim programı (1, 2, 3 ve 4. Sınıflar)*. Millî Eğitim Bakanlığı Yayınları. <https://mufredat.meb.gov.tr/ProgramDetay.aspx?PID=1972>
- Millî Eğitim Bakanlığı. (2024c). *Ortaöğretim matematik dersi öğretim programı (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar)*. Millî Eğitim Bakanlığı Yayınları. <https://mufredat.meb.gov.tr/ProgramDetay.aspx?PID=1991>
- Moralı, S., Uğurel, I., Tüknüklü, E., & Yeşildere, S. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 14(1), 147-160.
- Nasibov, F., & Kaçar, A. (2005). Matematik ve matematik eğitimi hakkında. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 13(2), 339-346.
- NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, NCTM.
- Oxford American Dictionary. (2004). New York, NY: Oxford University Press.
- Özdemir, F., & Kaplan, A. (2014). Öğretmen adaylarının öğrenme stillerine göre matematiksel ispat hakkındaki görüşlerinin incelenmesi. *Amasya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 3(2), 410-429.
- Öztürk, M., & Kaplan, A. (2018). Cebirsel ispat yapma sürecinin bilişsel açıdan incelenmesi: Bir karma yöntem araştırması. *Eğitim ve Bilim*, 44(197), 25-64.
- Patton, M. Q. (1990). *Qualitative evaluation and research method* (2th ed.). Sage Pub.
- Pınar, F. N., & Ocak, G. (2025). 2018 Matematik dersi öğretim programı 5. sınıf kazanımlarının Bloom ve Haladyna Taksonimleri'ne göre 21. yy becerileri açısından incelenmesi. *Anadolu Journal Of*

- Educational Sciences International*, 15(2), 471-506. <https://doi.org/10.18039/ajesi.1565450>
- Sarı Uzun, M. (2020). Öğrenenlerin ispat yapma davranışları/ispat şemaları. I. Uğurel (Ed.), *Matematiksel ispat ve öğretimi içinde* (s. 189- 225). Anı Yayıncılık.
- Stylianides, A. J. (2009). Teachers' understanding of proof and proving in mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 75–97. <https://www.jstor.org/stable/30034869>
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Weber, K. (2017). Proving and proving in the mathematics classroom. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 157–190). Reston, VA: NCTM.
- Şengül, S., Elmalı, E. N., & Çorbacı, Z. (2021). İlköğretim matematik dersi öğretim programlarının 21. yüzyıl becerileri açısından incelenmesi. *Pearson Journal*, 6(16), 332–353. <https://Doi.Org/10.46872/Pj.446>
- Şengül, S., & Kırıl, B. (2023). Matematik ders kitaplarında matematiksel akıl yürütme ve ispat. *Yaşadıkça Eğitim*, 37(2), 508-530.
- Thompson, D. R., Senk, S. L., & Johnson, G. J. (2012). Opportunities to learn reasoning and proof in high school mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(3), 253-295. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.43.3.0253>
- Türk Dil Kurumu. (2020). *Türk dil kurumu yazım kılavuzu*. Türk Dil Kurumu Yayınları.
- Uğurel, I. (2020). İspatın sahip olduğu roller ve işlevler. Uğurel, I. (Ed.), *Matematiksel İspat ve Öğretimi içinde* (s.113-148). Anı Yayıncılık.
- Van Dormolen, J. (1977). Learning to understand what giving a proof really means, *Educational Studies in Mathematics*, 8, 27-34.
- Weber, K. (2005). Problem solving, proving and learning: The relationship between problem solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. *Journal of Mathematical Behaviour*, 24, 351-360.
- Weber, K., & Mejía-Ramos, J. P. (2011). Why and how mathematicians read proofs: An exploratory study. *Educational Studies in Mathematics*, 76(3), 329–344. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9284-4>
- Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2016). *Sosyal bilimlerde nitel araştırmalar* (10. Baskı). Seçkin Yayıncılık.
- Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2021). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Seçkin Yayıncılık.
- Yıldırım, C. (2000). *Matematiksel düşünme*. Remzi Kitapevi.
- Zeybek, Z., Üstün, A., & Birol, A. (2018). Matematiksel ispatların ortaokul matematik ders kitaplarındaki yeri. *Ilkogretim online*, 17(3), 1317-1335.
- Zeybek Şimşek, Z., & Kılıçoğlu, E. (2022). Ortaokul matematik dersi öğretim programı kazanımlarının süreç standartları kapsamında incelenmesi. *Batı Anadolu Eğitim Bilimleri Dergisi*, 13(2), 1440-1459.

Extended Abstract

Introduction

Mathematical proofs play a key role in achieving the learning objectives of mathematics education, as they are performed to demonstrate the accuracy of a result with different justifications, to inform and convince others about this issue, and to place the obtained result within a system (Hanna, 1991). At the same time, proof takes on various roles and functions beyond simply showing the truth or falsity of a statement (Kaplan et al., 2016).

Proof is one of the basic elements in mathematics education to create conceptual knowledge and provide meaningful learning, without memorization (Aylar, 2014). Similarly, in school mathematics, explaining mathematical concepts and terms on a foundational basis helps students understand mathematics. Proofs provide students with the opportunity to develop their mathematical thinking skills, increase their problem-solving skills, and understand mathematical concepts more deeply. For this reason, proof is an important tool in learning mathematics (Knuth, 2002).

Proof schemes are ways of thinking used in the process of determining the truth or falsity of mathematical statements; in this process, individuals use various methods to convince, explain and prove themselves or others (Aydoğdu İskenderoğlu, 2016). Balacheff (1991) mentioned three levels of proof in his proof scheme: pragmatic proofs, conceptual proofs and demonstration. In pragmatic proofs, the desired result or rule is verified based on examples. This level is divided into three categories depending on the examples used. These are pure empiricism, critical experiment and generalizing example (Sarı Uzun, 2020). Conceptual proofs are more abstract than pragmatic proofs. This level includes the thought experiment category. In the thought experiment category, mathematical concepts, inferences and theorems, not examples, are used to perform the operations and basic relationships in the proof. The most advanced level of Ballacheff's proof scheme is the demonstration level. At this stage, knowledge is organized within a theoretical framework that includes logical rules, definitions, and theorems (Sarı Uzun, 2020).

Teacher competence and textbooks are important factors in developing students' proof skills. Since textbook writers are the ones who transform curriculum into concrete materials, they act as a bridge between curriculum and textbooks. Therefore, textbook authors' proof skills and perceptions of proof are of critical importance for the place of proof in textbooks. Considering the importance of the development of proof thinking from an early age and the inadequacies of textbooks and curricula for primary and secondary schools in this area, determining the approach of authors working at these levels and eliminating the deficiencies identified in this area is an important topic. In this study, based on this context, it is aimed to reveal the proof perceptions of the authors of mathematics textbooks written using the 1st - 8th grade Mathematics Course Curriculum (2018) and their views on the place of proof in school mathematics.

Method

This qualitative case study aims to determine how authors of mathematics textbooks perceive proofs and their significance in mathematics education. The participants were selected through criterion sampling, a purposeful technique. Criteria included being a 2023 mathematics textbook author and writing a primary

or secondary school textbook for National Education. Eleven authors met these criteria. The data for this research were collected through interview forms consisting of semi-structured questions prepared by the researchers. The semi-structured interview form used in the data collection process of the research consisted of two parts. The first of these parts included questions about the demographic characteristics of the participants. The second part included four parts including questions about the perception of proof, mathematics education and proof, curriculum and evaluation of the proof and the given proof example to answer the research problems.

After the interviews were completed, the recorded audio files were transcribed and analyzed using the content analysis method. Coding was done separately by two different researchers and codes were created. Later, the third researcher was included in the process and the codes were combined to create categories and the categories were combined to create themes.

Findings

The results of the study, which aimed to reveal the perceptions of mathematics textbook authors on proof and their views on the place of proof in school mathematics, generally support the literature. The important results reached in the study are that the authors can define proof by mainly associating it with mathematics and scientific knowledge, can touch on the functions of proof, state that they need proof while teaching, can establish a connection between proof and learning, mention that proof can start to take place at different levels from preschool to high school, and state that making proofs can also be considered as a skill. These results are parallel to the results of studies conducted with mathematics teachers in the literature. In addition, it was a striking result that the authors did not state that they needed to make proofs while writing books and could not remember the purposes and achievements when asked questions about them. After examining the objectives and achievements shown to them, the authors stated that some of them were related to proof, they thought about how proof skills would be reflected in the books, but they did not give examples from their own book writing experiences, and they also emphasized that the reflection of proof skills in the textbooks was limited. The authors also stated that there were limitations in proof activities because the current textbooks should appeal to a heterogeneous group of students. In the last part of the study, the authors evaluated some possible proof examples. The authors didn't accept experimental, example-based arguments as proofs. This finding indicates that textbook authors acknowledge the limitations of example-based verification, contrasting with prior research.

Discussion, Conclusion and Suggestions

When the authors were asked to define the concept of proof, they mainly associated proof with mathematics and science and made fragmented and long definitions. In their 2019 study, Eş et al. found that prospective mathematics teachers viewed mathematics as a branch of science and an assistive field to science and defined the process of mathematical knowledge creation as problem solving and proof. It can be said that the findings of the two studies are similar in this sense.

When the authors were asked whether they needed to prove, all authors stated that they needed to do so while teaching. In addition, the authors stated that they needed to prove while studying mathematics.

Similarly, Konur and Keskin (2022) found in their study that most teachers use mathematical proofs in their teaching careers. Although three authors produced answers by establishing a relationship between proof and learning in the previous questions, only one author stated that they needed to prove while writing a book. This may be due to the difficulties encountered by book authors while writing a textbook and the curriculum. In fact, the 6th author touched on the process of writing a primary school mathematics textbook and the difficulties he experienced in this process while explaining his need to prove.

When the authors were asked whether doing proofs is related to learning mathematics, all of them stated that proofs are indeed related to learning mathematics, despite the limited connection they had established between proofs and learning in the previous questions. The reason for this change in their views may be that the subsequent questions encouraged the authors to think about the relationship between proofs and learning, and that their understanding and awareness may have developed as they thought and talked about proofs.

The authors mentioned that proof could start to take place at different levels from preschool to high school. The responses were mostly concentrated at the preschool and primary school levels. Aylar (2014) stated in her study that proof had come to be seen as a tool for supporting mathematics teaching, and therefore could be implemented at every level, beginning with kindergarten. This idea is parallel to the authors' views.

In the last part of the study, when the authors were shown a proof question suitable for primary and secondary school students, all the authors stated that the proof examples were suitable for their school levels, but they expressed their concerns about including them in the textbook. The fact that proof skills were not emphasized enough in the 2018 curriculum and that they could not relate the content to the achievements was effective in the authors' thinking in this way. When the authors examined the student responses to the proof question, they accepted the situations that justified the accuracy of a statement, generalized and used algebraic expressions as proof, and they were skeptical about the arguments that tested the accuracy of the statement by giving examples, and did not evaluate these examples as proof. In some cases, although mathematics teachers are aware of the limitations of experimental, example-based arguments, they can accept these approaches as proof because these examples are suitable for the students' levels (Knuth, 2002). The study conducted by Dalkılıç and Zeybek Şimşek (2022) with teachers and prospective teacher also revealed this result. In this study, textbook authors did not exhibit this tendency, they didn't accept experimental, example-based arguments as proof.

Ekler

EK 1

Amaç 1 : Matematiksel düşüncelerini mantıklı bir şekilde açıklamak ve paylaşmak için matematiksel terminolojiyi ve dili doğru kullanabilecektir.

Amaç 2 : Problem çözme sürecinde kendi düşünce ve akıl yürütmelerini rahatlıkla ifade edebilecek, başkalarının matematiksel akıl yürütmelerindeki eksiklikleri veya boşlukları görebilecektir.

Amaç 3 : Üstbilişsel bilgi ve becerilerini geliştirebilecek, kendi öğrenme süreçlerini bilinçli biçimde yönetebilecektir.

Amaç 4 : Matematiksel kavramları anlayabilecek, bu kavramları günlük hayatta kullanabilecektir.

Amaç 5 : Tahmin etme ve zihinden işlem yapma becerilerini etkin bir şekilde kullanabilecektir.

Amaç 6 : Kavramları farklı temsil biçimleri ile ifade edebilecektir.

Amaç 7 : Araştırma yapma, bilgi üretme ve kullanma becerilerini geliştirebilecektir.

Amaç 8 : Matematiğin anlam ve dilini kullanarak insan ile nesneler arasındaki ilişkileri ve nesnelerin birbirleriyle ilişkilerini anlamlandırabilecektir.

Amaç 9 : Matematiğin sanat ve estetikle ilişkisini fark edebilecektir.

Amaç 10 : Matematiksel okuryazarlık becerilerini geliştirebilecek ve etkin bir şekilde kullanabilecektir.

Amaç 11 : Sistemli, dikkatli, sabırlı ve sorumlu olma özelliklerini geliştirebilecektir.

Amaç 12 : Matematiğin insanlığın ortak bir değeri olduğunun bilincinde olarak matematiğe değer verecektir.

Amaç 13 : Matematiği öğrenmede deneyimleriyle matematiğe yönelik olumlu tutum geliştirerek matematiksel problemlere öz güvenli bir yaklaşım geliştirecektir.

EK 2

Kazanım 1. Tek ve çift doğal sayıların toplamlarını model üzerinde inceleyerek toplamların tek mi çift mi olduğunu ifade eder.

Kazanım 2. Şekillerin kenar sayılarına göre isimlendirildiklerini fark eder.

Kazanım 3. Şekillerin birden fazla simetri doğrusu olduğunu şekli katlayarak belirler.

Kazanım 4. Pisagor bağıntısını oluşturur, ilgili problemleri çözer.

Kazanım 5. Özdeşlikleri modellerle açıklar.

Kazanım 6. Özdeşlikleri modellerle açıklar.