

# Çevrimsel Malzeme Deformasyonlarının Modellenmesi- Bölüm I: Plastisite Bünye Modelleri

**Mehmet Fırat**

Yardımcı Doçent

Makina Mühendisliği Bölümü  
Sakarya Üniversitesi  
Esentepe, 54040 SAKARYA

*Makina parçaları ve yapı elemanların tasarımında; temel mühendislik faaliyetleri, statik ve dinamik yüklemeler altında oluşan gerilme ve gerinimlerin hesaplanması, ve belli bir güvenlik kriterine göre malzeme seçiminden geometrik ölçümlendirmeye kadar olan bir dizi tasarım kararının alınması olarak ifade edilebilir. Gerek bilgisayar ortamında değişik sayısal yöntemler kullanılarak yapılan değerlendirmeler ve gerekse protiplendirme esnasında uygulanan değişik doğrulama testleri, yapısal deformasyonların gerinim ve gerilme değerleriyle ilişkilendirme gereksinimi mevcuttur. Bu amaçla yapılacak tüm mühendislik faaliyetleri değişen oranlarda malzeme bünye modellerinin kullanılması ihtiyacını ortaya çıkarmaktadır. Bu sebeple tasarım araçlarını kullanan mühendisler açısından malzeme modelleme bilgisi giderek artan bir önem ifade etmektedir. Bu makalede, tipik mühendislik metallerinin çok-eksenli çevrimsel dinamik yüklemeler altında deformasyonlarının benzetimine yönelik literatürde önerilen bünye modelleri incelenecektir.*

*Anahtar Kelimeler: Çok Eksenli Çevrimsel Yükleme, Kinematik Pekleşme, Plastik Bünye Denklemi*

## SİMGELER LİSTESİ

$\underline{\underline{\sigma}}$	gerilme tensörü
$\underline{\underline{S}}$	deviatorik gerilme tensörü
$\sigma_m$	hidrostatik gerilme
$\underline{\underline{\alpha}}$	(akma yüzeyi) öteleme tensörü
$\underline{\underline{\epsilon}}$	gerinim tensörü
$\underline{\underline{\epsilon}}^p$	plastik gerinim tensörü
$\epsilon_m$	hidrostatik gerinim
$\underline{\underline{n}}$	(akma yüzeyi) birim normal tensörü
$\sigma_y$	akma gerilmesi
$R^{(i)}$	gerilme uzayında von Mises akma yüzeyinin yarıçapı

## GİRİŞ

Zamana bağlı yüklemeler altında gözlenen gerçek malzeme davranışı son derece karmaşıktır. Bununla birlikte, yapısal elemanlar ve makine parçalarının çoğu, servis koşullarında elastik deformasyonlar oluşacak şekilde tasarlanmaktadır, ve bu şartlar altında malzemede oluşan gerilme-gerinim bileşenleri arasında oransal bir ilişki söz konusudur [1]. Bu koşullarda metal malzemelerin elastik

gerilme ve gerinim değerleri lineer bünye denklemleri kullanılarak hesaplanabilir. Ancak gerilme ve gerinim bileşenleri arasındaki oransal ilişki bozulduğunda, nispeten daha karmaşık plastisite modellerinin kullanılması gereksinimi ortaya çıkmaktadır. Plastisite modelleri, çok-eksenli yükler altında malzeme gerilme-gerinim davranışının benzetimi amacıyla geliştirilen matematiksel bağıntılar ya da bünye denklemleridir. Literatürde, farklı kategorilerdeki malzemelerin deformasyon davranışı benzetimine yönelik bir çok plastisite modeli mevcuttur [1-6]. Bununla birlikte makro ölçekte çok-eksenli çevrimsel malzeme davranışının benzetimine uygun ve mühendislik uygulamaları açısından pratik bir plastisite modeli aşağıdaki karakteristik özelliklere sahip olmalıdır [7-9];

- Dengelenmiş orantısız yüklemelerde Bauschinger etkisini modelleyebilme yetisi.
- Değişken genlikli yükler altında malzeme davranışını modelleyebilme yetisi.
- Dengelenmemiş yüklemelerde yüklemeler için gerilme azalmasını modelleyebilme yetisi.
- Dengelenmemiş orantısız ve/veya orantısız olmayan yüklemelerde yüklemeler için elastik ya da plastik çevrimsel gerinim birikimini modelleyebilme yetisi.
- Çevrimsel pekleşme, yumuşama ve her iki durumun olduğu geçici malzeme davranışlarını modelleyebilme yetisi.

- Orantısız olmayan yüklem koşullarında gözlenen orantısız olmayan pekleşmeyi modelleyebilme yetisi.

Literatürde, çevrimsel yükler altında malzeme deformasyonlarını farklı pekleşme kanunlarıyla benzetimini yapan birçok plastisite bünye denklemi bulunmaktadır [9-11]. Bu modeller incelendiğinde temelde iki farklı termodinamik temele dayandıkları söylenebilir [5,9,12-14]. İlk grupta yer alan "Hereditary" teorilerde, malzemenin mevcut andaki gerilme-gerinim durumu sadece şimdiki ve geçmişte gözlemlenebilen değişkenlere bağlıdır. Bu sınıftan plastisite bünye modelleri arasında en çok bilineni Valanis tarafından geliştirilen endokronik teoridir [5,15,16]. Plastik gerinim tensörünü bir "öz zaman ölçütü" olarak kullanan endokronik teori, farklı çok-eksenli yüklem koşullarında çeşitli malzeme gerilme-gerinim davranışlarını açıklamak üzere geniş kapsamlı olarak kullanılmıştır [13,14,17-19]. İkinci gruptaki bünye modellerinde, malzemenin anlık durumu, söz konusu andaki gözlemlenebilen değişkenlerin değerlerine ve bir dizi iç değişkene bağlıdır ve bu özellikleri itibarıyla deformasyon hızından bağımsız plastisite modelleri için akma yüzeyi kavramı ağırlıklı olarak kullanılmaktadır [1,5,6]. Bu makalede gözden geçirilecek bünye modelleri ikinci grupta yer almaktadır ve iç bünye değişkenleri modelleri olarak adlandırılacaktır. Ayrıca bu modeller arasından, hızdan bağımsız metal malzeme deformasyonlarının izotermal koşullarda hesaplanmasına yönelik olanları üzerinde durulacaktır.

Makalenin bundan sonraki gelişimini sunmak için gerekli olan tensör notasyonu aşağıda verilen denklemlerle açıklanmıştır. Euclid tensör uzayında bir Kartezyen ortonormal eksen takım sistemi,  $X_i$ , gözönüne alınacaktır. Parametrelerin altına yerleştirilen tek ve çift alt çizgi sırasıyla bir Kartezyen vektörünü ve ikinci dereceden bir Kartezyen tensörünü ifade etmektedir.

Vektör uzayında baz vektörler arasında aşağıdaki eşitlik vardır:

$$\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij} \quad (1)$$

Yukarıdaki eşitlikte  $\delta_{mn}$  Kronecker deltasıdır.

Bir  $\underline{a}$  vektörü ve  $\underline{A}$  tensörü aşağıdaki denklemlerle tanımlanır:

$$\underline{a} = a_i \underline{e}_i = \sum_{i=1}^3 a_i \underline{e}_i \quad (2)$$

$$\underline{A} = A_{ij} \underline{e}_i \underline{e}_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_{ij} \underline{e}_i \underline{e}_j \quad (3)$$

$\underline{A}$  ve  $\underline{B}$  tensörlerinin çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = (A_{ij} \underline{e}_i \underline{e}_j) \cdot (B_{mn} \underline{e}_m \underline{e}_n) = A_{im} B_{mn} \underline{e}_i \underline{e}_n \quad (4)$$

İki ikinci derece tensör  $\underline{A}$  ve  $\underline{B}$ 'nin skalar çarpımı aşağıdaki gibidir:

$$\underline{A} : \underline{B} = (A_{ij} \underline{e}_i \underline{e}_j) : (B_{mn} \underline{e}_m \underline{e}_n) = A_{im} B_{im} \quad (5)$$

İkinci derece tensör  $\underline{A}$ 'nın izi:

$$\text{tr} \underline{A} = \underline{A} : \underline{I} = (A_{ij} \underline{e}_i \underline{e}_j) : (\delta_{mn} \underline{e}_m \underline{e}_n) = A_{ii} \quad (6)$$

burada,  $\underline{I}$  birim tensördür. Bir ikinci derece tensörün normu aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\|\underline{A}\| = \sqrt{\underline{A} : \underline{A}} = \sqrt{(A_{ij} \underline{e}_i \underline{e}_j) : (A_{mn} \underline{e}_m \underline{e}_n)} = \sqrt{A_{im} A_{im}} \quad (7)$$

## İÇ BÜNYE DEĞİŞKENLERİ MODELLERİ

En genel durumda, metallerin gerilme-gerinim davranışı zamana, yüklem şekline, yüklemine geçmişine, ve sıcaklığa bağımlılık gösterir. Ancak oda sıcaklığı ve ona yakın sıcaklıklarda, birçok metal malzemenin çevrimsel yükler altında gösterdiği gerilme gerinim davranışının yüklem formu ve yüklem geçmişinden ağırlıklı olarak etkilendiği kabul edilmektedir. Ayrıca, malzeme iç yapısı makro düzeyde homojen ve başlangıçta izotrop kabul edilebilir [1-6]. Bununla birlikte, malzemenin bir ilk ve tek elastik gerilme limitine sahip olduğu kabul edilir, ve bu gerinim değeri basit çekme deneyinde elastik ve plastik deformasyonları ayırt edilmesinde kullanılabilir [1-6,8]. İç bünye değişkenleri plastisite modelleri üç temel kavram üzerine kurulmaktadır.

Bunlar gerilme uzayında elastik alanı tanımlayan akma yüzeyi, elastik ve plastik gerinim artışlarını gerilme artışlarına ilişkilendiren bir akma ya da deformasyon kuralı, ve plastik deformasyon sırasında akma yüzeyinin hareketini ve şeklini belirleyen bir pekleşme kuralı olarak sıralanabilir. Gerilme uzayındaki akma yüzeyi, her bir gerilme bileşeninin bir akma kriteri ile kurduğu özel kombinasyonu ifade eder. Buna ek olarak gerilme artışlarını elastik ve plastik gerinim artışlarına ilişkilendiren bir akma ya da deformasyon kuralına ve akma yüzeyinin hareketini ve şeklini belirleyen bir pekleşme kuralına ihtiyaç vardır. Dengelenmiş orantısız tam çevrimli deformasyonlar sırasında ortaya çıkan plastik anizotropi, ideal izotrop pekleşme kuralının yararını ortadan kaldırır ve gerilme uzayındaki akma yüzeyi hareketinin ifadesi için kinematik ya da birleşik izotrop-kinematik tipte pekleşme kurallarının kullanılması gerekir. Literatürde önerilen kinematik ve birleşik izotrop-kinematik bünye modelleri incelendiğinde üç ana gruba ayrılabilirler. Bunlar sırasıyla,

- Temel kinematik pekleşme modelleri
- Çoklu - Yüzey modelleri

- Lineer olmayan kinematik pekleşme modelleri olarak verilebilir.

### Temel kinematik pekleşme modelleri

Bauschinger etkisini modelleme amacıyla Prager [20], gerilme uzayındaki akma yüzeyi ötelemesini,  $d\underline{\alpha}$ , bir malzeme sabiti aracılığı ile plastik gerinim adımıyla,  $d\underline{\varepsilon}^p$ , ifade etmiştir. Prager tarafından önerilen kinematik pekleşme kuralı aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$d\underline{\alpha} = a_p d\underline{\varepsilon}^p \quad (8)$$

Öteleme miktarı lineer olarak plastik artışla bağıntılı olduğundan, bu kural "lineer kinematik" pekleşme kuralı olarak adlandırılır. Daha sonra Ziegler [21], Prager tarafından önerilen kinematik kuralın gerilme alt-uzaylarında tutarsızlıklarını ortadan kaldırmak için, akma yüzeyi öteleme denklemini aşağıdaki eşitlikteki gibi değiştirmiştir.

$$d\underline{\alpha} = a_p (\underline{\sigma} - \underline{\alpha}) \quad (9)$$

Genel olarak lineer kinematik pekleşme kuralında, orantı faktörü  $a_p$ 'nin sabit olduğu varsayılır ve akma katı bir akma yüzeyinin varlığı kabul edilmektedir. Tek-eksenli çekme-basma testlerinde gözlemlenen, değişken pekleşme eğrisini modellemek amacıyla, Prager-Ziegler pekleşme kuralına dayalı çok-katmanlı plastisite modelleri önerilmiştir [22]. Klasik biçiminde Prager-Ziegler pekleşme kuralı dengelenmemiş orantısal yüklemelerde elastik deformasyon öngörürken, Drucker ve Palgen [7] orantısallık faktörünü ikinci deviatorik gerilme değişmezi ile değiştirmiş ve genel dengelenmemiş yüklemeler için gerinim birikimi modellemiştir. Ancak, orantısal olmayan çeşitli yüklemeler altında metaller için yapılan deneylerde gözlemlenen

akma yüzeyi öteleme yönü ve lineer kinematik pekleşme kuralına göre akma yüzeyi öteleme yönü arasındaki tutarsızlıkları rapor eden çalışmalar literatürde yayınlanmıştır [23-30].

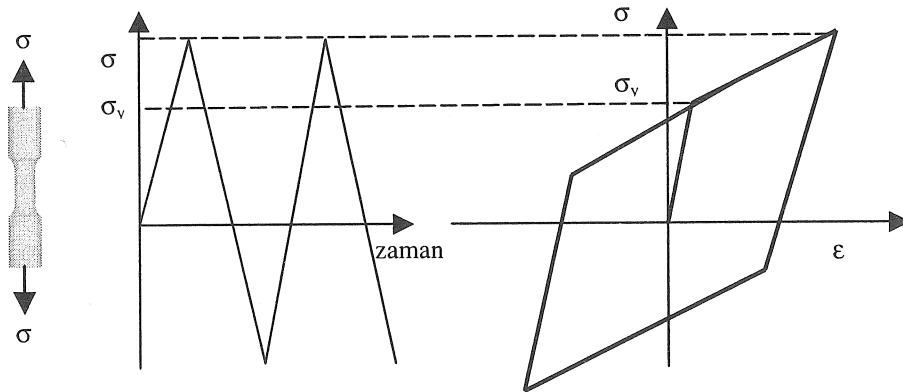
### Çoklu – Yüzey modelleri

Mroz [31] malzeme bellek davranışını modellemek amacıyla "Pekleşme Modülü alanı" kavramını ortaya atmıştır ve yeni bir kinematik pekleşme kuralı önermiştir. Mroz çevrimsel plastisite modeli, elastik ve plastik rejimleri temsil etmek için gerilme uzayında bir grup katı yüzey kullanır; bu nedenle literatürde bu bünye denklemleri Mroz çoklu-yüzey modeli olarak adlandırılmaktadır [1,5,6,8,9,32,33]. Çoklu-yüzey modeli, tek eksenli gerilme-gerinim eğrisinin tek bir nokta yerine bir kaç nokta ile genelleştirilmesidir, tek eksenli gerilme-gerinim eğrisinin her bir noktasına karşılık gelen lineer kinematik pekleşme kuralındaki elastik sınır örneğinde olduğu gibi; gerilme uzayındaki bir yüzey geometrik olarak başlangıçtaki akma yüzeyine benzer olarak sabit bir pekleşme modülü  $h$  ile tanımlanır (Şekil 2). Mroz, aktif akma yüzeyinin öteleme yönünün, aktif akma yüzeyi olan  $i$ . yüzeyi üzerindeki mevcut gerilme durumunu bir sonraki akma yüzeyi olan  $(i+1)$ . yüzeyi üzerindeki gerilme noktasına bağlayan ve normal ilk gerilme noktasıyla paralel olan bir vektör ile belirlenebileceğini iddia etmiştir (Şekil 3). Mroz pekleşme kuralına göre aktif akma yüzeyinin öteleme adımı aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

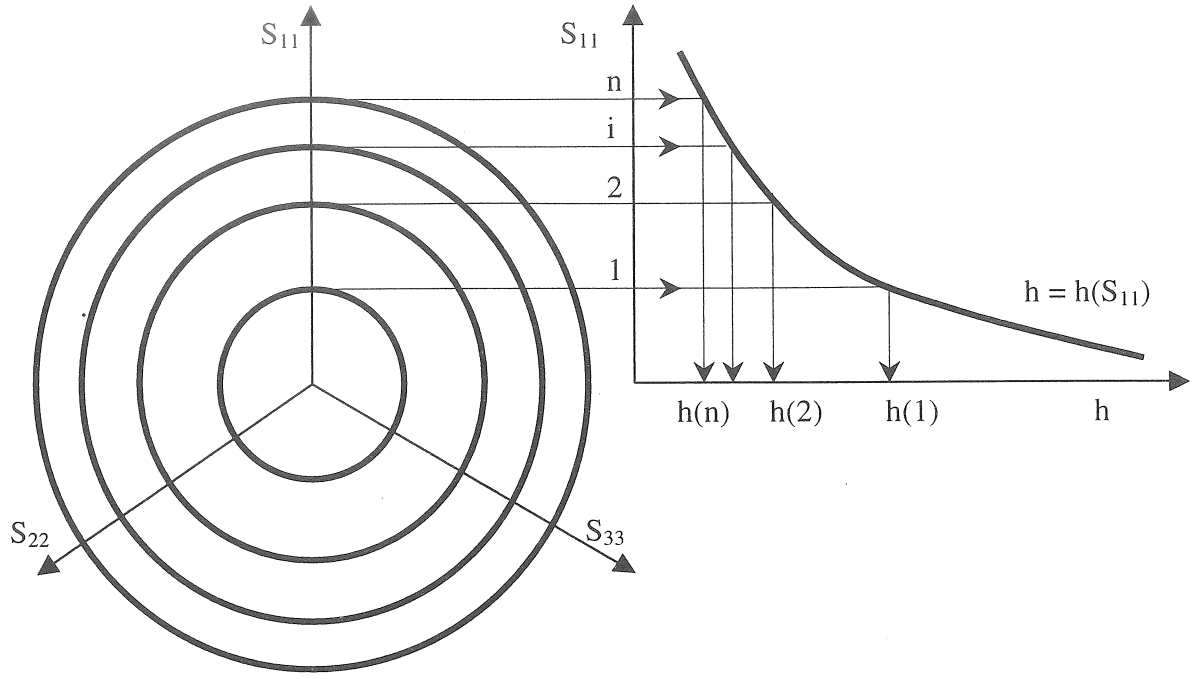
$$d\underline{\alpha}^{(i)} = \frac{dS : \underline{n}}{\underline{v} : \underline{n}} \underline{v} \quad (10)$$

burada  $\underline{v}$  tensör niceliği aşağıdaki gibi tanımlanır:

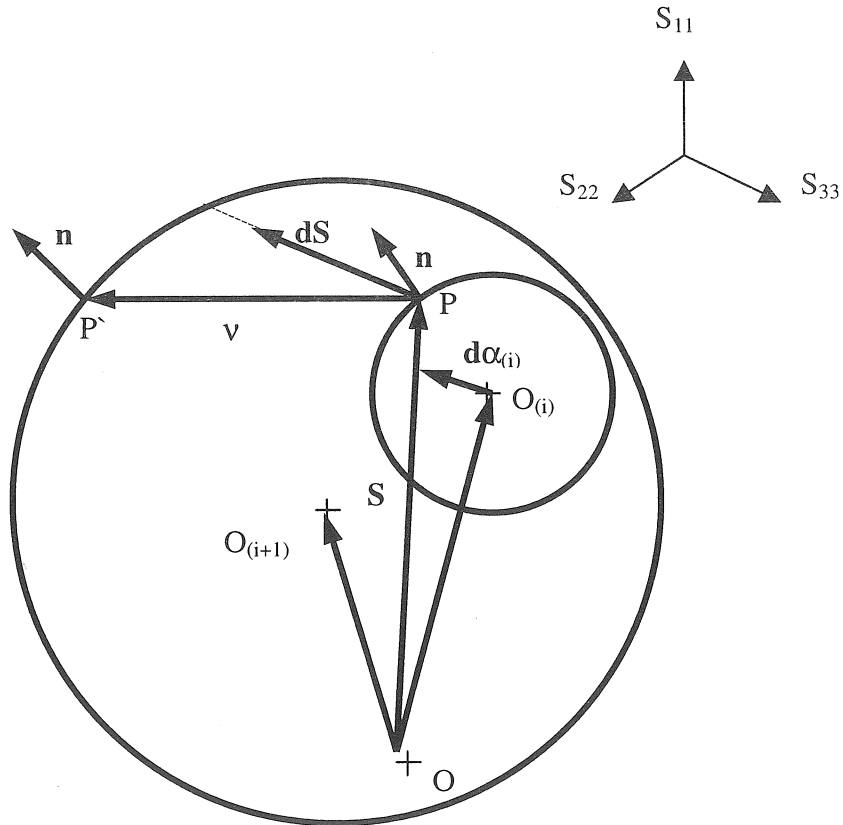
$$\underline{v} = \sqrt{\frac{2}{3}} (R^{(i+1)} - R^{(i)}) \underline{n} + \underline{\alpha}^{(i+1)} - \underline{\alpha}^{(i)} \quad (11)$$



Şekil 1. Lineer kinematik pekleşme modeliyle öngörülen dengelenmiş gerilme-gerinim döngüsü.



Şekil 2. Pekleşme Alanı Modülleri .

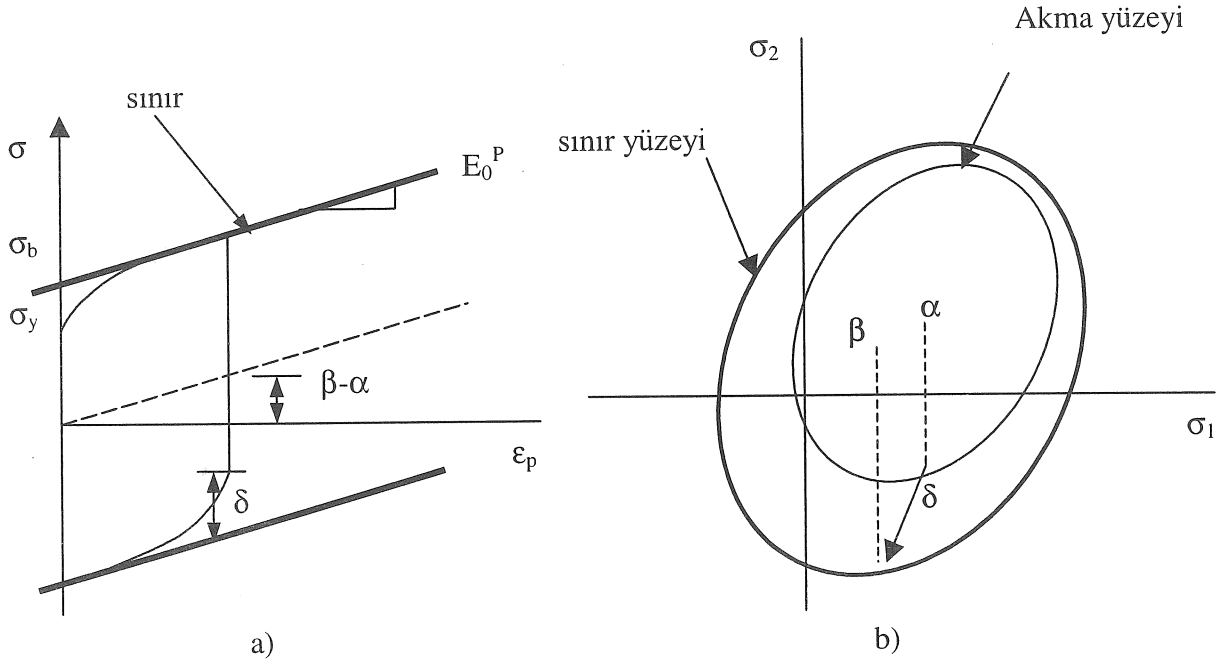


Şekil 3. Mroz modelinde öteleme yönünü şematik gösterilişi.

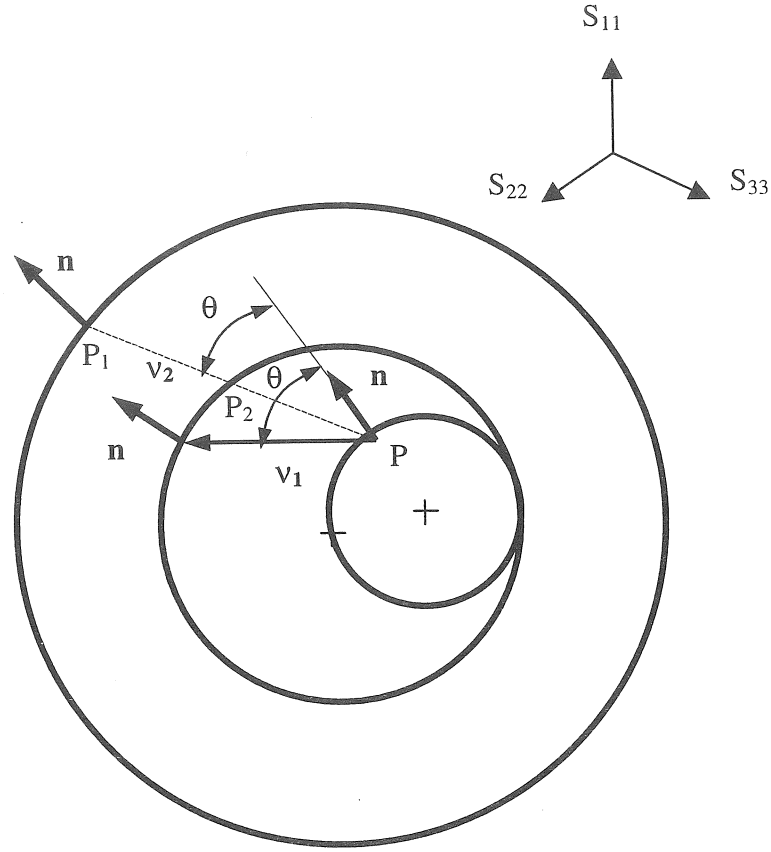
Yukarıdaki ifadede,  $R^{(i)}$  akma yüzeyinin yarıçapını temsil eder.  $\underline{\alpha}^{(i)}$  ise gerilme uzayında akma yüzeyi merkezini tanımlayan öteleme tensörünü göstermektedir. Garud [32], akma yüzeyinin öteleme yönünde, sonlu gerilme artımlı hesaplamalarda, akma yüzeylerinin kesişim problemlerinden dolayı bir tutarsızlık durumu olduğunu, ve öteleme denkleminin gerilme artışından bağımsız olduğuna işaret etmiştir. Yüzeyler arasındaki kesişme problemini gidermek amacıyla, Garud öteleme yönünü gerilme artışıyla ilişkilendiren alternatif bir pekleşme kuralı önermiştir. Hem Mroz hem de Garud pekleşme modelleri, çok eksenli orantısız gerilme ve gerinim kontrollü yükleme koşulları altında Bauschinger etkisini doğru bir şekilde tekrarlayabilmektedir [25,28,29,31-35]. Ancak her iki pekleşme kuralı dengelenmemiş orantısız yüklemeler için çevrimsel gerinim birikimi hesaplanmasında kullanılamaz [36,37]. Buna ek olarak, bu modeller orantısız gerilme-kontrollü yükleme koşulu altında ortalama gerilme azalmasını modelleyememektedir. Bununla birlikte, dengelenmemiş orantısız olmayan yükleme koşulları atındaki sabit çevrimsel gerinim birikmesi oranı metallerin çoğunda gözlemlenmemektedir ve tahmin edilen birikmiş

gerinimler deneysel sonuçlardan çok daha yüksektir [1,11,36-42]. Çevrimsel orantısız olmayan yükleme koşulları altında Mroz'un ve Garud'un pekleşme kurallarında kullanılan yüzey sayısının hesaplanan gerilme-gerinim değerleri üzerindeki etkisi birçok araştırmacı tarafından sorgulanmıştır (Şekil 4). Örneğin Jiang ve Sehitoglu [43] tarafından yapılan çevrimsel eksenel yükleme-burkma testlerinde gözlenen dengelenmiş davranış çoklu-yüzey pekleşme kurallarıyla modellenememiştir.

Dafalias ve Popov [44], çoklu-yüzey modellerinde hesaplama süresini azaltmak için iki-yüzey modeli önerdi. Dafalias ve Popov modelinde, yüzeylerden biri akma yüzeyi ve diğeri ise sınır yüzeyi olarak tanımlanmıştır. Sınır yüzeyi eşik plastik pekleşme modülünün aktif hale geldiği sınır plastisiteyi temsil eder. (Şekil 5). Bu kavramın ardından, Mroz ya da Garud pekleşme kuralını takip eden, farklı "görüntü noktası" tanımlarına dayalı pekleşme modülü fonksiyonuna sahip bir dizi iki-yüzey modeli geliştirilmiştir. Anlık gerilme noktasının görüntü noktasına olan mesafesini kullanan farklı pekleşme fonksiyonları kullanılarak orantısız ve orantısız olmayan yükleme koşullarında başarılı gerilme-gerinim modellemesi yapıldığı rapor edilmiştir [45-50].



Şekil 4. Akma yüzeyinin öteleme yönü üzerinde yüzey sayısının etkisini gösteren şematik.



Şekil 5. Dafalias ve Popov modeline göre akma yüzeyini ve akma sınır yüzeyini gösteren şematik. a) tek eksenli gösterim b) genel gerilme gösterim[50].

#### Lineer olmayan kinematik pekleşme modelleri

Armstrong ve Frederick [1] metal malzemelerde gözlenen "gerinim hafızası" etkisini, Prager ve Ziegler tarafından önerilen lineer kinematik pekleşme ifadesine anlık gerinim terimi ekleyerek yeni bir akma yüzeyi öteleme denklemi önermişlerdir.

$$d\underline{\underline{\alpha}} = a_p d\underline{\underline{\epsilon}}^p - c_a \underline{\underline{\alpha}} dp \quad (12)$$

burada  $a_p$  bir malzeme sabitidir.  $c_a$  ifadesi ise gerinim uzayında anlık plastik gerinim tensörünün gerinim adımı ile yapmış olduğu açının fonksiyonudur ve  $dp$  eşdeğer plastik gerinim adımı artışıdır. Akma yüzeyi ötelemesi  $d\underline{\underline{\alpha}}$ 'nin anlık akma yüzeyi merkezi  $\underline{\underline{\alpha}}$ 'ye olan örtülü bağımlılığı nedeniyle, pekleşme kuralı lineer olmayan bir hal alır ve bu sebeple literatürde bu pekleşme kuralı Lineer Olmayan Kinematik Pekleşme olarak adlandırılır. Lineer olmayan kinematik pekleşme modeli, dengelenmemiş orantısız yüklemde plastik gerinim birikiminin benzetimini gerçekleştirebilir.

Ancak, metallerin çoğunluğu için gerinim birikmesi, çevrim sayısının artmasıyla azalmaktadır. Bununla birlikte Mroz yada Garud tarafından önerilen pekleşme kuralları kullanan çoklu-yüzey modeline benzer şekilde, lineer olmayan kinematik pekleşme modelinin bu formu çevrimsel gerinim birikimini deneysel olarak gözlenen değerlerden daha fazladır [9,11-13, 26-29,39,40,51]. Bower [51] bir malzeme iç değişkenini öteleme denklemine ekleyerek yeni bir lineer olmayan pekleşme kuralı önermiş ve akma yüzeyi ötelemesini aşağıdaki şekilde ifade etmiştir:

$$d\underline{\underline{\alpha}} = a d\underline{\underline{\epsilon}}^p - b(\underline{\underline{\alpha}} - \underline{\underline{\beta}}) dp \quad (13)$$

ve,

$$d\underline{\underline{\beta}} = c(\underline{\underline{\alpha}} - \underline{\underline{\beta}}) dp \quad (14)$$

Tek eksenli çekme-basma testlerinden türetilen malzeme sabitleri  $a, b, ve c$  dir; ek iç değişken  $\underline{\underline{\beta}}$  çevrimsel gerinim birikimini modeller ve başlangıçta sıfır olarak alınır.  $d\underline{\underline{\beta}}$  ifadesi  $(\underline{\underline{\alpha}} - \underline{\underline{\beta}})$ 'ye orantılı olduğundan,  $c(\underline{\underline{\alpha}} - \underline{\underline{\beta}}) dp$  değeri dengelenmemiş

orantısal yükleme koşulunda artan yükleme çevrimleriyle birlikte azalır, bu da bakır ve çelik gibi malzemeler için deneysel olarak gözlemlenen çevrimsel gerinim birikimi bozunum hızını uygun olarak modelleyebilir [51].

Chaboche ve Rousselier [52-54] gerilme öteleme tensörünü toplamalı parçalara ayırmış ve toplam öteleme tensörü kavramını ortaya atmıştır. Bu yaklaşımda toplam akma yüzeyi öteleme tensörü, her biri aynı pekleşme kuralı yapısına sahip olan bir dizi öteleme tensörü bileşeninin seri açılımı olarak ifade edilir.

$$\underline{\underline{\alpha}} = \sum_{i=1}^m \underline{\underline{\alpha}}^{(i)} \quad (15)$$

$$d\underline{\underline{\alpha}}^{(i)} = \frac{2}{3} C d\underline{\underline{\epsilon}}^p - \gamma \underline{\underline{\alpha}} dp \quad (16)$$

Yukarıdaki ifadede,  $\underline{\underline{\alpha}}$  toplam öteleme tensörünü,  $\underline{\underline{\alpha}}^{(i)}$  ise m adet öteleme tensörü bileşenin herhangi birini temsil eder. Chaboche ve Rousselier [52] C ve  $\gamma$  ifadelerini malzeme parametreleri olarak tanımlamışlardır. Bu noktada Armstrong ve Frederick tarafından önerilen pekleşme kuralındaki  $c_a$  parametresi ile yukarıdaki  $\gamma$  parametresinin arasındaki fark önemlidir.  $c_a$  bir skalar fonksiyondur ve toplam öteleme tensörünün artan plastik gerinimle doygunluk parametresi olarak tanımlanabilir. Toplam öteleme tensörü bileşenlerinin sayısı hakkındaki kararın belli bir malzemedeki gerilme-gerinim davranışı ile bağıntılı olduğu ifade edilmiştir ve üç ila beş bileşenin çoğu metal malzeme deformasyonunu benzetiminde "uygun" olduğu belirtilmektedir [26,27,53,54]. Malzeme sabitleri C ve  $\gamma$ 'nin belirlenmesinde, temel girdi olarak farklı gerinim genliklerindeki dengelenmiş çevrimsel gerinim-gerilme eğrisini kullanılarak, grafik ve sayısal yöntemler izlenebilir [1]. Chaboche tarafından önerilen toplam öteleme tensörünün toplamalı ifadesi dengelenmiş yükleme koşulları altında çevrimsel olarak giderek azalan bir gerinim birikimi hızı ortaya koymakla birlikte, "azalma" süresi deneysel gözlemlere göre oldukça kısadır ve çevrimsel dengelemeyi takip eden çevrimlerde sabit bir hız elde edilmektedir [29,41,49,50,55-57]. Gerinim birikimi hızındaki değişimi kontrol etmek amacıyla, Chaboche [58] her bir öteleme tensörü bileşeni değişim eşitliğine bir "gerinim belleği eşiği" terimi eklenmesini önerdi ve bu öneriyi tek eksenli testlerle doğruladı.

Öteleme tensörünün toplamalı ifadesi ve gerinim belleği eşiği kavramını kullanarak, Onno ve Wang [55-57], her bir öteleme tensörü bileşeni için gerinim belleği değişim sürecinde bir "kritik hal" kavramını ortaya atmışlardır;

$$d\underline{\underline{\alpha}}^{(i)} = \frac{2}{3} h^{(i)} d\underline{\underline{\epsilon}}^p - \zeta^{(i)} \underline{\underline{\alpha}} dp^{(i)} \quad (17)$$

öteleme tensörü bileşeni değişim eşitliğinde,  $h^{(i)}$  ve  $\zeta^{(i)}$  malzeme parametreleridir.  $dp^{(i)}$  ise çevrimsel yükleme sırasında gerinim bellek değişimine neden olan plastik gerinim adıdır ve aşağıdaki koşullar ile tanımlanır:

$$0 \leq dp^{(i)} \leq \left( \frac{2}{3} d\underline{\underline{\epsilon}}^p : d\underline{\underline{\epsilon}}^p \right)^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

Jiang [29] ve Jiang ve Sehitoglu [43] öteleme tensörü bileşenleri için sınırlayıcı "limit yüzey" kavramını geliştirmişlerdir (Şekil 6), ve lineer olmayan kinematik pekleşme modelinde öteleme denklemini genelleştirir. Buna göre,

$$d\underline{\underline{\alpha}}^{(i)} = c^{(i)} r^{(i)} (\underline{\underline{n}} - W^{(i)} \underline{\underline{L}}) dp \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (19)$$

ve,

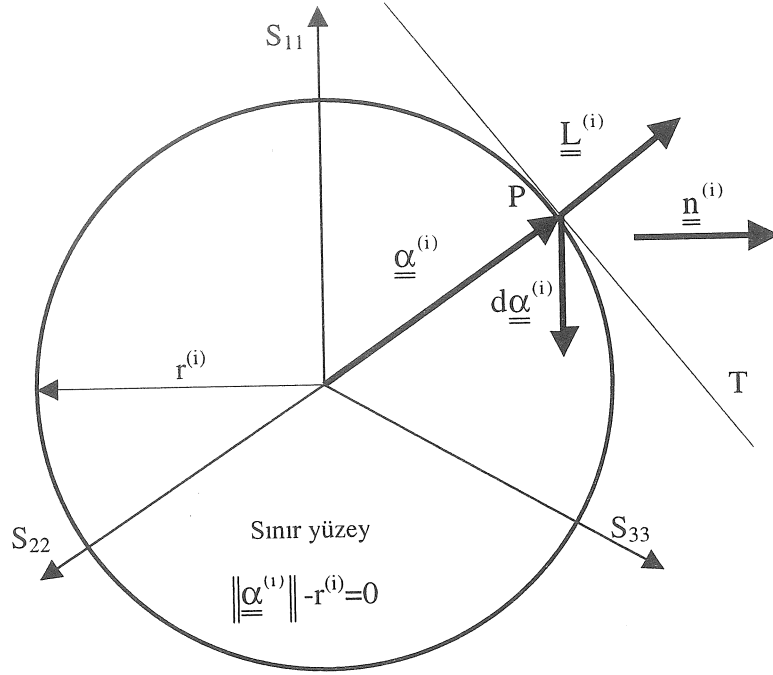
$$\underline{\underline{L}}^{(i)} = \frac{\underline{\underline{\alpha}}^{(i)}}{\|\underline{\underline{\alpha}}^{(i)}\|} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (20)$$

$c^{(i)}$  ve  $r^{(i)}$  malzeme parametreleridir,  $\underline{\underline{L}}^{(i)}$  niceliği i. öteleme tensörü bileşeninin birim tensörüdür.  $W^{(i)}$  sabiti ise, i. öteleme bileşeni için bir yön fonksiyonudur. Limit yüzey kavramı kullanılarak, Chaboche ve Onno ve Wang tarafından önerilmiş olan öteleme tensörü değişim denklemlerinin genellenmesi mümkündür. Jiang ve Kurath (1996a), (18) denklemindeki  $W^{(i)}$  skalar fonksiyonunun Chaboche modeli için 1'e eşit olduğuna, ve Onno ve

$$\text{Wang (1993a) modeli için } \left( \frac{\underline{\underline{\alpha}}^{(i)}}{\|\underline{\underline{\alpha}}^{(i)}\|} \right)^{\chi^{(i)+1}} \langle \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{L}}^{(i)} \rangle$$

halini aldığına işaret eder.  $\chi^{(i)}$  malzeme çevrimsel gerinim birikimi parametresi olarak önerilmiştir.

Limit yüzey kavramını kullanarak, öteleme tensörü değişim denklemindeki malzeme parametrelerinin belirlenmesi, Chaboche ve Onno-Wang modelleriyle karşılaştırıldığında nispi olarak çok daha basittir. Akma yüzeyi toplam öteleme tensör bileşenlerinin her biri için tanımlanan parametreler, malzeme davranışını modellemede üstlendikleri farklı fonksiyonlar nedeniyle iki gruba ayrılır.  $\chi^{(i)}$  parametresi, dengelenmiş orantısal yükleme koşulu altında minimal etkiye sahiptir; ancak dengelenmemiş yükleme koşullarında çevrimsel gerinim birikimi davranışı belirleyen sayısal



Şekil 6. Öteleme tensörü bileşeninin sınır yüzeyinin geometrik yorumu [29].

parametre  $\chi^{(i)}$ 'dir. Bu nedenle bu parametreye "çevrimsel gerinim birikim üstü" adı verilir [43,59-62]. Metalik bileşenlerin yorulma hasar değerlendirmelerinde yük kontrolü altında çevrimsel gerinim birikimi ya da deformasyon kontrollü koşullarda ortalama gerilme azalması oldukça önemlidir ve birikim hızı oranındaki değişimin minimal etkiye sahip olduğu varsayılmaktadır. Bu nedenle de tüm öteleme tensörü bileşenleri için  $\chi^{(i)}$  katsayıları sıfır olarak alınabilir ve çok-eksenli yükler altında daha hızlı bir dengeleme elde edilmiş olur. Diğer taraftan, ikinci grup parametreler olan  $c^{(i)}$  ve  $r^{(i)}$ 'nin hesaplanması, tam çevrimli çekme-basma testleriyle belirlenen gerinim ve gerinim histerisiz döngüleri kullanılarak gerçekleştirilebilir. Burada temel kabul, dengeli orantısız yüklenme koşulları altında malzeme davranışının çevrimsel gerinim birikmesi göstermemesi ve her bir öteleme tensörü bileşeni için çevrimsel gerinim birikimi sabitinin gerilme-gerinim davranışı üzerinde hiç bir etkiye sahip olmamasıdır.

Son on yılda başka araştırmacılar tarafından, özellikle orantısız olmayan yüklenme koşulları altında çevrimsel malzeme davranışının benzetimine yönelik farklı iç bünye değişkenlerini kullanan çevrimsel plastisite modelleri önerilmiştir [63-67]. Fakat, bu modellerin çoğunda temel kabuller ya lineer olmayan kinematik pekleşme kuralı yada bunu temel olan ancak farklı pekleşme modülü hesaplama eşitlikleri öneren kabuller yapılmaktadır. Bu sebeple, bu

modeller incelenen literatür kapsamında farklı bir pekleşme kuralı türü olarak değerlendirilmeyecektir.

## DEĞERLENDİRME

Metaller genel imalat sanayiinde en yoğun kullanılan mühendislik malzemeleri olma özelliklerini sürdürmektedirler. Şekillendirmeli imalat işlemlerinden, parça dayanım hesaplamalarına kadar olan oldukça geniş bir alanda, plastisite bünye modellerinin mühendislik uygulamaları açısından anlaşılması giderek artan bir önem arz etmektedir. Çentiksiz malzeme numunelerinin basit çevrimsel testlerinden elde edilen gerilme-gerinim eğrileri temel veri alındığında; iç bünye değişkenleri plastisite modelleri arasında lineer olmayan kinematik pekleşme kuralını kullanan çevrimsel plastisite modellerinin nispi başarısı literatürde ağırlıklı olarak kabul edildiği ortaya çıkmaktadır.

## MODELING OF CYCLIC MATERIAL DEFORMATIONS PART I: PLASTICITY CONSTITUTIVE MODELS

Today, metals are still the dominant engineering materials used in the general machinery industries. From an industrial point of view, modeling material deformations under complex multiaxial loads have been an active area of engineering research, and the understanding and application of plasticity constitutive models became an important industrial



activity ranging from sheet metal forming to durability assessment of metallic components. Using the material cyclically stabilized stress-strain curves determined from completely reversed cyclic tests as the baseline data, it might be asserted that the rate-independent plasticity models based on nonlinear kinematic hardening rule show a comparably superior success in simulating multiaxial stress-strain response under complex cyclic loading conditions.

#### KAYNAKÇA

1. Lemaitre, J., Chaboche, J.L., "Mechanics of Solid Materials", Cambridge University Press, New York, 1990.
2. Drucker, D.C., "Introduction to Mechanics of Deformable Solids", McGraw-Hill Company, New York, 1967.
3. Mendelson, A., "Plasticity: Theory and Application", The Macmillan Company, New York, 1968.
4. Malvern, L.E., "Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium", Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1969.
5. Lubliner, J., "Plasticity Theory", Macmillan Publishing Company, New York, 1990.
6. Khan, A.S., Huang, S., "Continuum Theory of Plasticity", ", John Wiley & Sons Inc., New York, 1995.
7. Drucker, D.C., Palgen, L., "On the Stress-Strain Relations Suitable for Cyclic and Other Loadings", Journal of Applied Mechanics, Vol. 48, pp. 479-485, 1981.
8. Suresh, S., "Fatigue of Materials", Cambridge University Press, New York, 1998.
9. Chaboche, J.L., "Constitutive Equations for Cyclic Plasticity and Cyclic Viscoplasticity", International Journal of Plasticity, Vol. 5, pp. 247-302, 1989.
10. Auricchio, F., Taylor, R.L., "Two Material Models for Cyclic Plasticity: Nonlinear Kinematic Hardening and Generalized Plasticity", International Journal of Plasticity, Vol. 11, No.1, pp.65-83, 1995.
11. Hashiguchi, K., "Mechanical Requirements and Structures of Cyclic Plasticity Models", International Journal of Plasticity, Vol. 9, pp.721-748, 1993.
12. Chaboche, J.L., Rousselier, G., "On the Plastic and Viscoplastic Constitutive Equations, Part I: Rules Developed with Internal Variable Concept", Journal of Pressure Vessel Technology, Vol. 105, pp. 153-158, 1983.
13. Watanabe, O., Atluri, S.N., "A New Endochronic Approach to Computational Elasto-plasticity: An Example of Cyclically Loaded Cracked Plate", J. Appl. Mech., Vol.52, pp. 857-864, 1985.
14. Watanabe, O., Atluri, S.N., "Constitutive Modeling of Cyclic Plasticity and Creep Using an Internal Time Concept", International Journal of Plasticity, Vol. 2, No.2, pp.107-134, 1986.
15. Valanis, K.C., "A Theory of Viscoplasticity without a Yield Surface. Part.I. General Theory", Archives of Mechanics, Vol.23, No.4, pp. 517-533, Warsaw, 1971.
16. Valanis, K.C., "A Theory of Viscoplasticity without a Yield Surface. Part.II. Application to Mechanical Behavior of Metals", Archives of Mechanics, Vol.23, No.4, pp. 535-551, Warsaw, 1971.
17. Valanis, K.C., "Fundamental Consequences of a New Intrinsic Time Measure Plasticity as a Limit of the Endochronic Theory", Archives of Mechanics, Vol.32, No.2, pp. 171-191, Warsaw, 1980.
18. Pan. W., Chenr, C.H., "Endochronic Description for Viscoplastic Behavior of Metals under Multiaxial Loadings", International Journal of Solids and Structures, Vol. 34, No.17, pp.2131-2160, 1997.
19. Pan. W., Chiang, W., and Wang, C., "Endochronic Analysis for Rate-dependent Elasto-plastic Deformation", International Journal of Solids and Structures, Vol. 36, pp.3215-3237, 1999.
20. Prager, W., "A New Method of Analyzing Stresses and Strains in Work-Hardening Plastic Solids", Journal of Applied mechanics, Vol.23, pp. 493-496, 1956.
21. Ziegler, H., "A Modification of Prager's Hardening Rule", Quarterly of Applied Mathematics, Vol.17, pp. 55-65.
22. Besseling, J.F., "A Theory of Elastic, Plastic, and Creep Deformation of an Initially Isotropic Material Showing Anisotropic Strain-Hardening, Creep Recovery, and Secondary Creep", Journal of Applied Mechanics, Vol. 17, pp. 529-536, 1958.
23. Lamda, H.S., Sidebottom, O.M., "Cyclic Plasticity for Nonproportional Paths: Part I- Cyclic Hardening, Erasure of Memory, and Subsequent Strain Hardening Experiments", Journal of Engineering Materials and Technology, Vol. 100, pp. 96-104, 1978.
24. Lamda, H.S., Sidebottom, O.M., "Cyclic Plasticity for Nonproportional Paths: Part II- Comparisons with Predictions of Three Incremental Plasticity Models", Journal of Engineering Materials and Technology, Vol. 100, pp. 104-111, 1978.
25. McDowell, D.L., Socie, D.F, and Lamda, S.H., "Multiaxial Nonproportional Cyclic Deformation", Low-cycle Fatigue and Life Prediction, ASTM STP 770, C. Amzallag, B.N. Leis, and P.Rabbe, Eds, American Society for

- Testing and Materials, Philadelphia, pp. 500-518, 1980.
26. Chaboche, J.L., Nouailhas, D., "Constitutive Modeling of Ratcheting Effects, Part I: Experimental Facts and Properties of the Classical Models", *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 111, pp. 384-392, 1989.
  27. Chaboche, J.L., Nouailhas, D., "Constitutive Modeling of Ratcheting Effects, Part II: Possibilities of Some Additional Kinematic Rules", *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 111, pp. 409-416, 1989.
  28. Moosbrugger, J.C., McDowell, D.L., "On a Class of Kinematic Hardening Rules for Nonproportional Cyclic Plasticity", *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 111, pp. 87-98, 1989.
  29. Jiang, Y., "Cyclic Plasticity with an Emphasis on Ratcheting", Doktora Tezi, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1993.
  30. Langlais, T., "Computational Methods for Multiaxial Fatigue Analysis", Doktora Tezi, University of Minnesota, 1999.
  31. Mroz, Z., "An Attempt to Describe the Behavior of Metals under Cyclic Loads Using a More General Workhardening Model", *Acta Mechanica*, Vol.7, No. 2-3, pp. 199-212, 1969.
  32. Garud, Y.S., "Multiaxial Fatigue of Metals", Doktora Tezi, Stanford University, 1981.
  33. Chu, C., "A Three-Dimensional Model of Anisotropic Hardening in Metals and Its Application to the Sheet Metal Forming", *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 32, No. 3, pp. 197-212, 1984.
  34. Hong, N., Shaobo, L., "Biaxial Stress Fatigue Life Prediction by Local Strain Method", *International Journal of Fatigue*, Vol. 19, No.6, pp.517-522, 1997.
  35. Shang, D., Wang, D., Yao, W., "A Simple Approach to the Description of Multiaxial Cyclic Stress - Strain Relationship", *International Journal of Fatigue*, Vol.22, pp. 251-256, 2000.
  36. Hassan, T., Kyriakides, S., "Ratcheting in Cyclic Plasticity, Part I: Uniaxial Behavior", *International Journal of Plasticity*, Vol. 8, pp.91-116, 1992.
  37. Hassan, T., Kyriakides, S., "Ratcheting in Cyclic Plasticity, Part II: Multiaxial Behavior", *International Journal of Plasticity*, Vol. 8, pp.11-146, 1992.
  38. Tipton, S.M, Bannantine J.A., "Inelastic Stress-Strain Predictions for Multiaxial Fatigue Evaluations", *Advances in Multiaxial Fatigue*, ASTM STP 1191, D.L. McDowell and R.Ellis, Eds., American Society for Testing and Materials, Philadelphia, pp. 273-297, 1993.
  39. Jiang, Y., Kurath, P., "A Theoretical Evaluation of Plasticity Hardening Algorithms for Nonproportional Loading", *Acta Mechanica*, Vol.118, pp. 213-234, 1996.
  40. Jiang, Y., Kurath, P., "Characteristics of the Armstrong-Frederick Type Plasticity Models", *International Journal of Plasticity*, Vol.12, No.3, pp. 387-415, 1996.
  41. McDowell, D.L., "Stress State Dependence of Cyclic Ratcheting Behavior of two Railway Steels", *International Journal of Plasticity*, Vol. 11, No.4, pp.397-421, 1995.
  42. Bari, S, "Constitutive Modeling for Cyclic Plasticity and Ratcheting", Doktora Tezi, North Carolina State University, 2000.
  43. Jiang, Y., Sehitoglu, H., "Cyclic Ratcheting of 1070 Steel Under Multiaxial Stress States", *International Journal of Plasticity*, Vol.10, No.5, pp. 579-608, 1994.
  44. Dafalias, Y.F., Popov, E.P., "A Model of Nonlinearly Hardening Materials for Complex Loading", *Acta Mechanica*, Vol.21, No. 2-3, pp. 173-192, 1975.
  45. Krieg, R.D., "A Practical Two Surface Plasticity Theory", *Journal of Applied Mechanics*, 641-646, 1975.
  46. Tseng, N.T., Lee, G.C., "Simple Plasticity Model of the Two-Surface Type", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.109, No.3, pp. 795-810, 1983.
  47. McDowell, D.L., "A Two Surface Model for Transient Nonproportional Cyclic Plasticity, Part I: Development of Appropriate Equations", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 52, pp. 298-302, 1985.
  48. McDowell, D.L., "A Two Surface Model for Transient Nonproportional Cyclic Plasticity, Part II: Comparison of Theory with Experiments", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 52, pp. 303-308, 1985.
  49. Bari, S, Hassan, T., "Kinematic Hardening Rules in Uncoupled Modeling for Multiaxial Ratcheting Simulation", *International Journal of Plasticity*, Vol. 15, pp. 182-198, 1999.
  50. Bari, S, Hassan, T., "Anatomy of Coupled Constitutive Models for Ratcheting Simulation", *International Journal of Plasticity*, Vol. 16, pp. 381-409, 2000.
  51. Bower, A.F., "Cyclic Hardening Properties of Hard-Drawn Copper and Rail Steel", *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol.37, No.4, pp.455-470, 1989.
  52. Chaboche, J.L., Rousselier, G., "On the Plastic and Viscoplastic Constitutive Equations, Part I: Rules Developed with Internal Variable Concept", *Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 105, pp. 153-158, 1983.

53. Chaboche, J.L., Rousselier, G., "On the Plastic and Viscoplastic Constitutive Equations, Part II: Application of Internal Variable Concepts to the 316 Stainless Steels", *Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 105, pp. 159-164, 1983.
54. Chaboche, J.L., "Time-Independent Constitutive Theories for Cyclic Plasticity", *International Journal of Plasticity*, Vol. 2, No.2, pp. 149-188, 1986.
55. Ohno, N., Wang, J.D., "Two Equivalent Forms of Nonlinear Kinematic Hardening: Application to Non- Isothermal Plasticity" *International Journal of Plasticity*, Vol. 7, pp. 637-650, 1991.
56. Ohno, N., Wang, J.D., "Kinematic Hardening Rules with Critical State of Dynamic Recovery, Part I: Formulation and Basic Features for Ratcheting Behavior", *International Journal of Plasticity*, Vol. 9, pp. 375-390-650, 1993.
57. Ohno, N., Wang, J.D., "Kinematic Hardening Rules with Critical State of Dynamic Recovery, Part II: Applications to Experiments of Ratcheting Behavior", *International Journal of Plasticity*, Vol. 9, pp. 391-403, 1993.
58. Chaboche, J.L., "On Some Modifications of Kinematic Hardening to Improve the Description of Ratcheting Effects", *International Journal of Plasticity*, Vol. 7, pp. 641-678, 1991.
59. Jiang, Y., Sehitoglu, H., "Multiaxial Cyclic Ratcheting Under Multiple Step Loading", *International Journal of Plasticity*, Vol.10, No.8, pp. 849-870, 1994.
60. Jiang, Y., Sehitoglu, H., "Comments on Mroz Multiple Surface Type Plasticity Models", *International Journal of Solids and Structures*, Vol.33, No.7, pp.1053-1068, 1996.
61. Jiang, Y., Sehitoglu, H., "Modeling of Cyclic Ratcheting Plasticity, Part I: Development of Constitutive Relations", *Journal of Applied Mechanics*, Vol.63, pp.720-725, 1996.
62. Jiang, Y., Sehitoglu, H., "Modeling of Cyclic Ratcheting Plasticity, Part II: Comparison of Model Simulations With Experiments", *Journal of Applied Mechanics*, Vol.63, pp.726-733, 1996.
63. Ristinmaa, M., "Cyclic Plasticity Model Using One Yield Surface Only", *International Journal of Plasticity*, Vol. 11, No.2, pp. 163-181, 1995.
64. Xia, Z., Ellyin, F., "A Constitutive Model with Capability to Simulate Complex Multiaxial Ratcheting Behavior of Materials", *International Journal of Plasticity*, Vol. 13, No.1-2, pp.127-142, 1997.
65. Chaboche, J.L., Jung, O., "Application of a Kinematic Hardening Viscoplasticity Model with Thresholds to the Residual Stress Relaxation", *International Journal of Plasticity*, Vol. 13, No.10, pp. 785-807, 1998.
66. Basuroy Chowdhury, I.N., Voyiadjis, G.Z., "A Multiaxial Cyclic Plasticity Model for Nonproportional Loading Cases", *International Journal of Plasticity*, Vol. 14, No.9, pp.854-870, 1998.
67. Wang, H., Barkey, M.E. "A Strain Space Nonlinear Kinematic Hardening/ Softening Plasticity Model" *International Journal of Plasticity*, Vol. 15, pp. 755-777, 1999.